

О вихревой фазе систем со спариванием пространственно разделенных электронов и дырок

С. И. Шевченко, В. А. Безуглый

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины,
Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: shevchenko@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 4 декабря 1998 г.

Возможность возникновения макроскопического количества планарных вихрей с одинаковой циркуляцией в системах со спариванием пространственно разделенных электронов и дырок предсказана недавно [S. I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **B56**, 10355 (1997); *Phys. Rev.* **B57**, 14809 (1998)]. В настоящей работе изучена структура, образованная планарными вихрями в дискообразном образце в магнитном поле, двумерная дивергенция которого отлична от нуля. Найдены полное число вихрей и энергия системы вихрей как функции внешнего магнитного поля и размеров образца. Установлено, что энергия вихревой структуры пропорциональна объему системы, следовательно, вихревое состояние является новой термодинамической фазой рассматриваемой системы (аналогичной фазе Шубникова в обычных сверхпроводниках).

Можливість виникнення макроскопічної кількості планарних вихорів з однаковою циркуляцією в системах із спарюванням просторово розділених електронів і дірок була передказана недавно [S. I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **B56**, 10355 (1997); *Phys. Rev.* **B57**, 14809 (1998)]. У поданій роботі вивчено структуру, що утворена планарними вихорами у дископодібному зразку в магнітному полі, двовимірна дивергенція якого відрізняється від нуля. Знайдено повне число вихорів та енергію системи вихорів як функції зовнішнього магнітного поля та розмірів зразка. Встановлено, що енергія вихрової структури пропорційна об'єму системи, отож, вихровий стан є новою термодинамічною фазою розглянутої системи (аналогічною фазі Шубнікова у звичайних надпровідниках).

PACS: 71.35.-y, 73.40.-c

1. Введение

В последнее время появились экспериментальные работы, посвященные исследованию двухслойных $2D$ электрон-дырочных и электрон-электронных систем, в которых сообщается о наблюдении ряда эффектов, связанных, возможно, с появлением в этих системах спонтанной межслоевой когерентности («конденсаторной» сверхпроводимости). Так, авторы работы [1] интерпретируют возрастание продольного сопротивления трехслойной гетероструктуры $\text{InAs}/\text{GaSb}/\text{AlSb}$ при совпадении плотности электронов в слое InAs с плотностью дырок в слое AlSb как результат образования связанных электрон-дырочных пар. В работе [2] исследовано увлечение электронов одного слоя током электронов другого слоя в системе $\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ в сильном магнитном поле при половинном заполнении низшего уровня Ландау в каждом из слоев. Авторы [2] наблюдали

ряд аномалий в токе увлечения, которые они связали с сильной корреляцией между электронами в соседних слоях. В работах [3,4] исследуется временная эволюция люминесценции непрямых экситонов в двойных квантовых ямах AlAs/GaAs после импульсного лазерного возбуждения в сильных магнитных полях ($B \leq 12$ Тл) при низких температурах ($T \geq 1,3$ К). Авторы [3] наблюдали аномальное увеличение коэффициента диффузии с ростом поля и уменьшением температуры, что было интерпретировано ими как появление сверхтекучести экситонов вследствие их конденсации. Аномально быстрый транспорт непрямых экситонов, обнаруженный в [4], авторы также связывают с появлением сверхтекучести экситонов.

Теоретическому исследованию систем со спонтанными межслоевыми корреляциями посвящено множество работ. Возможность сверхтекучести электрон-дырочных пар в системах со спаривани-

ем пространственно разделенных электронов и дырок (СПРЭД) была предсказана в [5–7] около двадцати лет назад (см. также [8]). В последнее время выполнен ряд теоретических работ [9–30] по изучению влияния сильного однородного магнитного поля на спаривание пространственно разделенных электронов и дырок и на особенности сверхтекучести в таких полях. При этом, однако, осталось незамеченным, что неоднородное магнитное поле может приводить к качественно новым эффектам.

Недавно в работах [31,32] одного из авторов было изучено поведение в магнитном поле систем со СПРЭД ниже точки перехода электрон-дырочных пар в сверхтекучее состояние и показано, что неоднородное магнитное поле, двумерная дивергенция которого ($\text{div}_2 \mathbf{H}$) отлична от нуля, может приводить к появлению в системе макроскопического количества планарных вихрей с одинаковой циркуляцией. Термин планарный вихрь означает такой вихрь, в котором электрон-дырочные пары как целое вращаются в плоскости структуры. Хотя планарные вихри во многом напоминают известные вихри Онзагера – Фейнмана и Абрикосова, в отличие от них они не образуют решетку. В [31,32] показано, что в пределе, когда планарные вихри можно считать непрерывно распределенными, их плотность пропорциональна $\text{div}_2 \mathbf{H}$. Отсюда следует, что полное число планарных вихрей пропорционально потоку магнитного поля через границу образца. Последняя величина пропорциональна периметру системы, а не ее площади, и возникает вопрос, является ли предсказанный эффект появления планарных вихрей в сверхпроводящих системах со СПРЭД поверхностным или объемным. В настоящей работе показано, что этот эффект объемный, и поэтому вихревое состояние является новой термодинамической фазой, аналогичной фазе Шубникова в обычных сверхпроводниках.

Возвращаясь к проблеме экспериментального подтверждения перехода непрямых экситонов в сверхтекучее состояние, необходимо отметить, что в настоящее время существуют сложности при непосредственном измерении проводимости каждого из слоев. В этой связи эффект возникновения планарных вихрей интересен еще и тем, что он может стать прямым доказательством перехода электрон-дырочных пар в сверхтекучее состояние, так как планарные вихри несут магнитный поток [31,32], который может быть обнаружен бесконтактным методом.

В [31,32] было показано, что в магнитном поле энергия сверхпроводящей фазы в системах со СПРЭД определяется выражением

$$E = \int \left[\frac{\hbar^2 n_s}{2M} (\nabla\phi)^2 - \frac{\hbar n_s e d}{Mc} \nabla\phi(\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{z}}) \right] d^2\rho. \quad (1)$$

Здесь n_s – сверхтекучая плотность пар; M – их масса; ϕ – фаза параметра порядка; d – расстояние между слоями с электронной и дырочной проводимостью; $\hat{\mathbf{z}}$ – единичный вектор в направлении нормали к проводящим слоям.

Объясним появление второго слагаемого в выражении (1). В случае, когда электроны и дырки пространственно разделены, электрон-дырочные пары представляют собой систему диполей (см. рис. 1), дипольные моменты которых параллельны (или антипараллельны) оси z . В магнитном поле \mathbf{H} энергия движущегося со скоростью \mathbf{v}_s диполя равна $\mathbf{v}_s(\mathbf{e}d \times \mathbf{H})/c$ (плюс кинетическая энергия $Mv_s^2/2$). И поскольку с интересующей нас степенью точности в этом выражении можно считать скорость \mathbf{v}_s равной $(\hbar/M)\nabla\phi$, получаем искомый результат (после замены \mathbf{d} на $d\hat{\mathbf{z}}$). Именно наличие второго слагаемого в (1) может приводить к появлению макроскопического количества вихрей с одинаковой циркуляцией в сверхпроводящих системах со СПРЭД. Действительно, нетрудно показать, что если поле \mathbf{H} представляет собой двумерный «еж» (т.е. магнитное поле радиально расходится из некоторого центра), то второе слагаемое (при достаточно большой величине H) делает энергетически выгодным появление круговых токов вокруг этого центра. Но ввиду того, что фаза ϕ при обходе по замкнутому контуру может приобретать лишь квантованную добавку $2\pi n$ (где n – целое число), то механизм реализации этих круговых токов состоит в появлении в системе квантованных планарных вихрей с одинаковой циркуляцией.

