Физика низких температур, 1999, т. 25, № 7, с. 650–656

О влиянии эффекта увлечения на акустические моды в двухконденсатных релятивистских сверхтекучих системах

С. И. Вильчинский

Киевский университет им. Тараса Шевченко, Украина, 252022, г. Киев, пр. Ак. Глушкова, 6
E-mail: sivil@ap3.bitp.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 27 января 1999 г., после переработки 5 марта 1999 г.

Получены выражения для скоростей звуковых возбуждений в релятивистской сверхтекучей двухконденсатной системе с учетом эффекта взаимного увлечения сверхтекучими движениями (драг-эффект). Рассмотрено влияние драг-эффекта на акустические моды в этой системе и показано, что он не влияет на характер колебаний звуковых возбуждений, но изменяет скорость волн второго, третьего и четвертых звуков.

Отримано вирази для швидкостей звукових збуджень в релятивістській надплинній двоконденсатній системі з урахуванням ефекту взаємного захоплення надплинними рухами (драг-ефект). Розглянуто вплив драг-ефекту на акустичні моди в цій системі. Показано, що ефект не впливає на характер коливань звукових збуджень, але змінює швидкість хвиль другого, третього і четвертих звуків.

PASC: 67.57.De

Введение

Нерелятивистская теория сверхтекучести существует и развивается более пятидесяти лет, но вопрос о ее релятивистском обобщении стал актуальным сравнительно недавно [1–9]. Характерные скорости в сверхтекучем гелии, включая критическую скорость, существенно меньше скорости света, поэтому «релятивизация» теории сверхтекучести не являлась актуальной до тех пор, пока достоверно не было установлено, что ядро нейтронной звезды содержит сверхтекучую фазу, обусловленную куперовским спариванием нуклонов [10]. Параметры нейтронных звезд (размером порядка 10 км, плотностью внутреннего жидкого ядра порядка 10^{14} – 10^{15} г/см^3) таковы, что отношение гравитационного радиуса к радиусу звезды достигает порядка единицы, т.е. нейтронные звезды имеют сильное гравитационное поле и при их рассмотрении необходимо учитывать релятивистские эффекты. Высокая плотность ядра нейтронной звезды приводит и к тому, что фермиевская скорость нуклонов, а также скорость звука становятся порядка скорости света c. Все это обусловило необходимость рассмотрения релятивистских уравнений теории сверхтекучести с одним конденсатом. Эволюция двойной звезды может вследствие аккреции привести к сосуществованию и взаимодействию двух релятивистских сверхтекучих фаз с разными параметрами порядка в случае, если двойная звезда состоит из нейтронных звезд и для описания этого процесса необходимо использовать уравнения двухконденсатной релятивистской теории сверхтекучести. Нерелятивистские сверхтекучие системы, в которых могут сосуществовать два и более типов конденсатов, рассмотрены в [7,11–18]. В [7,19,20] получены уравнения для описания многоконденсатной релятивистской сверхтекучей системы. Исторически так сложилось, что в двухконденсатных теориях сверхтекучести основное внимание уделялось фундаментальным проблемам, а прикладные задачи оставались в тени. Целью настоящей работы является изучение влияния эффекта взаимного увлечения сверхтекучими движениями (драг-эффекта), впервые предсказанного в [13] и рассмотренного для нерелятивистских и релятивистских сверхтекучих растворов в [7,13,14], на характер и скорость звуковых возбуждений в релятивистской квантовой системе, в которой сосуществуют нормальная и две сверхтекучие компоненты (конденсаты). В [21] получены и решены уравнения, описывающие распространение акустических волн в такой системе на основании подхода, развитого в [19] и не учитывающего драг-эффекта. В работе [20] представлен феноменологический вывод уравнений релятивистской теории сверхтекучести с двумя типами конденсатов в бездиссипативном приближении с учетом эффекта взаимного увлечения сверхтекучими движениями. В настоящей работе на основании этих уравнений, используя при этом подход и обозначения в [21], найдем и проанализируем выражения для скоростей звуковых возбуждений в такой системе и сравним их с результатами в [21].

