6. Синтетические сверхтвердые материалы : В 3 т. / Редкол. Н.В. Новиков (отв. ред.) и др. – К. : Наук. думка, 1986. – Т. 2: Композиционные инструментальные сверхтвердые материалы. – 264 с.
7. Вовчановский И.Ф. Породоразрушающий инструмент на основе славутича для бурения глубоких скважин / И.Ф. Вовчановский // К.: Наук. думка, 1979. – 210 с.
8. Дослідження й відпрацьовування методів змішування порошкових матеріалів металевої матриці бурового інструменту / Г.П. Богатирьова, Г.Д. Ільницька, О.М. Ісонкін, Н.О. Олійник // Наукові нотатки. – 2011. – Вип. 35. – С. 19–22.
9. High voltage electric discharge in liquid as a method of preparation of blend for carbide steels / O.N. Sizonenko , E.G. Grigoriev, A.D. Zaichenko et al. // International virtual journal for science, technics and innovations for the industry. – 2013. – Y. VII, Is. 10. – P. 19–22.
10. Пат. 97319 Україна МПК C 22C 1/04, C 22C 21/00. Спосіб одержання металоматричних композиційних матеріалів / О.М. Сизоненко, Є.В. Липян, А.Д. Зайченко, А.С. Торпаков, М.С. Присташ, В.О. Трегуб. – Заявл. 11.09.2014; Опубл. 10.03.2015, Бюл. № 5.

Поступила 28.05.15

УДК 539.89

С. А. Виноградов, канд. техн. наук

Институт сверхтвердых материалов НАН Украины им. В.Н. Бакуля, г. Киев

ОБЗОР МЕТОДОВ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ДИСКА, СЖИМАЕМОГО МЕЖДУ ПЛОСКИМИ НАКОВАЛЬНЯМИ БРИДЖМЕНА

Кратко проанализированы методы расчета напряженного состояния диска, сжимаемого между плоскими наковальнями Бриджмена. Показано, что для случая сжатия плоского диска задача сводится к решению одного уравнения с тремя неизвестными, для однозначного решения которого следует ввести дополнительные гипотезы, что снижает достоверность получаемых результатов. Предложенные методы расчета используют для решения узкого класса задач. Для повышения общности получаемых результатов предложено использовать метод, в основу котрого положено минимальное количество гипотез и надежные экспериментально установленные факты.

***Ключевые слова**: наковальня Бриджмена, напряженное состояние диска.*

Задача расчетного определения напряженного состояния диска, сжимаемого между плоскими наковальнями Бриджмена, решалась во многих работах, например [1–8]. В этих работах используют известное решение в механике деформированного твердого тела применительно к обработке металлов давлением, а именно решение задачи о напряженном состоянии круглого металлического диска, подвергаемого осадке между плоскими плитами [9]. Система уравнений равновесия осесимметричного тела имеет вид [9]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0 \\ &\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

где компоненты напряжения $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz}$ являются функциями координат *r* и *z*.

Покажем, что для случая сжатия плоского диска, боковая поверхность которого свободна от касательных напряжений, второе уравнение системы (1) удовлетворяется тождественно, и система уравнений равновесия сводится к первому уравнению.

Из условия равновесия сжимающее диск внешнее усилие F равно главному вектору внутренних сил, параллеленому оси z, а именно:

$$F = 2\pi \int_0^R \sigma_z (r, z) r dr, \tag{2}$$

где R – наружный радиус диска; σ_z (r, z) – напряжение, нормальное к плоскости сечения диска, перпендикулярного оси z.

Так как боковая поверхность диска ($r = R$) свободна от напряжения, очевидно, что интеграл (2) не зависит от координаты z, т. е. можно записать

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

Подставляя (2) в (3) и дифференцируя подинтегральное выражение по координате z, получаем

$$2\pi \int_0^R r \frac{\partial \sigma_z (r, z)}{\partial z} dr = 0 \tag{4}$$

Теперь рассмотрим второе уравнение равновесия системы (1) и приведем его к виду

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} r + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} r + \tau_{rz} = 0$$

Умножим обе части на dr и проинтегрируем в пределах *(0, R):*

$$\int_0^{К} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} r dr + \int_0^R \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} r dr + \int_0^R \tau_{rz} dr = 0$$

$$\int_o^R \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} r dr + \int_0^R \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} r dr + \int_0^R \tau_{rz} dr = 0$$

Учитывая равенство (4), получаем

$$\int_o^R \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} r dr + \int_0^R \tau_{rz} dr = 0. \tag{5}$$

Первый интеграл находим интегрированием по частям

$$\int_o^R \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} r dr = r\,\tau_{rz}\Big|_0^R - \int_0^R \tau dr.$$

Подставляя это выражение в (5), получаем

$$r\tau_{rz}\Big|_0^R - \int_0^R \tau_{rz} dr + \int_0^R \tau_{rz} dr = 0$$

и после преобразований с учетом, что $\tau_{rz} = 0$ при $r = 0$, получаем равенство

$$R\tau_{rz}(R, z) = 0 \tag{6}$$

Равенство (6) выполняется, если касательное напряжение τ_{rz} на внешней поверхности диска ($r = R$) равно нулю. Для случая сжатия диска между плоскими наковальнями это условие является выражением граничных условий (боковая поверхность свободна от касательных напряжений) и удовлетворяется тождественно.