Ниже, как и в [31,32], мы рассмотрим допускающий точный расчет случай, когда система со СПРЭД помещена во внешнее магнитное поле, создаваемое двумерным круговым током. Будем считать, что электрон-дырочная система представляет собой диск радиусом R , и рассмотрим слу-

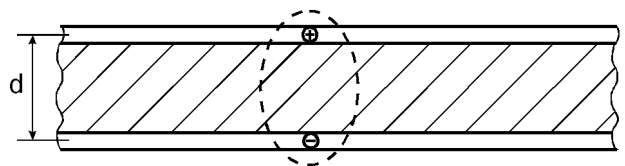


Рис. 1. Электрон-дырочная пара в системе со СПРЭД (схематическое изображение).

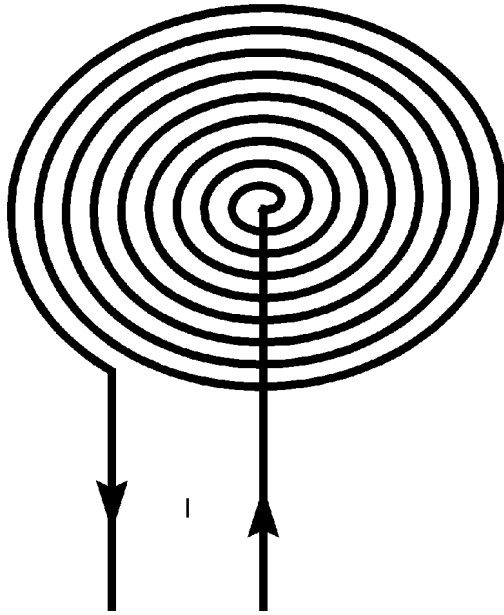


Рис. 2. Схематическое изображение двумерного кругового тока.

чай, когда создающие поле круговые токи циркулируют в плоскости, параллельной плоскости диска, причем ось, вокруг которой они циркулируют, проходит через центр диска (рис. 2). Отметим важные особенности такого магнитного поля. Пусть система круговых токов с постоянной азимутальной составляющей двумерной плотности тока $I = \text{const}$ заполняет круг радиусом R' . Тогда на расстояниях от плоскости протекания токов, много меньших R' , за исключением незначительных областей в центре круга и на его границе, где становятся существенными краевые эффекты, компоненты магнитного поля будут равны $H_\theta = 0$ и $H_\rho = 2\pi I/c = \text{const}$ (рис. 3). Такой ток приводит к появлению компоненты H_z , однако эта компонента не оказывает влияние на величину сверхтекучей скорости. В настоящей работе, как и в [31,32], рассматривается случай $R \ll R'$ (чтобы исключить влияние границы системы круговых токов), а расстояние от плоскости протекания токов до дискообразного образца считается много меньшим R , но много большим d .

С помощью (1) можно показать [31,32], что энергия одиночного вихря, отстоящего от центра диска на расстоянии ρ , будет равна

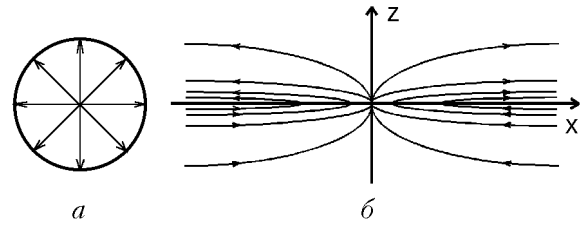


Рис. 3. Магнитное поле тока, изображенного на рис. 2: вид сверху (а), вид в разрезе (б).

$$E_v(\rho) = \frac{\pi \hbar^2 n_s}{M} \left(\ln \frac{R^2 - \rho^2}{R \xi} - \frac{R - \rho}{\lambda} \right), \quad (2)$$

где ξ — размер вихревого кора. Магнитное поле входит в это выражение через длину λ , определяемую соотношением

$$\lambda^{-1} = \frac{4\pi I e d}{\hbar c^2}, \quad (3)$$

где I — двумерная плотность круговых токов.

Полагая, что первый квантованный вихрь возникает в центре диска (т.е. при $\rho = 0$), и приравняв $E_v(0)$ нулю, найдем величину критического тока I_{c1} , начиная с которой появление вихрей в системе становится выгодным. Легко убедиться, что ток I_{c1} удовлетворяет соотношению

$$\lambda_{c1}^{-1} \equiv \frac{4\pi I_{c1} e d}{\hbar c^2} = \frac{1}{R} \ln \frac{R}{\xi}. \quad (4)$$

Этот ток весьма мал. Так, в частном случае, когда расстояние между проводящими слоями $d \approx 10^{-6}$ см и радиус диска $R \approx 1$ см, отвечающее току I_{c1} магнитное поле $H = 2\pi I/c$ порядка 1 Гс.

При $I > I_{c1}$ число вихрей и их распределение в пространстве определяются взаимодействием вихрей как с магнитным полем, так и друг с другом. Из соображений симметрии очевидно, что в магнитном поле круговых токов вихри должны лежать на окружностях, центры которых совпадают с центром диска.

Энергия системы вихрей, в которой радиус i -й окружности равен ρ_i , а число вихрей на этой окружности — N_i , при выполнении неравенства $N_i \gg 1$ дается выражением [31,32]

$$E = \sum_i \left\{ E_v(\rho_i) + \frac{\pi \hbar^2 n_s}{M} \left[2 \sum_{j(<i)} N_j \left(\ln \frac{R}{\rho_i} + \frac{1}{N_i} \ln \frac{1 - \exp(-N_i \ln(R^2/\rho_i \rho_j))}{1 - \exp(-N_i \ln(\rho_i/\rho_j))} \right) - \ln N_i + (N_i - 1) \ln \frac{R}{\rho_i} + \ln \left(1 - \exp \left(-2N_i \ln \frac{R}{\rho_i} \right) \right) - \ln \left(1 - \frac{\rho_i^2}{R^2} \right) \right] \right\} N_i. \quad (5)$$

Отметим, что последнее слагаемое в фигурных скобках этого выражения не учтено в [31,32]. Впрочем, это слагаемое становится существенным лишь в узкой области $R - \rho_i \ll R$ вблизи края диска. При рассмотрении интересующих нас вопросов им можно пренебрегать.