Основные уравнения

Запишем уравнения, описывающие релятивистскую квантовую систему, находящуюся в локально равновесном состоянии ниже критической точки, когда в ней сосуществуют две сверхтекучие компоненты (два конденсата), каждая со своим «газом возбуждений». «Газ возбуждений» имеет плотности ρ_{n1} и ρ_{n2} и соответственно два сохраняющихся тока. Скорости «газа возбуждений» равны, их выравнивает вязкость. Введем такие обозначения: $P(x)$ — давление; $T(x)$ — температура; $\mathbf{v}_n(x)$ — нормальная скорость; $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ — химические потенциалы; $E(x)$ — плотность энергии; $g(x)$ — плотность импульса; ρ_1 , ρ_2 — плотности масс составляющих системы. Конденсаты описываются комплексными скалярными параметрами порядка — эффективными волновыми функциями

$$\psi_1(x^\mu) = \eta_1(x^\mu) \exp\,[i\alpha_1(x^\mu)]\ ,$$
$$\psi_2(x^\mu) = \eta_2(x^\mu) \exp\,[i\alpha_2(x^\mu)]. \tag{1}$$

Две сверхтекучие скорости $\mathbf{v}_{s1}$ и $\mathbf{v}_{s2}$ связаны с фазами соответствующих волновых функций таким образом, что в отсутствие вихрей имеем

$$\mathbf{v}_{s1} = \nabla\, \alpha_1(x)\ , \qquad \mathbf{v}_{s2} = \nabla\, \alpha_2(x). \tag{2}$$

Выбираем $c = 1$, $\hbar = 1$ и лоренц-метрику

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{ik} \end{pmatrix}.$$

Запишем необходимые нам в дальнейшем уравнения [20]. Два уравнения непрерывности имеют вид

$$\nabla_\mu\, j_1^\mu = 0, \qquad \nabla_\mu\, j_2^\mu = 0. \tag{3}$$

Здесь введены четырехмерные обозначения $j^\mu = (\rho,\, \mathbf{j})$:

$$j_1^\mu = j_{11}^\mu + j_{21}^\mu = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_1}\right) v_1^\mu + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_3}\right) v_2^\mu + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_4}\right) w^\mu\ ,$$

$$j_2^\mu = j_{12}^\mu + j_{22}^\mu = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\right) v_2^\mu + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_3}\right) v_1^\mu + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_5}\right) w^\mu,$$

где четырехмерные векторы определены следующим образом:

$$v_{1\nu} = (\mu_1 + \mathbf{v}_{s1}\cdot\, \mathbf{v}_n,\, -\mathbf{v}_{s1}),$$
$$v_{2\nu} = (\mu_2 + \mathbf{v}_{s2}\cdot\, \mathbf{v}_n,\, -\mathbf{v}_{s2}), \tag{4}$$
$$w_\nu = (T + \mathbf{v}_n\cdot\, \mathbf{w}\ ,\, -\mathbf{w}).$$

В силу инвариантности давление P можно представить как

$$P = \Psi(I_1,\, I_2,\, I_3,\, I_4,\, I_5,\, I_6), \tag{5}$$

где

$$I_1 = \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu} v_{1\mu} v_{1\nu}\ , \quad I_2 = \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu} v_{2\mu} v_{2\nu}\ ,$$
$$I_3 = g^{\mu\nu} v_{1\mu} v_{2\nu}\ , \qquad I_4 = g^{\mu\nu} v_{1\mu} w_\nu\ ,$$
$$I_5 = g^{\mu\nu} v_{2\mu} w_\nu\ , \qquad I_6 = \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} \omega_\mu w_\nu\ .$$

Тогда

$$\frac{\partial\Psi}{\partial I_1} = \rho_{11}\ , \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial I_2} = \rho_{22}$$

и

$$\rho_{12} = \rho_{21} = \frac{\partial\Psi}{\partial I_3}$$

— три независимые величины, которые появляются в трехскоростной релятивистской гидродинамике вместо плотностей сверхтекучих частей, причем величины $\rho_{12} = \rho_{21}$ описывают драг-эффект. Плотность «газа возбуждений» составляющих частей системы представим в виде

$$\frac{\partial\Psi}{\partial I_4} = \rho_1 - \rho_{11} - \rho_{21} = \rho_{n1}\ ,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial I_5} = \rho_2 - \rho_{22} - \rho_{12} = \rho_{n2}\ .$$

Величина

$$\frac{\partial\Psi}{\partial I_6} = s$$

определяет плотность энтропии. Вектор **w** введен в соответствии с выражением

$$\mathbf{g} = \rho_{11}\mathbf{v}_{s1} + \rho_{22}\mathbf{v}_{s2} + s\mathbf{w} + \rho_{21}\mathbf{v}_{s1} + \rho_{12}\mathbf{v}_{s2} \; . \quad (6)$$

