

## Взаимное влияние квантованных вихрей и тепловых импульсов в сверхтекучем гелии

Л. П. Кондаурова, С. К. Немировский, М. В. Недобойко

*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН  
Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 1  
E-mail: nemirov@otani.thermo.nsk.su*

Статья поступила в редакцию 17 ноября 1998 г., после переработки 16 февраля 1999 г.

На основе уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности численно исследована задача об эволюции мощных тепловых импульсов в He II, взаимодействующих с квантованными вихрями, порожденными этими импульсами. С целью изучения нелинейных эффектов исходные уравнения разложены с точностью до второго порядка по амплитудам импульсов. Рассмотрен одномерный случай при отсутствии переноса массы (второй звук). Начальное зарождение вихрей моделировалось генерирующим членом в уравнении Вайнена. Представлены результаты по динамике импульсов в различных температурных областях. Показано, что теория Фейнмана–Вайнена применима в области фазового перехода.

На основі рівнянь гідродинаміки надплинної турбулентності чисельно досліджено задачу про еволюцію потужних теплових імпульсів в He II, що взаємодіють з квантованими вихорями, спричиненими цими імпульсами. З метою вивчення нелінійних ефектів вихідні рівняння розкладено з точністю до другого порядку по амплітудам імпульсів. Розглянуто одновимірний випадок при відсутності переносу маси (другий звук). Начальне зародження вихорів моделювалося генеруючим членом в рівнянні Вайнена. Надано результати по динаміці імпульсів в різних температурних областях. Показано, що теорію Фейнмана–Вайнена можна застосовувати в області фазового переходу.

PACS: 67.40.–w

### Введение

Одним из проявлений квантовых эффектов в сверхтекучем гелии является существование квантовой турбулентности. Под этим термином понимается совокупность хаотических квантованных нитей (вихревой клубок), которые образуются при превышении некоторого критического значения потока (или противотока) сверхтекучего гелия. С тех пор как Фейнманом [1] была описана эволюция плотности вихревых нитей, до настоящего времени интерес физиков к этому объекту не ослабевает. Большинство экспериментальных методов исследования сверхтекучей турбулентности (СТ) гидродинамические: зондирование первым и вторым звуками, измерение гидродинамических параметров, потоков тепла и массы и т.д. С другой стороны, все известные способы создания СТ также являются гидродинамическими. Это генерация СТ потоком, или противото-

ком, звуковыми волнами и т.д., т.е. имеется взаимное влияние гидродинамических величин и параметров вихревого клубка друг на друга.

В начале восьмидесятых годов появилась серия работ по изучению взаимодействия интенсивных волн второго звука с вихревым клубком, индуцированным этим звуком. Одними из первых обнаружили несоответствие с теорией нелинейных волн Comings et al. [2], Луцет и др. [3], Turner [4]. Результаты этих работ косвенно указывали на возникновение вихревой структуры. Немировский и Цой [5] выполнили проверку этих предположений. Ими было показано, что вихревой клубок (ВК) развивается в объеме жидкости по мере прохождения импульса, а не на ударном фронте, как считалось ранее. Аналогичный эксперимент был проведен Torczynskii [6], который также убедительно продемонстрировал возникновение ВК в объеме жидкости.

В другой серии экспериментов по исследованию интенсивных коротких тепловых импульсов наблюдалось вскипание гелия. Согласно модели двухжидкостной гидродинамики Ландау, даже для очень мощных тепловых импульсов  $100 \text{ Вт/см}^2$  возмущение температуры  $\delta T$  не превышает  $0,05\text{--}0,1 \text{ К}$  (см. Халатников [7] и Паттерман [8]). Этого возмущения температуры недостаточно для достижения кривой фазового равновесия «жидкость–пар». Вскипание He II исследовалось, например, в работах Van-Sciver [9], Цоя и Луцета [10], Miklaev et al. [11], Сидыганова и др. [12], Ruppert et al. [13], Danil'chenko et al. [14] и др. Эти эксперименты также косвенно указали на возникновение вихревой структуры, радикально меняющей гидродинамические свойства сверхтекучего гелия.

Для количественного описания вышеупомянутых экспериментов следует принимать во внимание влияние СТ на динамику гидродинамических переменных. Учет этого влияния приводит к весьма существенным изменениям гидродинамических характеристик, что, в свою очередь, воздействует на динамику вихревого клубка. Последовательный подход к этой проблеме дает так называемая гидродинамика сверхтекучей турбулентности (ГСТ), которая объединяет «обычную» двухскоростную гидродинамику сверхтекучего гелия (см., например, [7]) и макроскопическую феноменологическую теорию вихревого клубка. Феноменологическая теория динамики вихревого клубка, изложенная в терминах плотности вихревых нитей  $L(t)$ , была создана Фейнманом и Вайненом. Согласно этой теории, предполагается, что динамика величины  $L$  определяется самой величиной  $L$  и удовлетворяет так называемому уравнению Вайнена [15]:

$$\frac{dL}{dt} = \alpha_v |\mathbf{W}| L^{3/2} - \beta_v L^2,$$

где  $\mathbf{W} = \mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s$ , а  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{V}_n$ ,  $\mathbf{V}_s$  — относительная, нормальная и сверхтекучая скорости соответственно;  $\alpha_v$ ,  $\beta_v$  — феноменологические коэффициенты. Рост величины  $L$  связан с действием силы Магнуса, а ее уменьшение — с процессом перезамыкания (реконнекции) вихревых линий, который приводит к каскадному дроблению колец и к дальнейшему превращению их в тепловые возбуждения. В теории Вайнена имеется проблема, связанная с временем образования вихревого клубка  $\tau_v$ . Если вслед за Вайненом определим  $\tau_v$  как время, необходимое для развития плотности вихревых нитей до своего половинного значения  $L_\infty/2 = \alpha_v^2 W^2 / 2\beta_v^2$ , соответствующего ста-

онарному случаю, то из уравнения Вайнена получим

$$\tau_v = \int_0^{L_\infty/2} \frac{dL}{\alpha_v |\mathbf{W}| L^{3/2} - \beta_v L^2}.$$

Этот интеграл расходится на нижнем пределе, т.е.  $\tau_v \rightarrow \infty$ . Происхождение этой расходимости обусловлено тем, что уравнение Вайнена, будучи уравнением баланса между ростом и распадом уже существующего клубка, не несет никакой информации о первоначальном возникновении вихрей. Эксперименты, проведенные в [16], показывают, что  $\tau_v$  (естественно, конечное) является функцией приложенного противотока. Эмпирически найденная зависимость имеет следующий вид:  $\tau_v = a(T) W^{-3/2}$ . Чтобы исправить возникшую сложность, Вайнен предложил ввести так называемый генерирующий член, учитывающий механизм начального зарождения вихревого клубка  $\gamma |\mathbf{W}|^{5/2}$ , где  $\gamma$  — некоторая сильно зависящая от температуры величина. Включение этого генерирующего члена в уравнение позволило удовлетворительно описать экспериментальные результаты для малых тепловых потоков.