2. Вихревая структура как функция магнитного поля

Важное отличие планарных вихрей от известных вихрей Онзагера—Фейнмана и Абрикосова состоит в том, что образуемая ими структура является пространственно неоднородной. Как мы убедимся ниже, если ток I превосходит первый критический ток I_{c1} , но достаточно близок к нему, энергетически выгодно, чтобы планарные вихри возникали не во всем диске, а лишь вблизи его центра. Интересуясь такими токами, рассмотрим ниже случай, когда $R \gg \rho_i \gg \lambda$. При этом выражение (5) для энергии вихрей существенно упрощается и приобретает следующий вид:

$$E = \frac{\pi \hbar^2 n_s}{M} \sum_i \left\{ \ln \frac{\rho_i}{\xi} - \frac{R - \rho_i}{\lambda} - \ln N_i + (N_i + 2 \sum_{j(<i)} N_j) \ln \frac{R}{\rho_i} - 2 \sum_{j(<i)} \frac{N_j}{N_i} \ln \left[1 - \exp \left(-N_i \ln \frac{\rho_i}{\rho_j} \right) \right] \right\} N_i. \quad (6)$$

Зависимость радиуса i -й окружности ρ_i и числа вихрей на этой окружности N_i от номера i может

быть найдена из условий минимума энергии (6) по отношению к ρ_i и N_i . Первое условие минимума дает

$$\frac{\rho_i}{\lambda} = 2 \sum_{j(\leq i)} N_j - N_i - 1 + 2 \sum_{j(<i)} \frac{N_j}{\exp \{N_i \ln (\rho_i / \rho_j)\} - 1} - 2 \sum_{j(>i)} \frac{N_j}{\exp \{N_j \ln (\rho_j / \rho_i)\} - 1}. \quad (7)$$

А условие минимума энергии E по отношению к числу вихрей N_i приводит к уравнению

$$\frac{R - \rho_i}{\lambda} - \ln \frac{\rho_i}{\xi} = - \ln N_i - 1 + 2 \sum_{j(\leq i)} N_j \ln \frac{R}{\rho_i} + 2 \sum_{j(>i)} N_j \ln \frac{R}{\rho_j} - 2 \sum_{j(<i)} \frac{N_j \ln (\rho_i / \rho_j)}{\exp \{N_i \ln (\rho_i / \rho_j)\} - 1} - 2 \sum_{j(>i)} \ln \left[1 - \exp \left(-N_j \ln \frac{\rho_j}{\rho_i} \right) \right]. \quad (8)$$

Систему уравнений (7) и (8) будет значительно легче анализировать, если написать уравнение, аналогичное (8), для окружности $i + 1$ и вычесть из него уравнение (8). В результате получим

$$\frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\lambda} - \left(2 \sum_{j(\leq i)} N_j - 1 \right) \ln \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} = \ln \frac{N_{i+1}}{N_i} + 2 \sum_{j(<i+1)} \frac{N_j \ln (\rho_{i+1} / \rho_j)}{\exp \{N_{i+1} \ln (\rho_{i+1} / \rho_j)\} - 1} - 2 \sum_{j(<i)} \frac{N_j \ln (\rho_i / \rho_j)}{\exp \{N_i \ln (\rho_i / \rho_j)\} - 1} + 2 \sum_{j(>i+1)} \ln \left[1 - \exp \left(-N_j \ln \frac{\rho_j}{\rho_{i+1}} \right) \right] - 2 \sum_{j(>i)} \ln \left[1 - \exp \left(-N_j \ln \frac{\rho_j}{\rho_i} \right) \right]. \quad (9)$$

Приведем решение системы уравнений (7) и (9). Обозначим два последние слагаемые в правой части (7) как $2S_i$. Тогда уравнение (7) примет вид

$$\frac{\rho_i}{\lambda} = 2 \sum_{j(\leq i)} N_j - N_i - 1 + 2S_i. \quad (10)$$

Предполагая, что функции $N(i)$ и $\rho(i)$ слабо меняются на одном шаге, т.е. $(N_{i+1} - N_i) \ll N_i$ и

$(\rho_{i+1} - \rho_i) \ll \rho_i$, можно показать (см. Приложение 1), что

$$S_i = 2 \left[\left(N_i \frac{d^2 \rho_i}{d i^2} - \frac{N_i}{\rho_i} \left(\frac{d \rho_i}{d i} \right)^2 + \frac{d N_i}{d i} \frac{d \rho_i}{d i} \right) \frac{N_i}{\rho_i} - \frac{d N_i}{d i} \right] \times \exp \left(- \frac{N_i}{\rho_i} \frac{d \rho_i}{d i} \right). \quad (11)$$

Это выражение можно существенно упростить. В [31,32] для дискретной модели было найдено, что $N_i = (\rho_{i+1} - \rho_i)/2\lambda + O(1)$ и $(\rho_{i+1} - \rho_i)^2 \sim \lambda \rho_i$. Такой же вид зависимостей (однако с другим коэффициентом) был получен и в континуальном приближении. Мы воспользуемся этими результатами и запишем их в следующем виде:

$$N_i = \alpha \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{2\lambda} + O(1); \quad (12)$$

$$2 \sum_{j(\leq i)} N_j = \beta N_i^2; \quad (13)$$

$$(\rho_{i+1} - \rho_i)^2 = \gamma \lambda \rho_i. \quad (14)$$

Здесь предполагается, что коэффициенты α , β и γ порядка единицы.

Формула (13) может быть получена из (12) и (14), поэтому коэффициенты α , β и γ связаны между собой. Действительно, из (12) следует, что

$$2 \sum_{j(\leq i)} N_j = 2 \frac{\alpha}{2\lambda} \sum_{j(\leq i)} (\rho_{i+1} - \rho_j) = \alpha \frac{\rho_i}{\lambda},$$

а из (12) и (14) получаем

$$\beta N_i^2 = \beta \alpha^2 \frac{(\rho_{i+1} - \rho_i)^2}{4\lambda^2} = \beta \alpha^2 \frac{\gamma \rho_i}{4\lambda}.$$

Из этой системы уравнений с учетом (13) находим

$$\alpha \beta \gamma = 4. \quad (15)$$

С помощью (12) и (14) можно показать, что в главном приближении справедливы следующие соотношения:

$$\rho_i = \frac{\gamma \lambda}{4} i^2; \quad (16)$$

$$N_i = \frac{\alpha \gamma}{4} i. \quad (17)$$

Для этого достаточно в (14) заменить $(\rho_{i+1} - \rho_i)$ на $d\rho(i)/di$ и решить полученное дифференциальное уравнение. Его решением является выражение (16). Подставив это решение в (12) и отбросив малую добавку, получим формулу (17).

Подставляя (16), (17) в (11) и полученный результат для S_i в (10), найдем первое из уравнений, описывающих структуру системы вихрей (вместо уравнения (7)):

$$\frac{\rho_i}{\lambda} = 2 \sum_{j(\leq i)} N_j - N_i - 1 - \alpha \gamma e^{-\alpha \gamma / 2}. \quad (18)$$

Уравнение (18) существенно проще исходного уравнения (7). Оно содержит две неизвестные константы, одну из которых можно сразу найти. Запишем уравнение (18) для окружности $i + 1$ и вычтем из него уравнение (18) для окружности i . В результате

$$N_{i+1} + N_i = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\lambda}. \quad (19)$$

Отсюда, учитывая медленность изменения N_i с номером i , получаем

$$N_i = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{2\lambda} + O(1). \quad (20)$$

Сравнив (20) с (12), приходим к выводу, что $\alpha = 1$. При этом из (15) следует, что $\beta \gamma = 4$.