Уравнение сохранения энтропии имеет следующий вид:

$$\nabla_\mu (S^\mu) = 0 \; , \quad (7)$$

где $S^\mu = (s, s\mathbf{v}_n)$ есть плотность 4-потока энтропии, которая определяется как

$$S^\mu = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_4}\right) v_1^\mu + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_5}\right) v_2^\mu + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_6}\right) w^\mu \; .$$

Закон сохранения энергии–импульса определяется уравнением

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0, \quad (8)$$

где

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\Psi}{\partial I_1} v_1^\mu v_1^\nu + \frac{\partial\Psi}{\partial I_2} v_2^\mu v_2^\nu + \frac{\partial\Psi}{\partial I_3}(v_1^\mu v_2^\nu + v_1^\nu v_2^\mu) +$$

$$+ \frac{\partial\Psi}{\partial I_4}(v_1^\mu w^\nu + v_1^\nu w^\mu) + \frac{\partial\Psi}{\partial I_5}(v_2^\mu w^\nu + v_2^\nu w^\mu) +$$

$$+ \frac{\partial\Psi}{\partial I_6} w^\mu w^\nu - g^{\mu\nu} P. \quad (9)$$

Уравнения для скоростей сверхтекучих компонент

$$\nabla_\mu v_{1\nu} - \nabla_\nu v_{1\mu} = 0, \; \nabla_\mu v_{2\nu} - \nabla_\nu v_{2\mu} = 0 \quad (10)$$

вместе с уравнением

$$s^\mu (\nabla_\mu w_\nu - \nabla_\nu w_\mu) = 0 \quad (11)$$

содержат условия rot $\mathbf{v}_{s1} = 0$, rot $\mathbf{v}_{s2} = 0$. Выполняются следующие термодинамические соотношения:

$$dP = j_1^\mu dv_{1\mu} + j_2^\mu dv_{2\mu} + s^\mu dw_\mu \; , \quad (12)$$

$$dE = v_{1\mu} dj_1^\mu + v_{2\mu} dj_2^\mu + w_\mu ds^\mu \; . \quad (13)$$

Звуки

Ищем решение системы уравнений (1)–(13) для акустических процессов в линейном приближении. Верхними индексами «0» и «1» будем обозначать соответственно равновесные значения величин и малые отклонения от равновесных значений. Примем, что равновесные значения величин не зависят от координат и времени. Кроме того, будем предполагать, что:

в равновесном состоянии сверхтекучие и нормальная компоненты имеют одинаковую скорость:

$$w^{0\nu} = v_1^{0\nu} = v_2^{0\nu} \; ;$$

в линейном приближении $w^{1\nu}$, $v_1^{1\nu}$, $v_2^{1\nu}$ ортогональны $w^{0\nu}$:

$$w_\nu^0 w^{1\nu} = w_\nu^0 v_1^{0\nu} = w_\nu^0 v_2^{0\nu} = 0 \; .$$

После линеаризации уравнений и исключения производных от $w^{1\nu}$, $v_1^{1\nu}$, $v_2^{1\nu}$ получаем систему из трех уравнений, описывающую распространение звуковых возбуждений:

$$\begin{gathered}\partial_v^2 \varepsilon^1 + \Theta P^1 = 0; \\ \partial_v^2 s^1 + \beta\Theta P^1 + \alpha_1 \Theta \mu_1^1 + \alpha_2 \Theta \mu_2^1 = 0; \\ \partial_v^2(\rho_1^1 + \rho_2^1) + \nu \partial_v^2 s^1 + \frac{\rho_1^0}{\mu_1^0}\,\Theta\,\mu_1^1 + \frac{\rho_2^0}{\mu_2^0}\,\Theta\,\mu_2^1 = 0.\end{gathered} \quad (14)$$

Здесь ε — инвариантная плотность энергии, определяемая равенством $\varepsilon \equiv v_\nu^0 v_\mu^0 T^{\nu\mu}$;

$$\partial_v^2 \equiv v_\nu^0 \partial^\nu, \; \Theta \equiv (g_{\nu\mu} - v_\nu^0 v_\mu^0)\, \partial^\nu \partial^\mu \; ;$$

$$\beta \equiv \frac{s^0\sigma_1(\rho_{11}^0 + \rho_{12}^0) + s^0\sigma_2(\rho_{22}^0 + \rho_{21}^0)}{(\rho_1^0 + \rho_2^0)(T^0 s^0 + \mu_1^0\rho_{n1}^0 + \mu_2^0\rho_{n2}^0)} \; ;$$