Дальнейший шаг в построении макроскопической теории был предпринят в восьмидесятых годах, когда феноменологическая теория Фейнмана и Вайнена была включена в двухскоростную гидродинамику сверхтекучего гелия. Тремя различными методами: феноменологическим (Немировский — Лебедев [17]), вариационным (Guerst [18]) и стохастическим (Jamada et al. [19]) получена замкнутая система уравнений, описывающая гидродинамику сверхтекучего турбулентного гелия. Эта система, по сути, объединяет классические уравнения двухскоростной гидродинамики и уравнение Вайнена и является достаточно громоздкой. Даже в упрощенном случае, когда исследуется только второй звук, эта задача решалась в основном численно. Попытка аналитического описания была предпринята одним из соавторов этой работы Немировским (см. [20]), который качественно и даже полуколичественно объяснил многие результаты, а также механизмы, которые приводят к тем или иным эффектам. Численные решения этих уравнений приводятся в ряде работ, посвященных исследованию вскипания сверхтекучего гелия, а также динамике температурных импульсов. Так, в [21–23] для описания распространения тепловых импульсов небольшой амплитуды, когда плотность вихревого клубка успевает подстраиваться под изменения гидродинамических параметров, решались

линеаризованные уравнения ГСТ. В частности, в [21] была получена зависимость времени вскипания He II от мощности теплового потока, которая хорошо описывает эксперименты в [9]. Однако в вышеупомянутых работах используется приближение, которое предполагает, что начальное развитие вихревого клубка не оказывает влияния на протекающие процессы. В результате в приведенных расчетах уравнение Вайнена не используется целиком.

Более интересным является случай распространения теплового импульса мощной амплитуды (см. экспериментальные работы [24–28]), для описания которого необходимо учитывать всю динамику вихревого клубка, кроме того, становятся также существенными нелинейные искажения и поэтому в уравнениях ГСТ необходимо учитывать члены второго порядка малости. Соответствующие расчеты были выполнены Fiszdon et al. (Göttingen, FRG), Немировским и др. (Новосибирск, СССР), Murakami, Iwashita (Tsukuba, Japan). Среди них следует выделить работы геттингенской группы, в которых вычисления дополнены экспериментальными измерениями.

Fiszdon et al. в [25,29] подробно исследовали влияние различных факторов, о котором ранее развитая теория ГСТ не могла дать однозначного ответа: влияние дрейфовой скорости ВК, генерирующего члена в уравнении Вайнена и т.д. Поскольку на сегодняшний день неизвестно, каким образом происходит начальное зарождение вихревого клубка, при исследовании динамики тепловых импульсов используются два подхода: а) считается, что в объеме гелия уже существует некоторая фоновая плотность ВК, и тогда при описании экспериментальных данных используется уравнение баланса для  $L$ ; б) предполагается, что, согласно некоторому (в настоящее время неизвестному) механизму, ВК развивается в объеме He II, и это развитие описывается введенным Вайненом в уравнение для  $L$  генерирующим членом. Так, в [25,29], в частности, выяснено, что предложенное Вайненом выражение для генерирующего члена очень мало и не приводит к каким-либо существенным изменениям в динамике импульса, поэтому авторы выбрали другой путь, предполагая, что в объеме гелия уже существует начальная плотность вихревого клубка (ПВК). Следует заметить, что для удовлетворительного описания экспериментальных данных авторы [25,29] пользовались при расчетах подгоночными параметрами, такими как задание начального уровня ПВК, выбор граничных условий, варьирование параметров в уравнении Вайнена.

Уравнения ГСТ численно также исследовались Murakami и Iwashita [23]. В отличие от цитированных выше работ геттингенской группы они не разлагали систему уравнений ГСТ по степеням отклонения от равновесия. Однако такой подход требует знания зависимости термодинамических величин от  $W^2$ , которые известны только в первом порядке, что и использовалось ими в полных уравнениях. Результаты этих работ количественно близки друг к другу.

Несмотря на то что взаимодействие импульсов второго звука и ВК численно и аналитически исследовали довольно интенсивно, ряд проблем остается нерешенным. В частности, температурная область, в которой коэффициент нелинейности второго звука отрицателен или принимает нулевое значение, вообще выпала из рассмотрения, хотя, как отмечалось выше, существуют соответствующие эксперименты [27,28]. Так, например, Goldner et al. [28] наблюдали поведение нелинейных импульсов второго звука вблизи  $\lambda$ -точки, которое значительно отличается от динамики тепловых импульсов в низкотемпературной области. И непонятно, было ли это связано со сверхтекучей турбулентностью либо с близостью к  $T_\lambda$  и, следовательно, с характерными особенностями, присущими данной области. Между тем это важно с точки зрения применимости теории Фейнмана–Вайнена вблизи области фазового перехода. Кроме того, вопрос о начальном зарождении вихревой структуры в объеме He II по-прежнему остается открытым.

В связи с вышесказанным мы сделали попытку прояснить некоторые моменты в описании накопленного экспериментального материала. Нами были выведены уравнения ГСТ во втором приближении по отклонению  $W$ ,  $L$ ,  $T$  от их равновесных значений. Однако, как оказалось, они несколько отличаются от уравнений, приведенных в работах [25,29]. Именно, как будет показано ниже, в уравнениях гидродинамики, используемых в [25], опущены несколько существенных членов разложения. В связи с этим нами была решена задача о распространении тепловых разрывов небольшой интенсивности в условиях отсутствия вихревого клубка. Найденная формула для скорости распространения этих тепловых разрывов совпала с известной формулой Халатникова [7], что подтверждает правильность наших уравнений. С помощью же уравнений, предложенных в [25], подобное решение не может быть получено. Это обстоятельство побудило нас еще раз провести численные расчеты для интерпретации экспериментальных данных в [25].

Итак, в первой части настоящей работы приведен вывод уравнений ГСТ во втором приближении для случая плоской геометрии при условии отсутствия переноса массы, а также дано решение задачи о распространении возмущения температуры конечной амплитуды в безвихревом гелии. Во второй части статьи представлены результаты численного решения методом «распада разрывов» (метод Годунова [30]) полученной системы уравнений, с помощью которой описывается распространение мощных тепловых импульсов в различных температурных областях невозмущенного гелия; параллельно исследовано влияние генерирующего члена в уравнении Вайнена на динамику температурного импульса.