Таким образом, в случае сжатия диска между плоскими наковальнями Бриджмена второе уравнение равновесия системы (1) сводится к равенству (6), которое удовлетворяется тождественно**.** Тогда для решения задачи о равновесии диска достаточно рассмотреть только первое уравнение системы (1). Это уравнение содержит три независимых переменных, поэтому для его однозначного решения необходимо задать две другие переменные из других условий. Одну переменную задают, принимая условие полной пластичности Хаара – Кармана [10]

$$\sigma_r = \sigma_\theta.$$

Вторую переменную исключают, считая материал диска несжимаемым ($\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0$). На основании условия несжимаемости можно получить равенство [9]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial r}.$$

Тогда с учетом этого равенства из первого уравнения системы (1) получаем уравнение

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial r} = -\frac{\tau_{rz}}{h}, \tag{7}$$

где h – толщина сжимаемого диска.

Уравнение (7) является исходным уравнением в [1–8].

Для решения уравнения (7) принимаем, что материал диска на поверхности, контактирующей с поверхностью наковальни, находится в пластическом состоянии ($\tau_{rz} = \tau_s$) и предел текучести прямо пропорционален нормальному давлению p на поверхности контакта: $\tau_s = \mu p = \mu\sigma_z$, где μ – постоянная величина, которую называют коэффициентом внутреннего трения. Тогда решение уравнения (7) имеет вид [9]

$$\sigma_z = \sigma_0 exp\left[\frac{2\mu}{h}(R - r)\right] \tag{8}$$

где $2R$ – наружный диаметр диска (наковальни), σ_0 – предел прочности материала диска на сдвиг при атмосферном давлении.

Равенство (8) используют для расчета градуировочных зависимостей аппаратов высокого давления типа плоских наковален Бриджмена [2; 5; 6] и экспериментального определения коэффициента внутреннего трения μ и его зависимости от давления [3 – 5]. Выражение (8) дает экспоненциальную зависимость нормального напряжения σ_z от координаты r $(0 < r < R)$ с максимальным значением в центре диска ($r = 0$).

Однако ввиду принятых ограничений на модель материала, положенную в основу получения уравнения равновесия (7), зависимость (8) не позволяет объяснить ряд экспериментально наблюдаемых фактов. Эта модель не отражает действительного поведения материала и значительно сужает область приложения получаемых выводов. Так, материал диска в состоянии равновесия не полностью находится в состоянии пластической деформации, так как касательные напряжения в центре диска равны нулю из условия осевой симметрии, т. е. там, где нормальные напряжения должны достигать максимальное значение (8).

Учитывая экспериментальный факт, что предел текучести материала повышается с повышением давления и касательные напряжения в центре диска равны нулю, следует ожидать, что материал в центральной области диска будет находиться в состоянии упругой деформации, а значит и зависимость напряжений от деформации в этой зоне будет определяться через упругие модули материала, которые не учитываются в уравнении (8).

Попытка ввести в рассмотрение зону упругой деформации сделана в [8] в целях объяснения в рамках рассматриваемой модели отличия действительного распределения нормального давления от даваемого зависимостью (8). Рассматривались две возможные зоны внутри диска – течения ($r_0 < r < R$), примыкающая к свободной боковой поверхности диска (описывается уравнением (8)), и сжатия ($0 < r < r_0$), напряженное состояние в которой описывается через модуль объемного сжатия материала:

$$p = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{h_f}{h}\right),$$

где k – сжимаемость материала диска h, h_f – соответственно толщина диска до и после приложения усилия.

Кроме того зависимость (8) не объясняет экспериментального факта о том, что максимум нормального напряжения не обязательно находится в центре диска, но в зависимости от толщины диска и сжимающей силы может находиться внутри интервала $0 < r < R$ [11].

Зависимость (8) описывает также распределение только одной компоненты напряжения. Однако экспериментально показано, что отношение компонент напряжения $\frac{\sigma_z}{\sigma_r}$ не обязательно равно единице, но зависит как от материала диска, так и его толщины [12; 13].

Таким образом, если уравнение (8) позволяет удовлетворительно описывать экспериментальные зависимости между интегральными величинами – толщиной диска и действующим усилием, при осадке пластичных металлических материалов, то оно становится неудовлетворительным для описания дифференциальных величин, а именно напряженного состояния диска с учетом механических свойств его материала.