$$\sigma_1 \equiv 1 - \frac{\rho_{n1}^0}{\rho_1^0} \; ; \; \sigma_2 \equiv 1 - \frac{\rho_{n2}^0}{\rho_2^0} \; ; \; \nu \equiv -\frac{\rho_{n1}^0 + \rho_{n2}^0}{s^0};$$

$$\alpha_1 \equiv -\frac{s^0(\rho_{11}^0 + \rho_{12}^0)}{\mu_1^0(\rho_1^0 + \rho_2^0)}\left[1 + \frac{\mu_1^0(\rho_{11}^0 + \rho_{12}^0 + \rho_{21}^0 + \rho_{22}^0)}{T^0 s^0 + \mu_1^0\rho_{n1}^0 + \mu_2^0\rho_{n2}^0}\right];$$

$$\alpha_2 \equiv -\frac{s^0(\rho_{21}^0 + \rho_{22}^0)}{\mu_2^0(\rho_1^0 + \rho_2^0)}\left[1 + \frac{\mu_2^0(\rho_{11}^0 + \rho_{12}^0 + \rho_{21}^0 + \rho_{22}^0)}{T^0 s^0 + \mu_1^0\rho_{n1}^0 + \mu_2^0\rho_{n2}^0}\right].$$

Рассмотрим решение системы (14) в виде плоских волн (все термодинамические величины изменяются по закону exp $(ik^\nu x_\nu)$, где k^ν — четырехмерный волновой вектор). В качестве независимых переменных выбираем P, μ_1 , μ_2 . Из условия совместимости системы (14) получаем дисперсионное уравнение относительно волнового вектора k, определяющее квадрат скорости звука, которое после громоздких преобразований можно свести к следующему виду:

$$
k^6 - k^4\left\{\frac{\frac{\partial T}{\partial s}s^2(\rho_{11}+2\rho_{12}+\rho_{22})(Ts+\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2)}{\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2}+\left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}\right)+\frac{(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}\rho_{21})\left(\mu_1\rho_1\frac{\partial\mu_1}{\partial\rho_2}+\mu_2\rho_2\frac{\partial\mu_2}{\partial\rho_1}\right)}{\sigma_1^2(\rho_1-\rho_{n1})+\sigma_2^2(\rho_2-\rho_{n2})+\rho_1\rho_2\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial\rho_1}+\frac{\partial\mu_2}{\partial\rho_2}\right)}\right\}+
$$

$$
+k^2\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}\right)\frac{\frac{\partial T}{\partial s}s^2(\rho_{11}+2\rho_{12}+\rho_{22})(Ts+\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2)}{\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2}+\left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}\right)\frac{(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}\rho_{21})\left(\mu_1\rho_1\frac{\partial\mu_1}{\partial\rho_2}+\mu_2\rho_2\frac{\partial\mu_2}{\partial\rho_1}\right)}{\sigma_1^2(\rho_1-\rho_{n1})+\sigma_2^2(\rho_2-\rho_{n2})+\rho_1\rho_2\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial\rho_1}+\frac{\partial\mu_2}{\partial\rho_2}\right)}+\right.
$$

$$
\left.+\left[\frac{\frac{\partial T}{\partial s}s^2(\rho_{11}+2\rho_{12}+\rho_{22})(Ts+\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2)}{\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2}\right]\left[\frac{(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}\rho_{21})\left(\mu_1\rho_1\frac{\partial\mu_1}{\partial\rho_2}+\mu_2\rho_2\frac{\partial\mu_2}{\partial\rho_1}\right)}{\sigma_1^2(\rho_1-\rho_{n1})+\sigma_2^2(\rho_2-\rho_{n2})+\rho_1\rho_2\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial\rho_1}+\frac{\partial\mu_2}{\partial\rho_2}\right)}\right]\right\}+
$$

$$
+\left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon}\right)\left[\frac{\frac{\partial T}{\partial s}s^2(\rho_{11}+2\rho_{12}+\rho_{22})(Ts+\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2)}{\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2}\right]\left[\frac{(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}\rho_{21})\left(\mu_1\rho_1\frac{\partial\mu_1}{\partial\rho_2}+\mu_2\rho_2\frac{\partial\mu_2}{\partial\rho_1}\right)}{\sigma_1^2(\rho_1-\rho_{n1})+\sigma_2^2(\rho_2-\rho_{n2})+\rho_1\rho_2\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial\rho_1}+\frac{\partial\mu_2}{\partial\rho_2}\right)}\right]=0\ , \tag{15}
$$