Аналогичным образом можно упростить и уравнение (9) (см. Приложение 2). В результате вместо громоздкого уравнения (9) получим

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\lambda} - \left(2 \sum_{j(\leq i)} N_j - 1 \right) \ln \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} = \\ = \ln \frac{N_{i+1}}{N_i} - \frac{\gamma^2}{4N_i} (\gamma - 2) e^{-\gamma/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из системы уравнений (18) и (21) находим уравнение для коэффициента γ (см. Приложение 3):

$$\frac{1}{12} + (\gamma - 4) e^{-\gamma/2} = \frac{1}{\gamma}. \quad (22)$$

Это уравнение может быть решено численно. Оно имеет один корень, который с точностью до второго знака после запятой равен

$$\gamma = 5,55, \quad (23)$$

и соответственно для $\beta = 4/\gamma$ получаем

$$\beta = 0,72. \quad (24)$$

Подставляя (23) в (14), приходим к окончательному выражению, описывающему закон изменения расстояния между соседними окружностями с изменением радиуса окружности:

$$(\rho_{i+1} - \rho_i)^2 = 5,55 \lambda \rho_i. \quad (25)$$

Итак, мы нашли законы изменения радиуса i -й окружности ρ_i и числа вихрей на этой окружности N_i с номером окружности i (выражения (20) и

(25)). Из этих выражений следует, что плотность вихрей на i -й окружности с ростом i уменьшается (поскольку $N_i/2\pi\rho_i \sim (\lambda\rho_i)^{-1/2}$), а из (25) следует, что с ростом i уменьшается также и плотность окружностей (поскольку растет расстояние между соседними окружностями).

Зависимость числа вихрей на окружности от номера этой окружности можно получить явно, учтя в (17) найденные значения α и γ :

$$N_i = 1,4i . \quad (26)$$

Этот результат означает, что с ростом номера i число вихрей на окружности увеличивается в среднем на 1,4 ($N_{i+1} - N_i = 1,4$). Такой парадоксальный, на первый взгляд, результат (ΔN_i — не целое число) получился вследствие того, что при выводе уравнения (8) мы считали переменную N_i непрерывной, что фактически при условиях $N_i \gg 1$ и $\Delta N_i \ll N_i$ является правильным приближением. При переходе от одной окружности к следующей число вихрей будет увеличиваться, конечно, на целое число (1 или 2), и система сама выберет такое чередование $\Delta N_i^{(1)} = 1$ и $\Delta N_i^{(2)} = 2$, которое будет энергетически более выгодным (соответствующий расчет может быть выполнен только численно). При этом непрерывные переменные ρ_i будут незначительно «подстраиваться». В точной формуле (19) учтем эту неопределенность следующим образом:

$$N_{i+1} + N_i \pm 1 = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\lambda} \pm \frac{\Delta(\rho_{i+1} - \rho_i)}{\lambda} .$$

Из этой формулы видно, что величина «подстройки» радиуса одной окружности относительно соседней очень мала:

$$\Delta(\rho_{i+1} - \rho_i) \sim \frac{1}{N_i} (\rho_{i+1} - \rho_i) ,$$

следовательно, в формулах (20) и (25), описывающих структуру системы вихрей, погрешность, связанная с такой «подстройкой», является малой поправкой.

Теперь рассмотрим вопрос о взаимном расположении цепочек вихрей на соседних окружностях. Известно, что структура решетки вихрей Абрикосова в однородном магнитном поле существенно определяется энергией взаимодействия вихря с ближайшими соседями. В данной работе рассмотрены планарные вихри в неоднородном магнитном поле, обладающем центральной симметрией, и сделано предположение, что вихри лежат на концентрических окружностях. При этом цепочки вихрей на окружности могут пово-

рачиваться как целое одна относительно другой, выбирая энергетически наиболее выгодное взаимное расположение. Ранее [31,32] при выводе формулы (5) слагаемое, связанное с таким поворотом одной окружности относительно другой, опускалось как малая добавка. Однако в данной работе при выводе уравнения (22) для коэффициента γ существенную роль сыграло малое слагаемое (последнее слагаемое в (6)), которое было отброшено в [31,32]. Поэтому представляется необходимым оценить по порядку величины вклад в энергию (5) поправки, связанной со взаимным положением вихрей на соседних окружностях. Можно показать (см. Приложение 4), что эта поправка равна

$$\Delta E = \frac{\pi\hbar^2 n_s}{M} \sum_i \left\{ 2 \sum_{j(<i)} N_j \left[\frac{\pi^2 a^2}{N_i^3} \exp\left(-N_i \ln \frac{\rho_i}{\rho_j}\right) \right] \right\} N_i ,$$

где a — коэффициент порядка единицы. Видно, что величина ΔE в $(N_i/\pi a)^2$ раз меньше, чем наименьшее слагаемое в (6). Таким образом, рассмотренная добавка к энергии (ΔE) пренебрежимо мала.

Необходимо обратить внимание на следующее важное обстоятельство. Выигрыш в энергии, связанный с появлением вихрей, обусловлен взаимодействием электрон-дырочных диполей с магнитным полем. Соответствующее слагаемое в выражении для энергии (6) (а именно, второе слагаемое) убывает с ростом ρ_i . Поэтому при токе $I \approx I_{c1}$ энергетически выгодно, чтобы вихревая структура занимала только часть диска. В результате полученное решение для ρ_i и N_i будет справедливо лишь при ρ_i , меньшем некоторого предельного ρ_m . Величину ρ_m легко найти с помощью (8), если учесть, что при $\rho_i > \rho_m$ все $N_i = 0$. При этом уравнение (8), написанное для окружности m , приобретает следующий вид:

$$-\ln N_m + 2 \sum_{j(\leq m)} N_j \ln \frac{R}{\rho_m} = \frac{R - \rho_m}{\lambda} - \ln \frac{\rho_m}{\xi} . \quad (27)$$

Здесь мы отбросили второе и пятое слагаемые в правой части (8) как малые добавки. С помощью (18) это уравнение переписывается в виде

$$-\ln N_m + 2 \left(N_m + \frac{\rho_m}{\lambda} \right) \ln \frac{R}{\rho_m} = \frac{R - \rho_m}{\lambda} - \ln \frac{\rho_m}{\xi} . \quad (28)$$

Поскольку, в силу (20) и (25), $N_m \sim (\rho_m/\lambda)^{1/2}$, легко понять, что выполняются неравенства

$$\frac{\rho_m}{\lambda} \gg N_m \gg \ln N_m \gg 1.$$

Учитывая эти неравенства и используя определение λ_{c1} из (4), получаем из (28)

$$\rho_m = \frac{\lambda_{c1} - \lambda}{\lambda_{c1}} \frac{R}{1 + \ln R/\rho_m}. \quad (29)$$

Как видно из (29), величина ρ_m фактически пропорциональна радиусу диска R (периметру образца), поскольку стоящий в знаменателе $\ln R/\rho_m$ слабо меняется с ростом R , и мы можем в главном приближении считать этот логарифм постоянной величиной. Из (29) также видно, что ρ_m зависит от величины магнитного поля H , входящего через параметр λ . С ростом тока, создающего магнитное поле, параметр λ уменьшается, а радиус внешней окружности ρ_m растет. Вид зависимости ρ_m от силы тока I гиперболический.