### 1. Уравнения гидродинамики сверхтекучей турбулентности

Полученные различными авторами уравнения ГСТ несколько отличаются друг от друга. Однако при описании эволюции мощных тепловых импульсов эти различия оказываются несущественными. Выпишем систему уравнений, выведенную при использовании феноменологического метода построения ГСТ [17]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} (S \mathbf{V}_n) = \frac{1}{T} [\alpha_1 L W^2 + \varepsilon_\beta \beta L^2], \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_s}{\partial t} + \nabla \left( \mu(p, \sigma, \mathbf{W}) + \frac{\mathbf{V}_s^2}{2} \right) = \\ = \frac{\alpha_1 L}{\rho_s} \mathbf{W} + \frac{\varepsilon_\beta \alpha}{\rho_s} L^{3/2} \frac{\mathbf{W}}{|\mathbf{W}|}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\pi_{ik} + \tau_{ik})}{\partial r_k} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{V}_L L = \chi_1 \frac{B \rho_n}{\rho} |\mathbf{W}| L^{3/2} - \chi_2 \kappa L^2. \quad (5)$$

В соотношениях (1)–(5) использованы следующие обозначения:  $S = \rho \sigma$  ( $\sigma$  – энтропия на единицу массы);  $\rho = \rho_s + \rho_n$  ( $\rho$ ,  $\rho_s$ ,  $\rho_n$  – плотность жидкости, сверхтекучая и нормальная плотности жидкости соответственно);  $\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{V}_n + \rho_s \mathbf{V}_s$ ;  $\pi_{ik} = \rho_n \mathbf{V}_{ni} \mathbf{V}_{nk} + \rho_s \mathbf{V}_{si} \mathbf{V}_{sk} + p \delta_{ik}$ ;

$$\begin{aligned} \tau_{ik} = -\eta \left( \frac{\partial \mathbf{V}_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial \mathbf{V}_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial \mathbf{V}_{nl}}{\partial r_l} \right) - \\ - \delta_{ik} [\xi_1 \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{V}_n) + \xi_2 \operatorname{div} \mathbf{V}_n]; \end{aligned}$$

$$\sigma_T = \partial \sigma / \partial T, \quad \sigma_{TT} = \partial^2 \sigma / \partial T^2; \quad \alpha = \chi_1 B \rho_n / 2\rho;$$

$$\alpha_1 = A \rho_s \rho_n \beta^2 / \alpha^2; \quad \beta = \kappa \chi_2 / 2\pi; \quad \varepsilon_\beta = \rho_s \kappa^2;$$

$A = \chi_1^2 \pi B^3 \rho_n^2 m_{\text{He}} / 6 \chi_2^2 \rho^3 h$  – постоянная Гортера–Меллинка;  $V_L$  – скорость вихревого клубка;  $\chi_1, \chi_2$  – параметры в уравнении Вайнена;  $B$  – коэффициент Холла–Вайнена;  $\kappa = 2\pi\hbar/m_{\text{He}}$  – квант циркуляции.

Далее, полагая  $\sigma = \sigma_o + \sigma'$ ,  $T = T_o + T'$  ( $T'$ ,  $\sigma'$  – отклонения от равновесных значений) и используя известные соотношения  $\sigma(p, T, \mathbf{W}) = \sigma(p, T) + 1/2 \mathbf{W}^2 \partial(\rho_n/\rho)/\partial T$  и  $d\mu = -\sigma dT + dp/\rho - (\rho_n/\rho) \mathbf{W} d\mathbf{W}$ , получаем систему уравнений в предположении отсутствия потока массы ( $\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{V}_n + \rho_s \mathbf{V}_s = 0$ , что выполнялось при проведении рассматриваемых нами экспериментов) во втором порядке по отклонениям в случае плоской геометрии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t'} - \left( \frac{\sigma_o (\rho + \rho_n)}{\sigma_T \rho_n \rho} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} - \frac{\rho_s}{\rho} \right) \mathbf{W}' \frac{\partial T'}{\partial \mathbf{x}'} - \\ - \frac{\rho_s}{\rho} \left( \frac{\sigma_o \sigma_{TT}}{\sigma_T^2} - 1 \right) T' \frac{\partial \mathbf{W}'}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{\sigma_o \rho_s}{\sigma_T \rho} \frac{\partial \mathbf{W}'}{\partial \mathbf{x}'} = \\ = \frac{1}{\rho \sigma_T T_o} (\alpha_1 L W'^2 + \varepsilon_\beta \beta L^2); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{W}'}{\partial t'} + \frac{\rho_s}{2\rho} \left( 3 - \frac{\sigma_o}{\sigma_T \rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right) \frac{\partial \mathbf{W}'^2}{\partial \mathbf{x}'} + \frac{\rho \sigma_o}{\rho_n} \frac{\partial T'}{\partial \mathbf{x}'} + \\ + \frac{\rho \sigma_T}{2\rho_n} \frac{\partial T'^2}{\partial \mathbf{x}'} = - \frac{\rho \alpha_1}{\rho_s \rho_n} L W' - \frac{\rho \varepsilon_\beta \alpha}{\rho_s} L^{3/2} \frac{\mathbf{W}'}{|\mathbf{W}'|}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t'} - \frac{\rho_n}{\rho} \frac{\partial \mathbf{W}' L}{\partial \mathbf{x}'} = \chi_1 \frac{B \rho_n}{\rho} |\mathbf{W}'| L^{3/2} - \chi_2 \kappa L^2. \quad (8)$$

В (6)–(8) учтено, согласно имеющимся в настоящее время измерениям [31], что  $\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_s$ .

Как видно, эти уравнения не совпадают с приведенными в работах [25,29]. А именно, в уравнении для скорости  $\mathbf{W}'$  отсутствуют члены

$$\frac{\rho \sigma_T}{\rho_n} \frac{\partial T'^2}{\partial x'^2} \text{ и } - \frac{\sigma_o \rho_s}{2\sigma_T \rho \rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \frac{\partial W'^2}{\partial x'^2},$$

для температуры  $T'$  — члены

$$\left( \frac{\sigma_o}{\sigma_T \rho_n} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} + \frac{\sigma_o}{\sigma_T \rho} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right) W' \frac{\partial T'}{\partial x'}$$

и

$$\left( 1 - \frac{\sigma_o \sigma_{TT} \rho_s}{\sigma_T^2 \rho} \right) T' \frac{\partial W'}{\partial x'}$$

Для проверки справедливости полученных уравнений рассмотрим распространение возмущения конечной амплитуды в безвихревом гелии. Найдем, с какой скоростью  $c_2$  движется точка, соответствующая заданному отклонению  $T'$  от равновесной температуры. В одномерном случае все параметры движения, происходящего с постоянной амплитудой, подчиняются соотношению  $\partial/\partial t = -c_2(\partial/\partial x)$ . Подставляя данное соотношение в систему уравнений (6), (7), из условия совместности находим

$$c_2 = \left( \frac{\rho_s \sigma_o^2}{\rho_n \sigma_T} \right)^{1/2} + \left[ \frac{3\rho_s}{\rho} - 3\sigma \left( \frac{\partial \rho_n}{\partial T} \right) \frac{1}{2\rho_n \sigma_T} - \frac{\sigma_o \sigma_{TT} \rho_s}{2\sigma_T^2 \rho} \right] W' = c_{20} + \alpha_2 W',$$

где  $c_{20} = \rho_s \sigma_o^2 / \rho_n \sigma_T$ , а  $\alpha_2 = 3\rho_s / \rho - 3\sigma(\partial\rho_n/\partial T)/2\rho_n \sigma_T - \sigma_o \sigma_{TT} \rho_s / 2\sigma_T^2 \rho$  — коэффициент нелинейности второго звука. Если свернуть это выражение, то получим известную формулу Халатникова [7,8]. При температурах выше 1,884 К и в интервале 0,4–0,9 К коэффициент  $\alpha_2 < 0$ , в остальной области  $\alpha_2 > 0$ . В температурных областях, где  $\alpha_2 > 0$ , поверхности разрыва образуются на переднем фронте волны; в области температур, где  $\alpha_2 < 0$ , на заднем фронте волны; при температурах, при которых  $\alpha_2$  принимает нулевое значение, форма импульса не изменяется. Как нетрудно убедиться при рассмотрении системы уравнений, используемой в работах [25,29], данное выражение для скорости второго звука не может быть получено.