если, как и в [21], сделать предположение, что

$$
\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial\rho_i}{\partial T}<<1,\qquad \frac{T}{\mu_i}<<1,\qquad \left[1-\frac{\partial P}{\partial\varepsilon}\frac{\partial s}{\partial\mu_i}\right]<<1, \tag{16}
$$

$$
\frac{T}{\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2}\,\frac{\frac{\partial P}{\partial\varepsilon}\frac{\partial P}{\partial T}}{\left(1+\frac{T_s}{\mu_1+\mu_2}\right)}<<1\ .
$$

Это уравнение имеет корни

$$
\kappa_1^2=\left(\frac{\partial P}{\partial\varepsilon}\right) \tag{17}
$$

— квадрат скорости первого звука;

$$
\kappa_2^2=\left[\frac{\frac{\partial T}{\partial s}s^2(\rho_{11}+2\rho_{12}+\rho_{22})(Ts+\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2)}{\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2}\right] \tag{18}
$$

— квадрат скорости второго звука;

$$
\kappa_3^2=\left[\frac{(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}\rho_{21})\left(\mu_1\rho_1\frac{\partial\mu_1}{\partial\rho_2}+\mu_2\rho_2\frac{\partial\mu_2}{\partial\rho_1}\right)}{\sigma_1^2(\rho_1-\rho_{n1})+\sigma_2^2(\rho_2-\rho_{n2})+\rho_1\rho_2\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial\rho_1}+\frac{\partial\mu_2}{\partial\rho_2}\right)}\right] \tag{19}
$$

— квадрат скорости третьего звука.

Чтобы выяснить характер колебаний в полученных звуковых модах, рассмотрим зависимость между термодинамическими переменными в звуковой волне. Для этого подставим в линеаризованные уравнения (3), (7)–(13) выражения для переменных в виде плоских волн и после исключения ρ_1^1, ρ_2^1 , μ_1^1 и μ_2^1 получим следующие связи между P^1, T^1, $v_1^{1\nu}k_\nu$, $v_2^{1\nu}k_\nu$ и $w^{1\nu}k_\nu$:

$$k_u P^1 = -\kappa^2 (w_n^0 w^{1\nu} k_\nu + w_{s1}^0 v_1^{1\nu} k_\nu + w_{s2}^0 v_2^{1\nu} k_\nu) ,$$

$$w^{1\nu} k_\nu = \frac{1}{w_n^0} \left(\frac{a\kappa^2 + 1}{b\kappa^2 - 1} \right) (w_{s1}^0 v_1^{1\nu} k_\nu + w_{s2}^0 v_2^{1\nu} k_\nu) ,$$

$$k_u T^1 = -\kappa^2 \frac{(\rho_{n1}^0 + \rho_{n2}^0)}{(\rho_1^0 + \rho_2^0)} \times \tag{20}$$

$$\times \left(\frac{w_{s1}^0 v_1^{1\nu} k_\nu}{\rho_{11}^0 + \rho_{12}^0} + \frac{w_{s2}^0 v_2^{1\nu} k_\nu}{\rho_{21}^0 + \rho_{22}^0} - \frac{w_n^0 w^{1\nu} k_\nu}{\rho_{n1}^0 + \rho_{n2}^0} \right) ,$$

где

$$k_u \equiv w_\nu^0 k^\nu , \qquad \omega_n \equiv Ts + \mu_1 \rho_{n1} + \mu_2 \rho_{n2} ;$$

$$\omega_{s1} \equiv \mu_1 (\rho_{11} + \rho_{12}), \qquad \omega_{s2} \equiv \mu_2 (\rho_{21} + \rho_{22}),$$

$$a \equiv \frac{1}{s} \left(\frac{\rho_{n1}^0}{\rho_{s1}^0} + \frac{\rho_{n2}^0}{\rho_{s2}^0} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_P - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial P} \right)_T ,$$

$$b \equiv \frac{1}{s} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_P - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial P} \right)_T .$$

Подставляя в (20) выражение (17) для скорости первого звука, отбрасывая, согласно (16), малые члены, находим

$$P^1 \simeq -\left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right)_T \left[\frac{(\rho_1^0 + \rho_2^0) w_n^0}{k_u (\rho_{n1}^0 + \rho_{n2}^0)} \right] w^{1\nu} k_\nu , \; T^1 \simeq 0, \tag{21}$$

$$\frac{\omega_{s1}^0}{\rho_{11}^0 + \rho_{12}^0} v_1^{1\nu} k_\nu + \frac{\omega_{s2}^0}{\rho_{21}^0 + \rho_{22}^0} v_2^{1\nu} k_\nu \simeq \frac{\omega_n^0}{\rho_{n1}^0 + \rho_{n2}^0} w^{1\nu} k_\nu .$$