3. Энергия системы вихрей

Итак, мы получили полное представление о вихревой структуре в рассматриваемой системе: планарные вихри располагаются на концентрических окружностях, заполняя диск от центра до некоторой внешней окружности радиусом ρ_m (см. рис. 4), который, как видно из (29), увеличивается с ростом величины магнитного поля. Число вихрей на окружности, радиус окружности и рас-

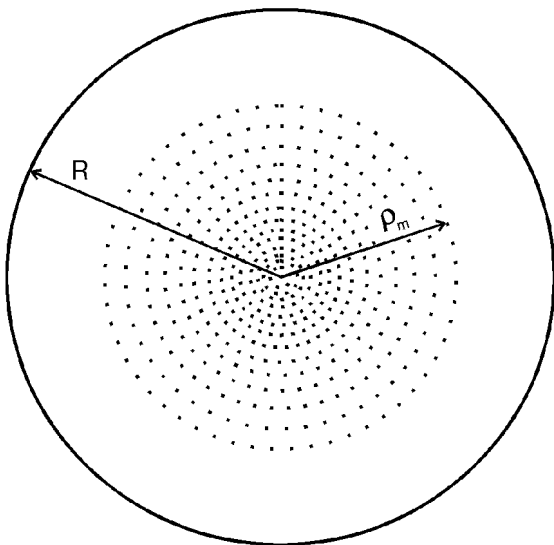


Рис. 4. Вихревая структура в поле кругового тока.

стояние между двумя соседними окружностями связаны соотношениями (20) и (25).

Теперь можно найти полное число вихрей в системе:

$$N = \sum_{i=1}^m N_i.$$

Вычисление такой суммы не вызывает никаких затруднений, если воспользоваться выражением (20). В результате получим

$$N = \sum_{i=1}^m \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{2\lambda} = \frac{\rho_m}{2\lambda}. \quad (30)$$

Здесь мы опустили слагаемое $\rho_1/2\lambda$, считая, что $\rho_m \gg \rho_1$. Подставляя (29) в (30), получаем искомую зависимость числа вихрей от размера образца

$$N = \frac{\lambda_{c1} - \lambda}{\lambda_{c1}} \frac{R}{2\lambda \ln eR/\rho_m}. \quad (31)$$

Таким образом, полное число вихрей действительно пропорционально периметру образца.

Перейдем теперь к вычислению энергии системы вихрей. Для вычисления энергии в главном приближении можно пренебречь в выражении (6) третьим и последним слагаемыми, а также величиной N_i по сравнению с $\sum_{j<(i)} N_j = \beta N_i^2$. Тогда выражение для энергии примет вид

$$E = \frac{\pi \hbar^2 n_s}{M} \sum_i \left(\ln \frac{\rho_i}{\xi} - \frac{R - \rho_i}{\lambda} + \beta N_i^2 \ln \frac{R}{\rho_i} \right) N_i. \quad (32)$$

Эти суммы удается вычислить точно, однако здесь можно перейти от суммирования по номерам окружностей к интегрированию по непрерывной переменной i , поскольку вычисление сумм в главном приближении не дает никаких отличий от интегрирования (см. Приложение 5). Приведем результат интегрирования:

$$E = \frac{\pi \hbar^2 n_s}{M} \int_1^m \left(\ln \frac{\rho_i}{\xi} - \frac{R - \rho_i}{\lambda} + \beta N_i^2 \ln \frac{R}{\rho_i} \right) N_i di = - \frac{\pi \hbar^2 n_s}{M} \frac{\rho_m^2}{2\lambda^2} \left(\frac{\lambda_{c1}}{\lambda} \ln \frac{eR}{\rho_m} - \frac{3}{4} \right). \quad (33)$$

Очевидно, что энергия системы вихрей всегда отрицательна. Действительно, даже при λ близких к λ_{c1} (т.е. при $(\lambda_{c1} - \lambda) \ll \lambda_{c1}$)

$$\frac{\lambda_{c1}}{\lambda} \ln \frac{eR}{\rho_m} \approx \frac{\lambda_{c1}}{\lambda} \ln \frac{\lambda_{c1}}{\lambda_{c1} - \lambda} > 1,$$

а с ростом тока I (т.е. с уменьшением λ) выражение, стоящее в скобках в правой части (33), увеличивается.

Подставляя (29) в (33), получаем искомое выражение для энергии системы вихрей:

$$E = -\frac{\pi \hbar^2 n_s}{2M} R^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{c1}} \right)^2 \left(\frac{\lambda_{c1}}{\lambda} \ln \frac{eR}{\rho_m} - \frac{3}{4} \right) \ln^{-2} \frac{eR}{\rho_m}. \quad (34)$$

Проанализируем полученный результат. Энергия системы вихрей при $I > I_{c1}$ отрицательна, т.е. появление вихрей при превышении током I критического значения I_{c1} действительно энергетически выгодно. С ростом тока I (т.е. с уменьшением параметра λ) энергия увеличивается по модулю. И, наконец, энергия системы вихрей пропорциональна R^2 , т.е. «объему» двумерного образца, и мы можем утверждать, что вихревое состояние является новой термодинамической фазой рассматриваемой системы.

4. Выводы

В работе показано, что в системе со СПРЭД при температурах ниже температуры сверхпроводящего перехода в неоднородном магнитном поле (представляющем собой двумерный «еж»), когда ток, создающий это поле, превосходит некоторое критическое значение I_{c1} , становится энергетически выгодным появление макроскопического количества планарных вихрей с одинаковой циркуляцией. В дискообразном образце радиусом R вихри лежат на окружностях с центрами, совпадающими с центром диска, заполняя диск от центра до некоторого значения ρ_m (радиуса наибольшей окружности), которое задается формулой (29). Величина ρ_m линейно растет с ростом радиуса образца R , а также увеличивается с ростом тока I , т.е. с ростом I система вихрей разрастается от центра диска к его краям. Число вихрей на

окружности, радиус окружности и расстояние между двумя соседними окружностями связаны соотношениями (20) и (25). Найдены полное число вихрей и энергия системы вихрей (формулы (31) и (34)) и показано, что хотя полное число вихрей пропорционально периметру образца, энергия системы вихрей пропорциональна R^2 , т.е. рассмотренный эффект является не поверхностным, а объемным, и, следовательно, вихревое состояние является новой термодинамической фазой рассматриваемой системы.

Настоящая работа была поддержана ИНТАС (грант № 97-0972).

Приложение 1

Согласно введенному в разд. 2 обозначению,

$$S_i = \sum_{j(<i)} \frac{N_j}{\exp \{N_j \ln (\rho_j / \rho_i)\} - 1} - \sum_{j(>i)} \frac{N_j}{\exp \{N_j \ln (\rho_j / \rho_i)\} - 1}.$$

Из-за наличия экспонент в знаменателе основной вклад в эти суммы дадут слагаемые с номерами j , близкими к i , поэтому в главном приближении имеем

$$S_i = \sum_{k=1}^p \left[\frac{N_{i-k}}{\exp \{N_i \ln (\rho_i / \rho_{i-k})\} - 1} - \frac{N_{i+k}}{\exp \{N_{i+k} \ln (\rho_{i+k} / \rho_i)\} - 1} \right], \quad (П1.1)$$

где верхний предел суммирования p должен быть достаточно мал ($p \ll i$), поскольку ниже мы будем выполнять разложение зависящих от i функций в ряд Тейлора по малому приращению k . Однако предел p должен быть достаточно велик, чтобы отброшенной частью ряда можно было пренебречь. Оценки показали, что оптимальное значение p равно 6.