Итак, на основе уравнений (6)–(8) методом распада разрывов [30] численно исследуется распространение тепловых импульсов различной

амплитуды и длительности при следующих температурах невозмущенного гелия: 1,4, 1,7 и 1,884 К,  $t = (T_\lambda - T)/T_\lambda = 10^{-5}$ , т.е. в областях, где коэффициент нелинейности второго звука соответственно положителен, отрицателен и равен нулю, а также исследуется влияние генерирующего члена в уравнении Вайнена на динамику температурного импульса.

## 2. Численное исследование динамики мощных тепловых импульсов в различных температурных областях

### 2.1. Распространение мощных тепловых импульсов в области температур, где $\alpha_2 > 0$

Напомним, что в области температур, в которой коэффициент нелинейности второго звука принимает положительные значения, разрывы образуются на переднем фронте волны. В работе [25] получено, что эволюция температуры в точках, удаленных на разные расстояния от нагревателя, имеет разный характер (см. рис. 1,б). Такое поведение импульсов обязано взаимному влиянию ВК и гидродинамических величин. При описании полученных экспериментальных данных, представленных в [25], нами была решена задача при следующих начальных и граничных условиях, которые соответствуют условиям проведения эксперимента: с одного торца длинного канала, заполненного невозмущенным гелием, подается тепловой импульс прямоугольной формы:

$$T'(x') = 0, \quad W'(x') = 0 \text{ при } t' = 0,$$

$$W'(t') = Q/\rho_s T \text{ при } x' = 0, \quad 0 < t' < t_H,$$

$$W'(t') = 0 \text{ при } x' = 0, \quad t' > t_H,$$

где  $Q$  — мощность теплового потока;  $t_H$  — длительность импульса. При исследовании влияния начального уровня ПВК, а также генерирующего члена в уравнении Вайнена на динамику теплового импульса при решении поставленной выше задачи нами использовались два подхода: а) предполагалось, что в начальный момент времени в объеме жидкости уже существует некоторое начальное распределение плотности вихревого клубка  $L(x', t' = 0) = L_0$ , и тогда для описания динамики  $L$  использовалось балансное уравнение Вайнена; б) считалось, что в невозмущенном гелии отсутствует  $L_0$ , а начальное развитие ВК полностью описывается генерирующим членом, т.е. при решении используется уравнение Вайнена с этим добавочным членом.

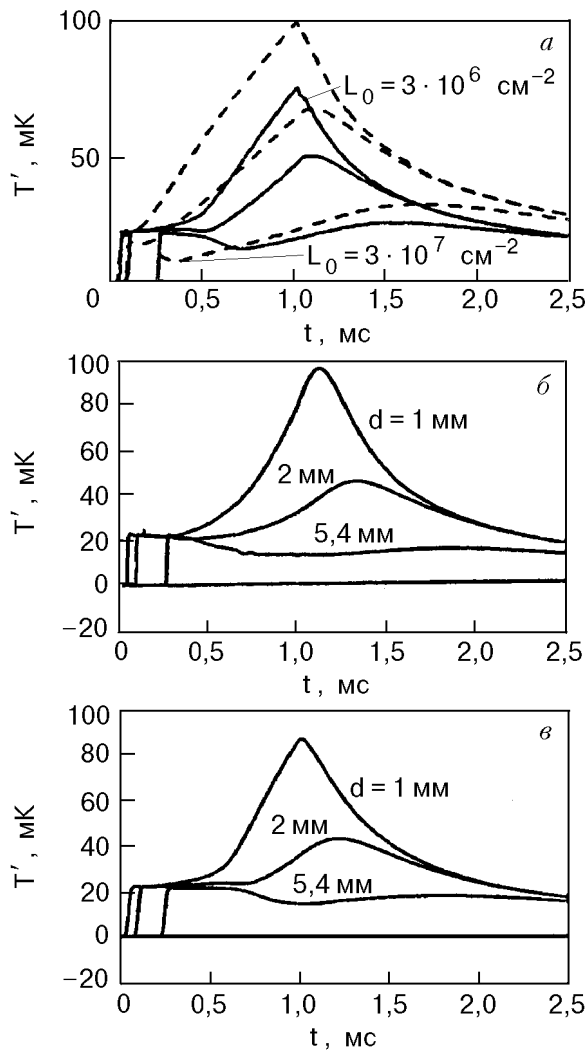


Рис. 1. Эволюция температуры в точках, расположенных на расстояниях 1, 2 и 5,4 мм от нагревателя: наши данные (а), эксперимент [25] (б), расчет [25] (в). Температура невозмущенного гелия  $T_0 = 1,4$  К, тепловой поток  $Q = 5$  Вт/см<sup>2</sup>, длительность импульса  $t_H = 1$  мс.

Случай а). Для нахождения распределения температуры  $T'$ , скорости  $W'$ , плотности вихревого клубка  $L$  как функций времени и координаты в качестве подгоночного параметра мы, как и авторы работы [25], задавали некую величину  $L_0$ . На рис. 1,а приведены результаты численно определенной зависимости температуры от времени в точках, находящихся на расстояниях 1, 2 и 5,4 мм от нагревателя при  $L_0 = 3 \cdot 10^6$  см<sup>-2</sup> (сплошные линии) и  $L_0 = 3 \cdot 10^7$  см<sup>-2</sup> (пунктирные линии) при  $T = 1,4$  К,  $Q = 5$  Вт/см<sup>2</sup>,  $t_H = 1$  мс. На рис. 1,б,в представлены экспериментальные данные и численный расчет [25] при этих же параметрах. Видно, что расчетные кривые, полученные нами (при  $L_0 = 3 \cdot 10^6$  см<sup>-2</sup>) и в работе [25], близки друг к другу: одинаковый характер

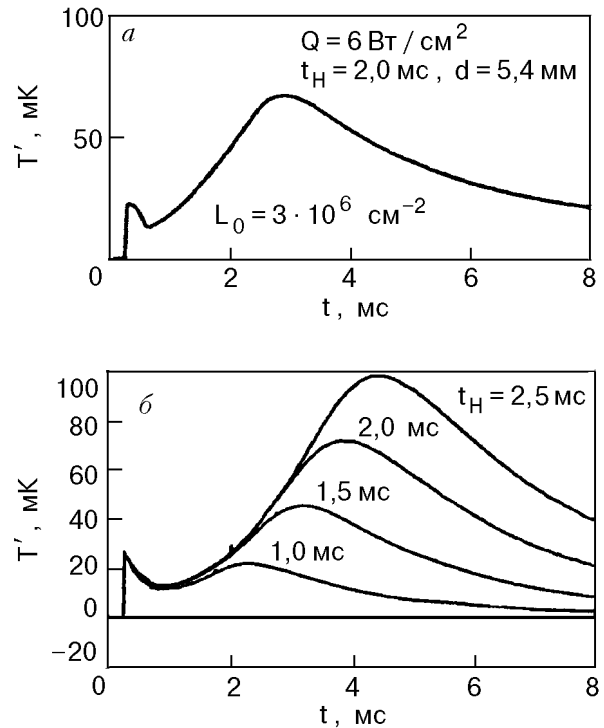


Рис. 2. Зависимость температуры от времени при различных временах нагрева в точке, расположенной на расстоянии 5,4 мм от нагревателя: расчет, наши данные (а), эксперимент [25] (б).