Отсюда следует, что волны первого звука представляют собой малые колебания плотности и давления и аналогичны волнам обычного звука, в которых колебания температуры отсутствуют, а из последнего уравнения вытекает, что в волне первого звука сверхтекучая «жидкость» колеблется как целое, а нормальная и сверхтекучие компоненты движутся вместе. Далее, подставив в (20) выражение (18) для скорости второго звука и отбросив малые члены, получим

$$T^1 \simeq \frac{s^2}{k_u} \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right) \left(\frac{\omega_{1s}^0}{\rho_{s1}^0} v_1^{1\nu} k_\nu + \frac{\omega_{2s}^0}{\rho_{s2}^0} v_2^{1\nu} k_\nu \right) \left[1 + \frac{Ts}{\mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2} \right],$$

$$P^1 \simeq 0, \tag{22}$$

$$\frac{\omega_{s1}^0}{\rho_{11}^0 + \rho_{12}^0} v_1^{1\nu} k_\nu + \frac{\omega_{s2}^0}{\rho_{21}^0 + \rho_{22}^0} v_2^{1\nu} k_\nu \simeq -\frac{\omega_n^0}{\rho_{n1}^0 + \rho_{n2}^0} w^{1\nu} k_\nu .$$

Следовательно, в волнах второго звука испытывают колебания температура и энтропия, колебаний давления нет, а нормальная и сверхтекучие компоненты в волнах второго звука движутся навстречу друг другу. Аналогично, подставив в (20) выражение (19) для скорости третьего звука, находим выражения

$$\rho_1^1 \rho_2^1 \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial \rho_2} + \frac{\partial \mu_2}{\partial \rho_1} \right) \simeq \left(\mu_1^0 \rho_1^0 \frac{\partial \mu_1}{\partial \rho_1} + \mu_2^0 \rho_2^0 \frac{\partial \mu_2}{\partial \rho_2} \right) \left(\frac{\omega_{1s}^0}{\rho_{s1}^0} v_1^{1\nu} k_\nu + \frac{\omega_{2s}^0}{\rho_{s2}^0} v_2^{1\nu} k_\nu \right) ,$$

$$k_u \mu_1^1 \simeq \frac{\left(\rho_1^0 \frac{\partial \mu_1}{\partial \rho_1} \right) \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \omega_n^0}{(\alpha_1 + \alpha_2)\beta} w^{1\nu} k_\nu \right)}{\left[\sigma_1^2 (\rho_1^0 - \rho_{n1}^0) + \sigma_2^2 (\rho_2^0 - \rho_{n2}^0) + \rho_1^0 \rho_2^0 \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \mu_2}{\partial \rho_2} \right) \right]} , \tag{23}$$

$$k_u \mu_2^1 \simeq \frac{\left(\rho_2^0 \frac{\partial \mu_2}{\partial \rho_2} \right) \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \omega_n^0}{(\alpha_1 + \alpha_2)\beta} w^{1\nu} k_\nu \right)}{\left[\sigma_1^2 (\rho_1^0 - \rho_{n1}^0) + \sigma_2^2 (\rho_2^0 - \rho_{n2}^0) + \rho_1^0 \rho_2^0 \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \mu_2}{\partial \rho_2} \right) \right]} ,$$

из которых следует, что третий звук представляет собой колебания плотностей и химических потенциалов.

Рассмотрим распространение волн четвертого звука, которые возникают в системе, когда нормальная компонента заторможена. При линеаризации системы (1)–(13) в этом случае необходимо учитывать, что вследствие заторможенности нормальной компоненты $w^1_\nu = 0$ и лишь две термодинамические переменные являются независимыми. Опуская громоздкие выкладки, запишем сразу выражения для квадратов скоростей четвертого звука:

$$\kappa^2_{4_1} = \frac{\rho_{11}(1+\rho_1\sigma_1\xi_1)}{\mu_1\rho_1\left(\dfrac{\partial\rho_1}{\partial P} - \xi_1\dfrac{\partial\rho_1}{\partial T}\right)} + \frac{2\rho_{12}\rho_{21}(1+\rho_2\sigma_2\xi_2)}{\mu_2\rho_2^2\left(\dfrac{\partial\rho_1}{\partial P} - \xi_2\dfrac{\partial\rho_2}{\partial T}\right)}, \quad (24)$$

$$\kappa^2_{4_2} = \frac{\rho_{22}(1+\rho_2\sigma_2\xi_2)}{\mu_2\rho_2\left(\dfrac{\partial\rho_2}{\partial P} - \xi_2\dfrac{\partial\rho_2}{\partial T}\right)} + \frac{2\rho_{12}\rho_{21}(1+\rho_1\sigma_1\xi_1)}{\mu_1\rho_1^2\left(\dfrac{\partial\rho_2}{\partial P} - \xi_1\dfrac{\partial\rho_1^2}{\partial T}\right)},$$