Раскладывая выражение в квадратных скобках в (П1.1) в ряд Тейлора, после взаимного уничтожения слагаемых первого приближения получаем

$$S_i = \sum_{k=1}^p \frac{e^{c_i k} \left[\left(\frac{N_i}{\rho_i} \frac{d^2 \rho_i}{d i^2} - \frac{N_i}{\rho_i^2} \left(\frac{d \rho_i}{d i} \right)^2 + \frac{1}{\rho_i} \frac{d N_i}{d i} \frac{d \rho_i}{d i} \right) N_i k^2 - 2 \frac{d N_i}{d i} k \right] + 2 \frac{d N_i}{d i} k}{(\exp \{N_i \ln (\rho_i / \rho_{i-k})\} - 1) (\exp \{N_{i+k} \ln (\rho_{i+k} / \rho_i)\} - 1)}, \quad (П1.2)$$

где введено обозначение

$$c_i = \frac{N_i}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{di} \quad (\text{П1.3})$$

Чтобы вычислить сумму S_i в главном приближении, в числителе (П1.2) отбросим последнее слагаемое (поскольку $c_i > 2$, в чем можно убедиться, подставив (16), (17) и (23) в (П1.3)), а знаменатель примем равным $e^{2c_i k}$. При вычислении S_i в этом приближении можно устремить верхний предел суммирования к бесконечности, упрощенный таким образом ряд легко вычисляется методом дифференцирования по параметру. В результате получаем выражение (11).

Приложение 2

Для второго и третьего слагаемых в правой части (9) введем обозначение $2S_2(i)$. Тогда

$$S_2(i) = \sum_{j(<i)} \frac{\frac{1}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{di} (i-j) \exp \left\{ \frac{N_i}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{di} (i-j) \right\} \left[\frac{dN_i}{di} - \frac{N_i}{\rho_i} \frac{dN_i}{di} \frac{d\rho_i}{di} (i-j) \right]}{(\exp \{N_{i+1} \ln (\rho_{i+1} / \rho_{j+1})\} - 1)(\exp \{N_i \ln (\rho_i / \rho_j)\} - 1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^p \frac{\frac{1}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{di} \exp \left\{ \frac{N_i}{\rho_i} \frac{d\rho_i}{di} k \right\} \left[\frac{dN_i}{di} - \frac{N_i}{\rho_i} \frac{dN_i}{di} \frac{d\rho_i}{di} k \right] k}{(\exp \{N_{i+1} \ln (\rho_{i+1} / \rho_{i-k+1})\} - 1)(\exp \{N_i \ln (\rho_i / \rho_{i-k})\} - 1)} \quad (\text{П2.2})$$

При вычислении $S_2(i)$ в главном приближении можем воспользоваться выражениями (16) и (17), а также принять знаменатель равным $e^{2c_i k}$. Устремляя верхний предел суммирования в правой части (П2.2) к бесконечности, вычисляем полученный ряд методом дифференцирования по параметру. В итоге для $S_2(i)$ находим следующий результат:

$$S_2(i) = -\frac{\gamma}{2i} (\gamma-1) e^{-\gamma/2} = -\frac{\gamma^2}{8N_i} (\gamma-1) e^{-\gamma/2} \quad (\text{П2.3})$$

Теперь рассмотрим два последние слагаемые в правой части (9), обозначив их как $2S_3(i)$.

$$S_3(i) = \sum_{j(>i)} \left[\ln \left(1 - \exp \left\{ -N_{j+1} \ln \frac{\rho_{j+1}}{\rho_{i+1}} \right\} \right) - \ln \left(1 - \exp \left\{ -N_j \ln \frac{\rho_j}{\rho_i} \right\} \right) \right]$$

$$S_2(i) = \sum_{j(<i)} \frac{N_{j+1} \ln (\rho_{i+1} / \rho_{j+1})}{\exp \{N_{i+1} \ln (\rho_{i+1} / \rho_{j+1})\} - 1} - \frac{N_j \ln (\rho_i / \rho_j)}{\exp \{N_i \ln (\rho_i / \rho_j)\} - 1} \quad (\text{П2.1})$$

Как и в Приложении 1, будем использовать тот факт, что функции $N(i)$ и $\rho(i)$ медленно изменяются на одном шаге, а из-за наличия в знаменателе экспоненты основной вклад в эти суммы дают слагаемые с номерами j , близкими к i . Приводя дроби в (П2.1) к общему знаменателю и производя разложение функций, зависящих от i , в ряд Тейлора по малому приращению $|i-j| \ll i$, получаем

Используя малость экспонент по сравнению с единицей и производя разложение в ряд Тейлора, аналогичные приведенным выше, получаем

$$S_3(i) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\rho_i} \frac{dN_i}{di} \frac{d\rho_i}{di} k e^{-c_i k}$$

Устремляя верхний предел суммирования к бесконечности и вычисляя бесконечный ряд также методом дифференцирования по параметру, получаем, используя (16) и (17),

$$S_3(i) = \frac{\gamma}{2i} e^{-\gamma/2} = \frac{\gamma^2}{8N_i} e^{-\gamma/2} \quad (\text{П2.4})$$

Подставляя результаты (П2.3) и (П2.4) в (9), приходим к (21).

Приложение 3

Из системы (18) и (21) следует уравнение

$$\begin{aligned}
 & N_{i+1} + N_i - \\
 & 2 \sum_{j(\leq i)} N_j - N_{i+1} - 1 - \gamma e^{-\gamma/2} \\
 & - (2 \sum_{j(\leq i)} N_j - 1) \ln \frac{j(\leq i+1)}{2 \sum_{j(\leq i)} N_j - N_i - 1 - \gamma e^{-\gamma/2}} = \\
 & = \ln \frac{N_{i+1}}{N_i} - \frac{\gamma^2}{4N_i} (\gamma - 2) e^{-\gamma/2}. \quad (\text{ПЗ.1})
 \end{aligned}$$

Разложим логарифм из левой части (ПЗ.1)

$$\begin{aligned}
 & \ln \frac{j(\leq i+1)}{2 \sum_{j(\leq i)} N_j - N_i - 1 - \gamma e^{-\gamma/2}} = \\
 & = \ln \left(1 + \frac{N_{i+1} + N_i}{2 \sum_{j(\leq i)} N_j - N_i - 1 - \gamma e^{-\gamma/2}} \right)
 \end{aligned}$$

в ряд Тейлора до членов третьего порядка малости, а дробь

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2 \sum_{j(\leq i)} N_j - N_i - 1 - \gamma e^{-\gamma/2}} = \\
 & = \frac{1}{2 \sum_{j(\leq i)} N_j - 1} \frac{1}{1 - (N_i + \gamma e^{-\gamma/2}) / (2 \sum_{j(\leq i)} N_j - 1)}
 \end{aligned}$$

до членов второго порядка малости и подставим результаты в (ПЗ.1). После приведения подобных в левой части (ПЗ.1) слагаемые порядка N_i , а также порядка единицы взаимно уничтожатся и останутся слагаемые того же порядка, что и слагаемые в правой части (ПЗ.1). Разложив логарифм в правой части (ПЗ.1) в ряд по малому приращению $(N_{i+1} - N_i) \ll N_i$

$$\ln \frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{N_{i+1} - N_i}{N_i}$$

и воспользовавшись выражением (17), получаем уравнение (22).