ный вид этих зависимостей, максимумы кривых наблюдаются при одном и том же времени, кривые выходят на одну и ту же асимптотику. Имеется и некоторое отличие: максимумы кривых численно различаются. Обе эти расчетные кривые качественно описывают экспериментальные результаты. Однако положения и численные значения максимумов кривых не совпадают. На рис. 2 показаны экспериментальная [25] и численная, полученная нами, кривые зависимости  $T'(t)$  в точке, расположенной на расстоянии 5,4 мм от нагревателя для теплового импульса амплитудой  $Q = 6$  Вт/см<sup>2</sup> и длительностью  $t_H = 2$  мс при  $L_0 = 3 \cdot 10^6$  см<sup>-2</sup>. При сравнении этих кривых мы замечаем аналогичное расхождение, как и в предыдущем случае, т.е. положения и численные значения максимумов кривых не совпадают. Проанализировав влияние всех диссипативных членов в уравнениях, мы пришли к заключению, что, поскольку диссипация температурного импульса (см. экспериментальную кривую) наблюдается в более поздний момент времени, а значения амплитуды довольно близки друг к другу, расхождение связано, скорее всего, с неточностью определения постоянной Гортера — Меллинка.

Случай б). Варьируя коэффициент  $\gamma$  при  $W'^{5/2}$  в уравнении Вайнена, а именно увеличив

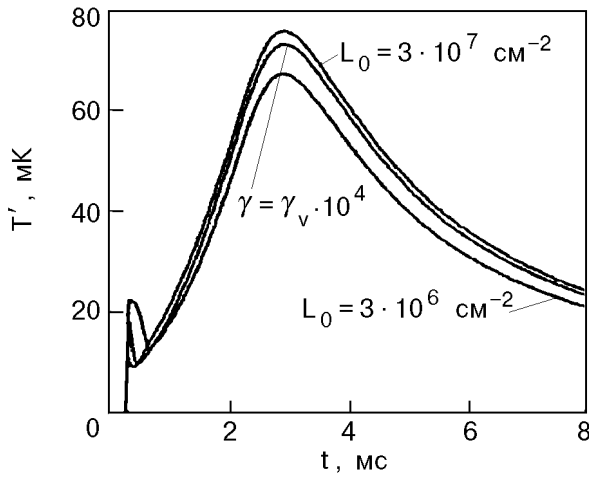


Рис. 3. Сравнение расчетных кривых, полученных при различных подходах к описанию начального развития плотности вихревых нитей. Температура невозмущенного гелия  $T_0 = 1,4$  К, тепловой поток  $Q = 6$  Вт/см<sup>2</sup>, длительность импульса  $t_H = 1$  мс, расстояние от нагревателя  $d = 5,4$  мм.

его значение вплоть до  $10^4$  раз по сравнению с коэффициентом, предложенным Вайненом (поскольку характерное время развития вихревого клубка  $\tau_v$  ведет себя почти как обратный кубический корень теплового потока, это увеличение соответствует приблизительно тридцатикратному уменьшению  $\tau_v$ ), мы получили хорошее согласие расчетных кривых с вышеупомянутыми расчетными кривыми (рис. 3).

Таким образом, численные и экспериментальные кривые согласуются, если в расчетах используется фоновое значение ПВК  $L_0 = 3 \cdot 10^6$  см<sup>-2</sup> или в генерирующем члене коэффициент, превышающий примерно в  $10^4$  раз значение коэффициента, предложенное Вайненом. Конечно, ни одна из этих ситуаций не может соответствовать физической реальности, т.е. оба пути преодоления проблемы начального зарождения вихревых линий в объеме жидкости не привели к разумным физическим результатам. Наличие же в объеме жидкости такой большой фоновой турбулентности, как нам представляется, связано с тем, что в описываемых экспериментах импульсы тепла запускались в периодическом режиме. Поэтому динамика каждого импульса зависит от условий всей серии импульсов, в частности от «скважности» последовательности импульсов. Нужно отметить, что попытки численного расчета на основе периодических условий [25,29] не привели к разумным результатам. Это, по-видимому, объясняется тем, что уравнение Вайнена плохо описывает свободный распад вихревого клубка [32].

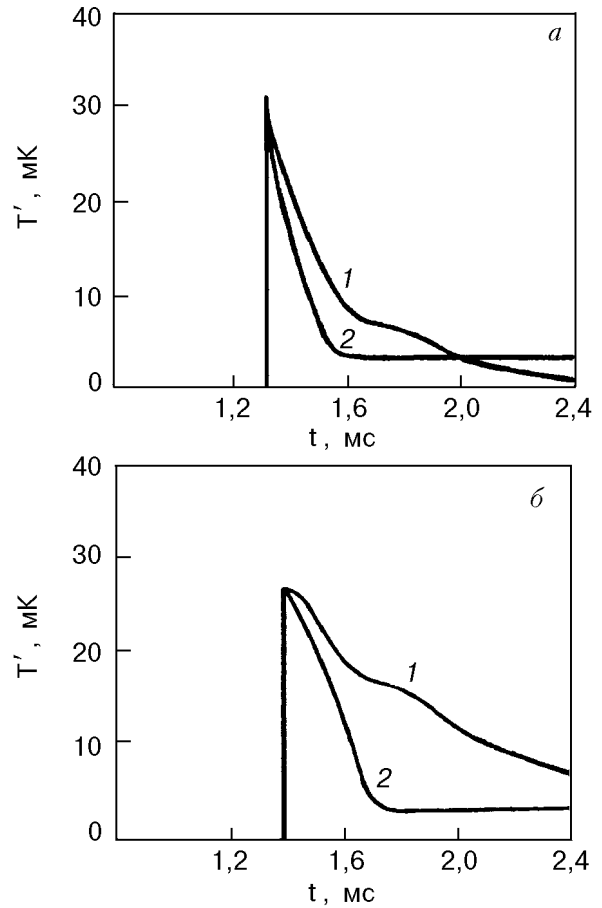


Рис. 4. Сравнение экспериментальных данных [33] (1) и численно полученной зависимости температуры от времени (2):  $Q = 40$  Вт/см<sup>2</sup> (а),  $Q = 20$  Вт/см<sup>2</sup> (б).