где

$$\xi_1 \equiv \frac{\sigma_1\left(\dfrac{\partial\rho_1}{\partial P}\right) + \rho_1\left(\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial P}\right)}{\sigma_1\left(\dfrac{\partial\rho_1}{\partial T}\right) + \rho_1\left(\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial T}\right)}, \quad \xi_2 \equiv \frac{\sigma_2\left(\dfrac{\partial\rho_2}{\partial P}\right) + \rho_2\left(\dfrac{\partial\sigma_2}{\partial P}\right)}{\sigma_2\left(\dfrac{\partial\rho_2}{\partial T}\right) + \rho_1\left(\dfrac{\partial\sigma_2}{\partial T}\right)}, \quad (25)$$

и выражение

$$k_u T^1 \simeq \frac{\xi_1(\rho_{11}+\rho_{12})\mu_1}{1+\alpha_1\sigma_1(\rho_{11}+\rho_{12})} v^1_{1\nu} k^\nu + \frac{\xi_2(\rho_{21}+\rho_{22})\mu_2}{1+\alpha_2\sigma_2(\rho_{21}+\rho_{22})} v^1_{2\nu} k^\nu, \quad (26)$$

из которого следует, что волны четвертого звука представляют собой колебания температуры, энтропии и плотностей в ситуации, когда нормальная компонента заторможена.

Обсуждение результатов

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. Драг-эффект не влияет ни на характер, ни на величину скорости волн первого звука. Его наличие также не изменяет характера колебаний волн второго, третьего и четвертых звуков, но вследствие эффекта изменяются скорости распространения этих звуков. Сравнение полученных выше выражений для скоростей с аналогичными результатами в [21], где драг-эффект не учитывался, позволяет сделать вывод о том, что вследствие этого эффекта квадрат скорости волны второго звука увеличивается на величину

$$\kappa^2_{2d} = 2\rho_{12}\left[\frac{\dfrac{\partial T}{\partial s}s^2(Ts+\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2)}{\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2}\right],$$

а квадрат скорости волны третьего звука уменьшается:

$$\kappa^2_{3d} = (\rho_{12}\rho_{21}) \times \left[\frac{\left(\mu_1\rho_1\dfrac{\partial\mu_1}{\partial\rho_2} + \mu_2\rho_2\dfrac{\partial\mu_2}{\partial\rho_1}\right)}{\sigma_1^2(\rho_1-\rho_{n1}) + \sigma_2^2(\rho_2-\rho_{n2}) + \rho_1\rho_2\left(\dfrac{\partial\mu_1}{\partial\rho_1} + \dfrac{\partial\mu_2}{\partial\rho_2}\right)}\right].$$

Отношение κ величины вклада драг-эффекта в квадрат скорости звука κ^2_d к величине квадрата скорости звука κ^2_n, вычисленной без учета драг-эффекта, для второго звука имеет вид

$$\kappa_2 \equiv \frac{\kappa^2_{d2}}{\kappa^2_{n2}} = \frac{\rho_{12}+\rho_{21}}{\rho_{11}+\rho_{22}},$$

а для третьего звука это отношение равно

$$\kappa_3 \equiv \frac{\kappa^2_{d3}}{\kappa^2_{n3}} = \frac{\rho_{12}\,\rho_{21}}{\rho_{11}\,\rho_{22}},$$

т.е. влияние драг-эффекта на величину скоростей зависит от отношения плотности увлечения $\rho_{12} = \rho_{21}$ к плотностям ρ_{11} и ρ_{22}.