Приложение 4

При вычислении в [31,32] энергии взаимодействия вихрей, принадлежащих разным окружностям, появилось слагаемое

$$\begin{aligned}
 & \frac{\pi \hbar^2 n_s}{2M} \sum_{i,j} \sum_{n_j=1}^{N_j} \sum_{n_i=1}^{N_i} \ln \left[1 - 2 \frac{\rho_j}{\rho_i} \cos(\theta(n_i) - \theta(n_j)) + \frac{\rho_j^2}{\rho_i^2} \right] = \\
 & = \frac{\pi \hbar^2 n_s}{M} \times \\
 & \times \sum_i \sum_{j(<i)} N_j \sum_{n_i=1}^{N_i} \ln \left[1 - 2 \frac{\rho_j}{\rho_i} \cos \left(\frac{2\pi n_i}{N_i} - \alpha_i(n_j) \right) + \frac{\rho_j^2}{\rho_i^2} \right], \quad (\text{П4.1})
 \end{aligned}$$

где $\alpha_i(n_j)$ — минимальный угол между радиусами, проведенными в центр вихря на одной и на другой окружностях. Величина $\alpha_i(n_j)$ лежит в интервале от 0 до $\alpha_{\max}(i)$, при этом $\alpha_{\max}(i)$ можно найти следующим образом.

Энергия взаимодействия вихрей, принадлежащих разным окружностям, уменьшается экспоненциально с расстоянием (пропорционально $\exp\{-N_i \ln(\rho_i/\rho_j)\}$), поэтому достаточно рассмотреть вихри из ближайших окружностей. Рассмотрим две окружности с числом вихрей на них N_i и $N_i - a$, где a — коэффициент порядка 1. На рис. 5 радиус, проведенный в центр вихря на одной окружности, прошел через центр вихря на другой окружности, т.е. $\alpha_i(n_j) = 0$. Минимальный угол δ , на который нужно повернуть одну окружность относительно другой, чтобы вихри опять попали на один радиус, равен

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{2\pi}{N_i - a} - \frac{2\pi}{N_i} \approx \frac{2\pi a}{N_i^2},$$

а угол $\alpha_{\max}(i)$ равен половине этого угла.

Чтобы получить оценку «сверху» поправки к энергии, связанной с подстройкой цепочки вихрей одной окружности относительно другой, заме-

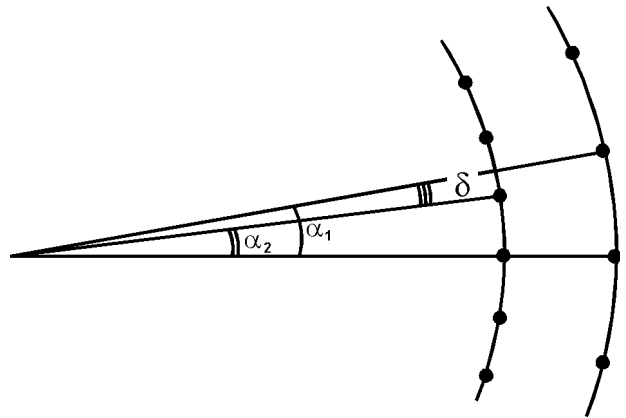


Рис. 5. Фрагмент вихревой структуры для двух соседних окружностей.

ним в (П4.1) углы $\alpha_i(n_j)$ их максимальными значениями $\alpha_{\max}(i)$, после чего выражение (П4.1) приобретает вид:

$$\frac{\pi \hbar^2 n_s}{M} \sum_i \sum_{j(<i)} N_j \sum_{n_i=1}^{N_i} \ln \left[1 - 2x \left(\cos \frac{2\pi n_i}{N_i} \cos \frac{\pi a}{N_i^2} + \sin \frac{2\pi n_i}{N_i} \sin \frac{\pi a}{N_i^2} \right) + x^2 \right]. \quad (\text{П4.2})$$

Здесь введено обозначение $x = \rho_j / \rho_i$.

Для того чтобы выделить в этом выражении интересующую нас добавку к энергии, надо учесть,

что $(\pi a / N_i^2) \ll 1$, и разложить $\sin(\pi a / N_i^2)$ и $\cos(\pi a / N_i^2)$ по степеням $(\pi a / N_i^2)$, а затем разложить в ряд Тейлора логарифм по малому приращению

$$- 2x \frac{\pi a}{N_i^2} \sin \frac{2\pi n_i}{N_i} + x \left(\frac{\pi a}{N_i^2} \right)^2 \cos \frac{2\pi n_i}{N_i}$$

до членов второго порядка малости. В результате получим, что поправка к энергии, связанная со взаимным расположением цепочек вихрей на соседних окружностях относительно друг друга, не превосходит

$$\Delta E = \frac{\pi \hbar^2 n_s}{M} \sum_i \sum_{j(<i)} N_j \sum_{n_i=1}^{N_i} \left[- 2x \frac{\pi a}{N_i^2} \frac{\sin(2\pi n_i / N_i)}{1 - 2x \cos(2\pi n_i / N_i) + x^2} + x \left(\frac{\pi a}{N_i^2} \right)^2 \frac{\cos(2\pi n_i / N_i)}{1 - 2x \cos(2\pi n_i / N_i) + x^2} - 2x^2 \left(\frac{\pi a}{N_i^2} \right)^2 \frac{\sin^2(2\pi n_i / N_i)}{(1 - 2x \cos(2\pi n_i / N_i) + x^2)^2} \right]. \quad (\text{П4.3})$$

Вычислим суммы, входящие в (П4.3). Для первого слагаемого в квадратных скобках имеем

$$- 2x \frac{\pi a}{N^2} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(2\pi n / N)}{1 - 2x \cos(2\pi n / N) + x^2} = 0, \quad (\text{П4.4})$$

поскольку суммируется периодическая нечетная функция по ее периоду.

Для суммирования второго и третьего слагаемых из (П4.3) используем формулу суммирования Пуассона. В частности, для второго слагаемого имеем

$$\begin{aligned} & x \left(\frac{\pi a}{N^2} \right)^2 \sum_{n=1}^N \frac{\cos(2\pi n / N)}{1 - 2x \cos(2\pi n / N) + x^2} = \\ & = x \left(\frac{\pi a}{N^2} \right)^2 \int_0^N \frac{\cos(2\pi n / N) dn}{1 - 2x \cos(2\pi n / N) + x^2} + \\ & + 2x \left(\frac{\pi a}{N^2} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^N \frac{\cos(2\pi kn) \cos(2\pi n / N) dn}{1 - 2x \cos(2\pi n / N) + x^2}. \end{aligned} \quad (\text{П4.5})$$

Аналогичным образом записывается третье слагаемое. Затем интегрируем оба слагаемые в

(П4.5) по частям и результат складываем с выражением для третьего слагаемого. Полученное выражение еще раз интегрируем по частям. В результате получаем

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\pi a}{N} \right)^2 \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \int_0^N \cos(2\pi kn) \ln(1 - 2x \cos(2\pi n / N) + x^2) dn. \end{aligned} \quad (\text{П4.6})$$