Запуск импульсов в периодическом режиме связан с экспериментальными трудностями наблюдения одиночных импульсов. Эта трудная задача была преодолена в работе Shimazaki et al. [33], где авторы наблюдали эволюцию практически одиночных тепловых импульсов. Время ожидания между двумя последовательными импульсами составило 120 с. Этого времени вполне достаточно для распада вихревого клубка. К сожалению, эксперименты в [25] и в [33] невозможно сравнивать, так как они проведены при различных температурах невозмущенного гелия. Авторы работы [33] установили, что время развития вихревого клубка для мощных импульсов второго звука примерно в три раза меньше времени, предложенного Вайненом. Исходя из этого, мы попытались описать эти экспериментальные данные, изменив соответствующим образом генерирующий член. На рис. 4 представлены численные результаты и экспериментальные данные [33] о зависимости температуры от времени для точки, находящейся в 30 мм от нагревателя,

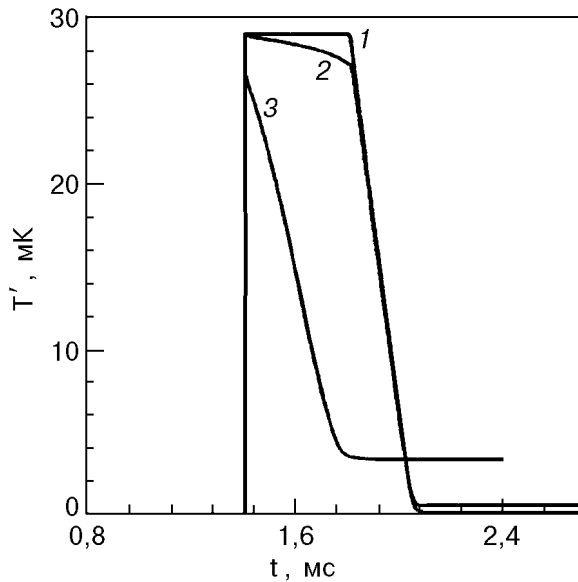


Рис. 5. Расчетные зависимости  $T(t)$ . Температура невозмущенного гелия  $T_0 = 1,7$  К, тепловой поток  $Q = 20$  Вт/см<sup>2</sup>, длительность импульса  $t_H = 0,5$  мс, расстояние от нагревателя  $d = 30$  мм:  $\gamma = \gamma_v$ ,  $L_0 = 0$  (1);  $\gamma = \gamma_v$ ,  $L_0 = 100$  см<sup>-2</sup> (2);  $\gamma = 25\gamma_v$ ,  $L_0 = 0$  (3).

при температуре ванны  $T = 1,7$  К для различных плотностей теплового потока  $Q$  при длительности импульса нагрева  $t_H = 500$  мкс. Как можно видеть, численные и экспериментальные значения амплитуды импульса примерно одинаковы.

Мы также выполнили расчет, используя фоновое значение ПВК  $L_0$ , а также комбинации фонового значения с затравочным членом. На рис. 5 изображены расчетные кривые, полученные при различном сочетании фонового значения  $L_0$  и  $\gamma$ . Как видно, все они значительно отличаются от вышеописанной.

Таким образом, полученные результаты можно рассматривать как доказательство того, что дополнительный, увеличенный, согласно экспериментальным данным [33], генерирующий член описывает начальное зарождение вихревого клубка. Форма импульсов согласуется с остальными коэффициентами в уравнении Вайнена, которые могут быть и другими для мощных тепловых импульсов.

### 2.2. Распространение мощных тепловых импульсов в области отрицательной нелинейности, $\alpha_2 < 0$

Повторим еще раз, что температурная область, в которой коэффициент нелинейности второго звука отрицательный, не рассматривалась ранее в цитируемых выше работах, где проводился численный расчет. Что касается экспериментов, то

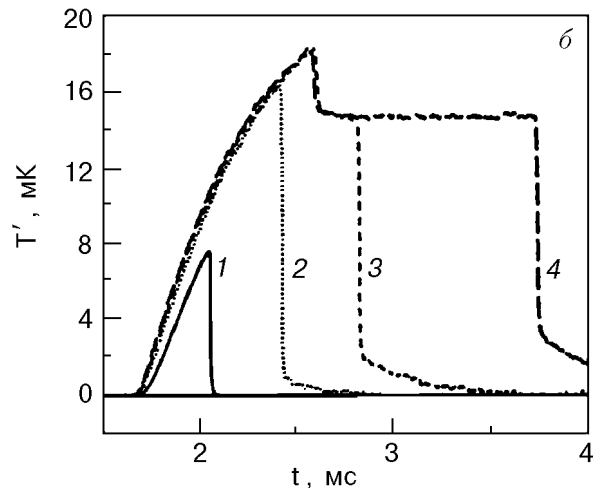
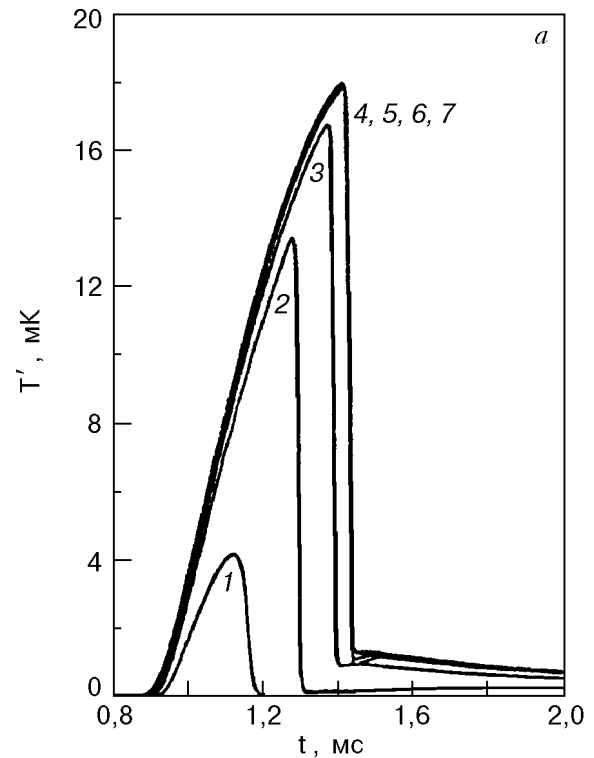


Рис. 6. Численные (а) и экспериментальные [28] (б) результаты:  $T_0/T_\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$  (1). Форма импульса, выделявшегося на нагревателе, представляла собой половину синусоиды частотой  $\nu = 1387$  Гц. Максимумы тепловых потоков  $Q$ , мВт/см<sup>2</sup>: 0,81 (1); 4,01 (2); 8,12 (3); 15,6 (4); 20 (5); 25 (6); 30 (7).

нам известна только одна работа [28], выполненная в области вблизи  $T_\lambda$ ,  $t = 1 - T/T_\lambda = 10^{-5}$ , где  $\alpha_2$  принимает отрицательное значение. В этих экспериментах запускались мощные импульсы второго звука, на заднем фронте которых при достижении регистрирующего датчика, расположенного с обратной стороны канала, успевал образоваться ударный фронт. Как можно видеть (рис. 6, б), экспериментальные зависимости температуры от времени существенно отличаются от



ранее полученных в области положительной нелинейности. Известно, что область вблизи  $T_\lambda$  обладает характерными особенностями, поэтому неясно, чем объясняется такое поведение импульсов: близостью к  $T_\lambda$  или сверхтекучей турбулентностью. Однако это важно с точки зрения применимости вблизи области фазового перехода теории Фейнмана – Вайнена.