Скорости волн четвертых звуков сответственно изменяются на

$$\frac{2\rho_{12}\rho_{21}(1+\rho_2\sigma_2\xi_2)}{\mu_2\rho_2^2\left(\dfrac{\partial\rho_1}{\partial P} - \xi_2\dfrac{\partial\rho_2}{\partial T}\right)} \quad \text{и} \quad \frac{2\rho_{12}\rho_{21}(1+\rho_1\sigma_1\xi_1)}{\mu_1\rho_1^2\left(\dfrac{\partial\rho_2}{\partial P} - \xi_1\dfrac{\partial\rho_1}{\partial T}\right)},$$

а κ для каждой из скоростей определяются следующими соотношениями:

$$\kappa_{4_1} = \frac{2\rho_{12}\rho_{21}\mu_1\rho_1}{\rho_{11}\rho_2\mu_2\rho_2}\left(\frac{1+\rho_2\sigma_2\xi_2}{1+\rho_1\sigma_1\xi_1}\right)\frac{\left(\dfrac{\partial\rho_1}{\partial P} - \xi_2\dfrac{\partial\rho_2}{\partial T}\right)}{\left(\dfrac{\partial\rho_1}{\partial P} - \xi_1\dfrac{\partial\rho_1}{\partial T}\right)},$$

$$\kappa_{4_2} = \frac{2\rho_{12}\rho_{21}\mu_2\rho_2}{\rho_{22}\rho_1\mu_1\rho_1}\left(\frac{1+\rho_1\sigma_1\xi_1}{1+\rho_2\sigma_2\xi_2}\right)\frac{\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial P}-\xi_1\frac{\partial\rho_1}{\partial T}\right)}{\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial P}-\xi_2\frac{\partial\rho_2}{\partial T}\right)}\,.$$

При отсутствии драг-эффекта ($\rho_{12} = \rho_{21} = 0$) вышеперечисленные поправки обращаются в нуль и выражения для скоростей совпадают с соответствующими результатами, полученными в [21].

Таким образом, наличие в системе эффекта взаимного увлечения сверхтекучими компонентами не изменяет ни числа, ни характера колебаний звуковых возбуждений системы, но приводит к изменению скоростей второго, третьего и четвертых звуков.

Автор благодарит П. И. Фомина за полезную дискуссию.

1. W. Israel, *Phys. Lett.* **86A**. 79 (1981).
2. В. В. Лебедев, И. М. Халатников, *ЖЭТФ* **83**, 1601 (1982).
3. А. Ф. Прозоркевич, С. А. Смолянский, В. А. Самородов, *ТМФ* **52**, 292 (1982).
4. П. И. Фомин, В. Н. Шадура, *ДАН УССР*, Сер. А, №6 (1985).
5. С. И. Вильчинский, *ЖЭТФ* **5**, 106 (1994).
6. Ю. Власов, *ЖЭТФ* **4**, 111 (1997).
7. Н. Н. Боголюбов (мл.), М. Ю. Ковалевский, А. М. Курбатов, С. В. Пелетминский, А. Н. Тарасов, *УФН* **159**, 585 (1991).
8. B. Carter and I. M. Khalatnikov, *Phys. Rev.* **D45**, 4536 (1992).
9. B. Carter and D. Langlois, *Phys. Rev.* **D51**, 5855 (1995).
10. P. Anderson D. Pines, J. Shahan, and M. Alpar, *Prog. Theor. Phys.* **69**, 376 (1980).
11. И. М. Халатников, *ЖЭТФ* **32**, 653 (1957).
12. В. П. Минеев, *ЖЭТФ* **67**, 155 (1974).
13. А. Ф. Андреев, Е. П. Башкин, *ЖЭТФ* **69**, 319 (1975).
14. М. Ю. Ковалевский, Н. М. Лавриненко, *ФНТ* **8**, 341 (1982).
15. И. Н. Адаменко, Ю. М. Полуэктов, *ФНТ* **8**, 458 (1982).
16. С. И. Шевченко, *ФНТ* **4**, 663 (1978).
17. Г. Е. Воловик, *ЖЭТФ* **143**, 67 (1978).
18. В. Л. Покровский, И. М. Халатников, *Письма в ЖЭТФ* **23**, 310 (1976).
19. С. И. Вильчинский, П. И. Фомин, *ФНТ* **21**, 729 (1995).
20. S. I. Vil'chinskiy, *Physica Scripta* (1999) (to be publ.).
21. С. И. Вильчинский, П. И. Фомин, *ФНТ* **24**, 8, (1998).

On the influence of drag effect on acoustic modes in two-condensate relativistic superfluid systems

S. I. Vil'chinskiy

Equations of velocities of acoustic excitations in a relativistic two-condensate superfluid system are derived with due account of reciprocal drag of superfluid motions (drag effect). The influence of the drag effect on acoustic modes in the system is considered. It is shown that the effect does not influence the nature of acoustic excitation oscillations but produces changes in the velocities of the second, third and fourth sounds.