Учитывая, что [33]

$$\begin{aligned} & \int_0^N \cos(2\pi kn) \ln(1 - 2x \cos(2\pi n / N) + x^2) dn = \\ & = - \frac{1}{k} \exp(-kN |\ln x|), \end{aligned}$$

можем переписать (П4.6) в виде

$$\left(\frac{\pi a}{N} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \exp(-kN |\ln x|) \approx \left(\frac{\pi a}{N} \right)^2 \exp(-N |\ln x|). \quad (\text{П4.7})$$

Подставляя (П4.7) в (П4.3), получаем окончательно

$$\Delta E = \frac{\pi \hbar^2 n_s}{M} \sum_i \left\{ 2 \sum_{j(<i)} N_j \left(\frac{\pi^2 a^2}{N_i^3} \exp \left\{ -N_i \ln \frac{\rho_i}{\rho_j} \right\} \right) \right\} N_i.$$

Приложение 5

Для первого слагаемого из (32) имеем

$$\sum_i N_i \ln \frac{\rho_i}{\xi} = \sum_i N_i \ln \frac{\rho_i}{\lambda} + \frac{\rho_m}{2\lambda} \ln \frac{\lambda}{\xi}. \quad (\text{П5.1})$$

Здесь мы воспользовались результатом (30). С помощью (20) первое слагаемое в (П5.1) может быть записано в следующем виде:

$$\sum_i N_i \ln \frac{\rho_i}{\lambda} = \frac{1}{2\lambda} \left(\sum_i \rho_{i+1} \ln \frac{\rho_i}{\lambda} - \sum_i \rho_i \ln \frac{\rho_i}{\lambda} \right).$$

Но при $\rho_{i+1} - \rho_i \ll \rho_{i+1}$

$$\ln \frac{\rho_i}{\lambda} = \ln \frac{\rho_{i+1}}{\lambda} + \ln \left(1 - \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\rho_{i+1}} \right) \approx \ln \frac{\rho_{i+1}}{\lambda} - \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\rho_{i+1}},$$

в результате

$$\begin{aligned} \sum_i N_i \ln \frac{\rho_i}{\lambda} &= \\ &= \frac{1}{2\lambda} \left[\sum_i \left(\rho_{i+1} \ln \frac{\rho_{i+1}}{\lambda} - \rho_i \ln \frac{\rho_i}{\lambda} \right) - \sum_i (\rho_{i+1} - \rho_i) \right] = \\ &= \frac{\rho_m}{2\lambda} \ln \frac{\rho_m}{\lambda} - \frac{\rho_m}{2\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{П5.2})$$

Подставляя (П5.2) в (П5.1) и используя (4) и (29), получаем окончательно

$$\sum_i N_i \ln \frac{\rho_i}{\xi} = \frac{R \rho_m}{2\lambda \lambda_{c1}}. \quad (\text{П5.3})$$

Тот же результат можно получить, если перейти от суммирования к интегрированию. При этом

$$\sum_i N_i \ln \frac{\rho_i}{\xi} = \int_1^m N(i) \ln \frac{\rho(i)}{\xi} di$$

и, используя (4), (16), (17) и (29), получим

$$\int_1^m N(i) \ln \frac{\rho(i)}{\xi} di = \frac{R \rho_m}{2\lambda \lambda_{c1}}. \quad (\text{П5.4})$$

Результаты (П5.3) и (П5.4) совпадают.

1. L. J. Cooper, N. K. Patel, V. Drouot, E. H. Linfield, D. A. Ritchie, and M. Pepper, *Phys. Rev.* **B57**, 11915 (1998).
2. M. P. Lilly, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1714 (1998).
3. L. V. Butov, A. Z. Zrener, M. Hang, G. Abstrein, G. Böhm, and G. Weinmann, *Surf. Sci.* **361/362**, 2434 (1996).
4. Л. В. Бутов, А. И. Филин, *ЖЭТФ* **114**, 1115 (1998).
5. С. И. Шевченко, *ФНТ* **2**, 505 (1976).
6. Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, *ЖЭТФ* **71**, 738 (1976).
7. Ю. Е. Лозовик, В. Н. Нишанов, *ФТТ* **18**, 3267 (1976).
8. S. I. Shevchenko, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3242 (1994).
9. А. Б. Дзюбенко, Ю. Е. Лозовик, *ФТТ* **25**, 1519 (1983).
10. А. Б. Дзюбенко, Ю. Е. Лозовик, *ФТТ* **26**, 1540 (1984).
11. H. A. Fertig, *Phys. Rev.* **B40**, 1087 (1989).
12. D. Yoshioka and A. H. MacDonald, *J. Phys. Soc. Jpn.* **59**, 4211 (1990).
13. A. H. MacDonald, P. M. Platzman, and G. S. Boebinger, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 757 (1990).
14. X. M. Chen and J. J. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 895 (1991).
15. R. Cote, L. Brey, and A. H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B46**, 10239 (1992).
16. S. R. Renn, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 658 (1992).
17. X. G. Wen and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1087 (1992).
18. Z. F. Ezawa and A. Iwazaki, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3119 (1993).
19. X. M. Chen and J. J. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2130 (1993).
20. Kun Yang, K. Moon, L. Zheng, A. H. MacDonald, S. M. Girvin, D. Yoshioka, and Shon-Cheng Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 732 (1994).
21. Tin-Lun Ho, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 874 (1994).
22. J. Szymanski, L. Swierkowski, and D. Nielson, *Phys. Rev.* **B50**, 11002 (1994).
23. L. Swierkowski, J. Szymanski, and Z. W. Gortel, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3245 (1995).
24. X. Zhu, P. B. Littlewood, M. S. Hybertsen, and T. M. Rice, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1633 (1995).
25. A. B. Dzyubenko and G. E. W. Bauer, *Phys. Rev.* **B51**, 14524 (1995).
26. K. Moon, H. Mori, Kung Yang, S. M. Girvin, A. H. MacDonald, L. Zheng, D. Yoshioka, and Shon-Cheng Zhang, *Phys. Rev.* **B51**, 5138 (1995).
27. Kung Yang, K. Moon, Lotfi Belkhir, H. Mori, S. M. Girvin, and A. H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B54**, 11644 (1996).
28. L. Brey, H. A. Fertig, R. Cote, and A. H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B54**, 16888 (1996).
29. G. Vignale and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2786 (1996).
30. Z. F. Ezawa, *Phys. Rev.* **B55**, 7771 (1997).
31. S. I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **B56**, 10355 (1997).
32. S. I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **B57**, 14809 (1998).
33. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1963), с. 607, форм. 4.397(6).

On vortex phase of systems with pairing of spatially separated electrons and holes

S. I. Shevchenko and V. A. Bezugly

A possibility of macroscopic quantity of planar vortices with identical circulation occurring in the systems with pairing of spatially separated electrons and holes was recently predicted [S. I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **B56**, 10355 (1997); *Phys. Rev.* **B57**, 14809 (1998)]. In the present work the structure

formed by planar vortices in a disk-shaped sample in magnetic field the two-dimensional divergence of which differs from zero is considered. The total number of vortices and the energy of a system of vortices are found as a function of external magnetic field and sample size. It is established that the vortex structure energy is proportional to the system volume and, therefore, the vortex state is a new thermodynamic phase of the investigated system (similar to Shubnikov's phase in common superconductors).