Для выяснения этих вопросов нами была решена задача при следующих начальных и граничных условиях, соответствующих условию проведения эксперимента [28]: с одного торца длинного канала, заполненного невозмущенным гелием, подается тепловой импульс, форма которого представляет собой половину синусоиды частотой  $\nu = 2387$  Гц. При проведении численного счета использовалось уравнение Вайнена с добавочным генерирующим членом. Коэффициенты в первых двух членах правой части этого уравнения были найдены при прямой экстраполяции зависимостей  $V$  и термодинамических данных от температуры, согласно [34,35], в область  $T_\lambda$ . Коэффициент же при  $W^{5/2}$  подбирался таким образом, чтобы значения максимумов расчетной и экспериментальной зависимостей  $T'(t')$  для  $Q = 15,6$  мВт/см<sup>2</sup> совпали. На рис. 6,а приведены расчетные кривые зависимости температуры от времени в точке расположения регистрирующего датчика для следующих значений теплового потока:  $Q_1 = 0,81$  мВт/см<sup>2</sup>,  $Q_2 = 4,01$  мВт/см<sup>2</sup>,  $Q_3 = 8,12$  мВт/см<sup>2</sup>,  $Q_4 = 15,6$  мВт/см<sup>2</sup>,  $Q_5 = 20$  мВт/см<sup>2</sup>,  $Q_6 = 25$  мВт/см<sup>2</sup>. Как видно на рисунке, обрыв импульсов, соответствующий разным  $Q$ , происходит при близких временах. Это можно объяснить следующим образом. В рассматриваемой области температур передняя часть импульсов разной амплитуды почти одинакова, поэтому развитие вихревого клубка происходит практически при одних и тех же условиях. Согласно уравнению Вайнена, вначале плотность вихревого клубка нарастает медленно, затем наблюдается ее стремительный рост. Следовательно, примерно за одно и то же время в импульсах разной амплитуды клубок успевает вырасти до значения, которое и приводит к срыву температурного роста. В экспериментах [28] (см. рис. 6,б) также наблюдается обрыв роста температуры для импульсов разной амплитуды примерно при одних и тех же временах. Но дальнейшая зависимость температуры от времени отличается от расчетной. Как уже говорилось выше, форма импульсов зависит от коэффициентов в уравнении Вайнена, которые для мощных тепловых потоков не определены точно. Полученные рас-

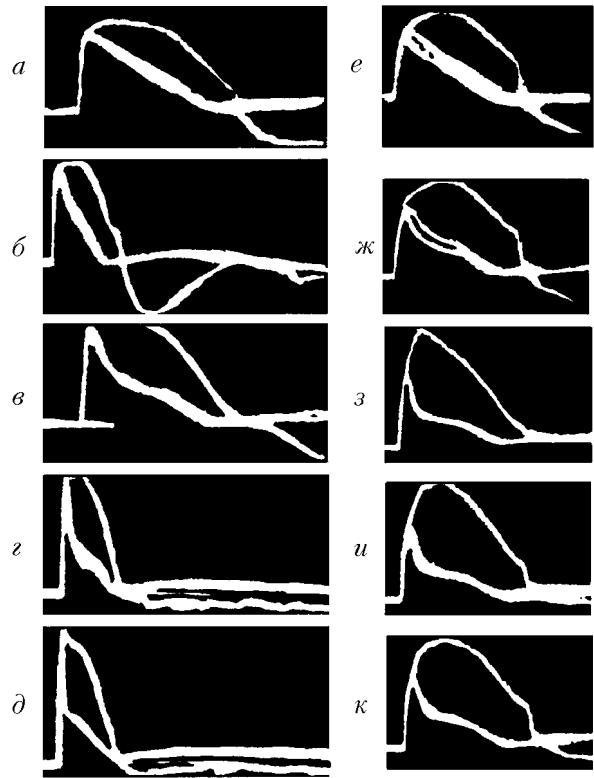


Рис. 7. Осциллограммы волн второго звука [27]. Длительность импульсов  $t_H = 100$  мкс; 20, 50 мкс/дел, расстояние от нагревателя 2,7 (а–д) и 15,1 мм (е–ж);  $Q$ , Вт/см<sup>2</sup>: 21,7 (а), 24,6 (б), 30,3 (в), 37,1 (г), 51,2 (д), 21,7 (е), 24,9 (ж), 30,2 (з), 37,1 (и), 52 (к);

четные кривые только качественно описывают экспериментальные данные. Однако это дает основание сделать заключение, что такое необычное поведение импульсов обусловлено сверхтекучей турбулентностью и уравнение Вайнена применимо в этой области, хотя экстраполяция коэффициентов в область  $T_\lambda$  имеет лишь качественный характер. Кроме того, добавочный генерирующий член в этом уравнении описывает начальное зарождение вихревых линий.

### 2.3. Распространение мощных тепловых импульсов в области температур, где $\alpha_2 = 0$

Численные расчеты при температурах, при которых коэффициент нелинейности принимает нулевое значение, ранее не проводились. Как упоминалось выше, Луцет и Цой [27] экспериментально исследовали динамику мощных тепловых импульсов при температуре ванны  $T = 1,884$  К. На рис. 7 приведены осциллограммы волн второго звука [27]. Заметим, что наблюдаемая экспериментальная зависимость  $T'(t')$  (см. рис. 7) имеет вид кривых, полученных в области отрицательной нелинейности второго звука.

Такое качественное совпадение наблюдаемых зависимостей можно объяснить следующим образом. В своем эксперименте авторы посылали сначала вдоль канала тепловой импульс средней амплитуды, а затем в следе этого импульса запускался второй импульс, динамика которого и исследовалась. Тепловой импульс, распространяющийся первым по каналу, рождал вихревую структуру в объеме гелия и в то же время несколько нагревал его, что приводило к уходу от значения первоначальной температуры гелия 1,884 К в область отрицательной нелинейности. Кроме того, погрешность в определении температуры невозмущенного гелия (см. подробности проведения эксперимента в [27]) также приводит в выводу, что измерения проведены в области отрицательной нелинейности.

Численные расчеты для зависимости температуры от координаты в разные моменты времени

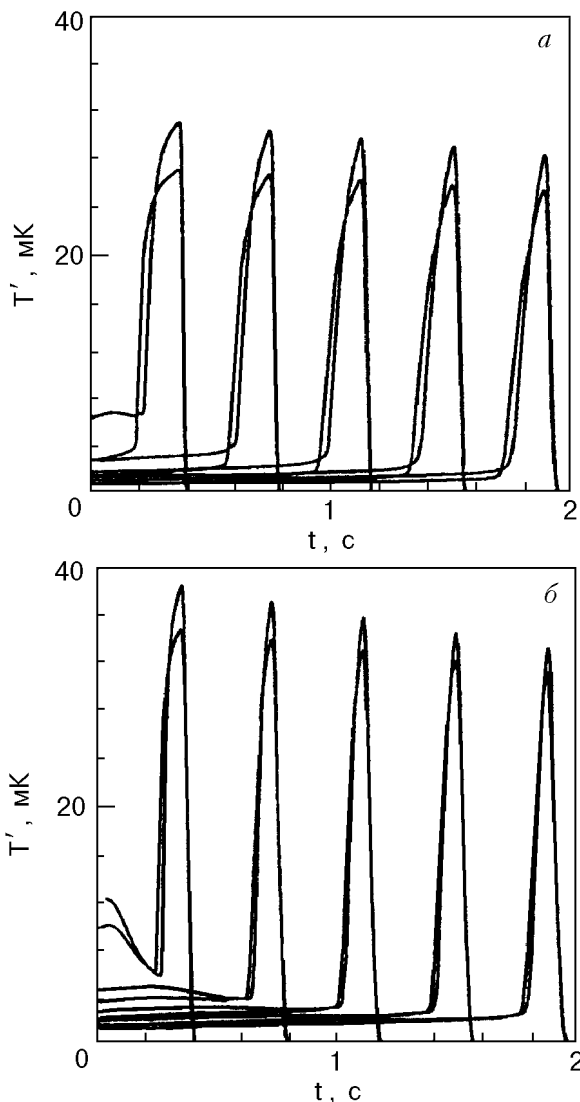


Рис. 8. Распространение теплового импульса вдоль канала,  $Q$ , Вт/см<sup>2</sup>: 30, 35 (а), 40, 45 (б).

представлены на рис. 8 при следующих значениях теплового потока  $Q$ , Вт/см<sup>2</sup>: 30, 35 и 40, 45 и  $t_H = 0,001$  с. Обратим внимание на то, что наличие двух максимумов наблюдается при тепловых потоках 40 и 45 Вт/см<sup>2</sup>, в то время как при меньших тепловых потоках температура монотонно падает. Напомним, что подобное поведение импульсов наблюдается в области, где коэффициент нелинейности положителен.

### Заключение

Проведенные численные исследования в рамках уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности показали, что: а) взаимное влияние параметров вихревого клубка и гидродинамических величин приводит к изменению динамики мощных тепловых импульсов, наблюдаемых в серии экспериментов;

б) введенный Вайненом и дополнительно исправленный, согласно экспериментальным данным [33], генерирующий член описывает начальное развитие вихревых линий в объеме жидкости;

с) теория Фейнмана – Вайнена может быть использована вблизи температуры фазового перехода.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 96-02-19414).

1. R. P. Feynman, *Progress in Low Temperature Physics* **1**, 17, C. J. Gorter (ed.), North-Holland (1955).
2. J. C. Cumming, D. W. Schmidt, and W. J. Wagner, *Phys. Fluids* **21**, 713 (1978).
3. М. О. Луцет, С. К. Немировский, А. Н. Цой, *ЖЭТФ* **81**, 249 (1981).
4. T. N. Turner, *Phys. Fluids* **26**, 3227 (1983).
5. С. К. Немировский, А. Н. Цой, *Письма в ЖЭТФ* **35**, 229 (1982).
6. J. R. Torczynskii, *Phys. Fluids* **27**, 2636 (1984).
7. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
8. С. Паттерман, *Гидродинамика сверхтекучей жидкости*, Мир, Москва (1978).
9. S. W. Van Sciver, *Cryogenics* **19**, 385 (1979).
10. А. Н. Цой, М. О. Луцет, *ИФЖ* **51**, 5 (1984).
11. В. М. Микляев, И. А. Сергеев, Ю. П. Филиппов, *Особенности нестационарной теплопередачи к сверхтекучему гелию*, Препринт ОИЯИ, Р8-87-33, Дубна (1987).
12. В. У. Сидыганов, И. А. Ключников, *V Всесоюз. школа молодых ученых и специалистов «Современные проблемы теплофизики»*, Тез. докл., Новосибирск (1988).
13. U. Ruppert, W. Z. Yang, and K. Luders, *Jpn. J. Appl. Phys.* **26**, Suppl. 26-3 (1987).
14. В. А. Данил'ченко and V. N. Porpshin, *Cryogenics* **23**, 546 (1983).
15. W. F. Vinen, *Proc. R. Soc. London* **A240**, 128 (1957).
16. W. F. Vinen, *Proc. R. Soc. London* **A242**, 493 (1957).
17. С. К. Немировский, В. В. Лебедев, *ЖЭТФ* **84**, 1729 (1983).
18. J. A. Guerst, *Physica* **B154**, 327 (1989).

19. K. Yamada, S. Kashiwamura, and K. Miyake, *Physica* **B154**, 318 (1989).
20. С. К. Немировский, *ЖЭТФ* **64**, 803 (1986).
21. S. K. Nemirovskii, L. P. Kondaurova, and A. Ja. Baltsevich, *Cryogenics* **32**, 47 (1992).
22. D. Gentile and J. Pakleza, *Numer. Heat Transfer* **6**, 317 (1983); *Arch. Mech.* **38**, 585 (1986).
23. M. Murakami and K. Iwashita, *Proc. ICEC* **13**, Butterworths, Guildford, U. K., 340 (1990).
24. W. F. Fiszdon and M. von Schwerdtner, *J. Low Temp. Phys.* **5**, 253 (1989).
25. W. F. Fiszdon, M. von Schwerdtner, G. Stamm, and W. Popper, *J. Fluid Mech.* **212**, 663 (1990).
26. A. Yu. Iznankin and L. P. Mezhev-Deglin, *Proc. 17th Int. Conf. on Low Temperature Physics*, Abstracts, Vol. 1, 71, Elsevier Scientific Publishers B. V., Amsterdam (1984).
27. М. О. Луцет, А. Н. Цой, в кн.: *Кипение и конденсация (Гидродинамика и теплообмен)*, И. И. Гогонин и И. Г. Маленков (ред.), 91, Новосибирск (1986).
28. Lori S. Goldner, N. Mulders, and G. Ahlers, *J. of Low Temp. Phys.* **93**, 131 (1993).
29. W. F. Fiszdon, J. Piechna, and W. A. Poppe, *A qualitative numerical analysis of some features of propagation of counterflow temperature waves in superfluid helium*, MPI Stromungsforsch. Gottingen, Ber. 9 (1988).
30. *Численное решение многомерных задач газовой динамики*, С. К. Годунов (ред.), Наука, Москва (1976).
31. R. T. Wang, C. E. Swanson, and R. J. Donnelly, *Phys. Rev.* **B36**, 5240 (1987).
32. S. K. Nemirovskii and W. Fiszdon, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 37 (1995).
33. T. Shimazaki, M. Murakami, and T. Iida, *Cryogenics* **35**, 645 (1995).
34. C. F. Barenghi and R. J. Donnelly, *J. Low Temp. Phys.* **52**, 189 (1983).
35. K. W. Schwarz, *Phys. Rev.* **B38**, 2398 (1988).

### Mutual influence of quantum vortices and heat pulses in superfluid helium

L. P. Kondaurova, S. K. Nemirovskii,  
and M. V. Nedoboiko

The problem of evolution of strong heat pulses in He II interacting with the pulse-induced quantum vortices is numerically investigated on the basis of the equations of hydrodynamics of superfluid turbulence. For the purpose of studying nonlinear effects the initial equations are expanded to second order in pulse amplitudes. Besides, we restrict ourselves to a one-dimensional case and to a condition of absence of mass transport (second sound). The initiation of quantum vortices was simulated by a generating term in the Vinen equation. The results on the pulse dynamics in various temperature regions are reported. In particular, it is shown that the Phenomenological theory of superfluid turbulence is valid near the lambda-point.