В целях описания напряженного состояния сжимаемого диска применяют современные численные методы. Однако для расчета численными методами необходимо задать модель материала, граничные условия на поверхности контакта диска с наковальнями, а также механические характеристики материала. Граничные условия и механические свойства зависят от напряженного состояния и их следует определять экспериментально. К сожалению, в настоящее время эти знания носят общий характер, что заставляет относиться с осторожностью к результатам, получаемым численными методами.

Напряженное состояние диска с учетом наличия зоны упругой деформации рассчитано в [14; 15]. Алгоритм решения этой задачи основан на решении уравнении равновесия осесимметричного тела (1). Для решения системы уравнений считается, что предел текучести линейно зависит от давления [14] и принимается модель идеально пластического тела. При этом для упрощения рассматривается распределение напряжения только в срединной плоскости [15]. Адекватность расчета оценивают, сопоставляя расчетные градуировочные кривые АВД с экспериментальными зависимостями. Однако в расчет закладывают зависимость предела текучести от давления, определенную на основании приведенной расчетной методики, что ставит под сомнение корректность предлагаемого сопоставления. Кроме того, для расчета необходимо знать границы зон скольжения и застоя, которые определяются расчетно, что также вносит дополнительную условность в полученные расчетные результаты. Полученные формулы для расчета распределения напряжений не позволяют также объяснить наблюдаемое экспериментально смещение положения максимума напряжения σ_z из центра диска (r=0) к боковой поверхности ($r = R$) [16].

Таким образом, предлагаемые подходы к расчету распределения напряжений с учетом зоны упругого состояния описывают лишь частные случаи, обусловленные принятыми допущениями. Для получения более общего решения следует использовать как можно меньше допущений относительно модели материала диска, граничных условий и использовать лишь данные, надежно установленные экспериментально или вытекающие из физической сущности процесса.

Выводы

1. Аналитическое решение задачи о равновесии плоского диска, сжимаемого между плоскими наковальнями сводится к решению уравнения с тремя неизвестными, для чего вводят дополнительные гипотезы, что позволяет получить решение для узкого класса задач.

2. Применение численных методов требует задания граничних условий и знания механических свойств матриала диска при высоком давлении, т. е. данных, не являющихся достоверно известными ввиду специфики исследуемого объекта.

3. Для получения более общего решения задачи о напряженном состоянии диска, сжимаемого между плоскими наковальнями Бриджмена, следует использовать минимальное количество допущений, которые при этом имеют надежное экспериментальное подтверждение, а также

использовать методологические подходы, общепринятые при решении задач напряженно-деформированного состояния.

Стисло проаналізовани методи розрахунку напруженого стану диску, який стискається між плоскими кувалдами Бриджмена. Показано, що для випадку плоского диску завдання полягає у розв'язанні одного рівняння з трьома невідомими, для однозначного розв'язанні якого необхідно вводити додаткові гіпотези, що знижує достовірність результатів розрахунку. Ці методи розрахунку застосовують для рішення вузького класу задач. Для підвищення загальності результатів розрахунку запропоновано використовувати метод, що базується на мінімальній кількості гіпотез та фактах, що мають надійне експериментальне підтвердження.

***Ключові слова**: ковадла Бріджмена, напружений стан диску.*

Brief review of the analytical methods of the stress state of the disc being squeezed between flat Bridgman anvils calculation has been proposed. It has been shown that in case of the flat disk the problem comes to one equation with three unknown variables. Additional hypothesis must be brought for one-valued solution of the equation. Such approach allows to solve narrow class of the problems. To increase the generality of the calculation results there has been proposed to use the method based on the minimal quantity of the hypotheses and facts having reliable experimental proof.

***Key words**: Bridgman anvils, stress state of the disc.*

Литература

1. Aoki T., Ichinose K., M. Wakatsuki, Notes on compressible gasket and Bridgman-anvil type high pressure apparatus // Jap. J. Appl. Phys. – 1972. – v. 11. – N 4. – P. 578–590.
2. S. Akimoto, N. Nishikawa, Bridgman anvil with an internal heating system for phase transformation // High Temp. – High Pres. – 1971. – V. 3. – P. 161–176.
3. Okai B., Yochimoto J. Shear strength of pyrophyllite up to 80 kbar // Japan. J. Appl. Phys. – 1971. N 4. – P. 534–535.
4. Okai B., Yoshimoto J. Large Bridgman anvils and mechanical properties of pyrophyllite // High Temp. – High Pres. – 1973. – V. 5. – P. 675–678.
5. Sigalas I., Clark J. B, Hart S. Shear strength measurements at high temperature and pressures // High Temperature-high pressures. – 1983, V. 15. – P. 553–564.
6. Бандьопадхья А.К., Чаттерджи С., Гопал Е.С., Субраманьям С.В. Выбор оптимальной толщины прокладки в аппаратах высокого давления с наковаьнями Бриджмена // ПТЭ. – 1981. Вып. 52. – Р. 1232–1235.
7. Камарад И. Распределение давления в прокладках аппаратов высокого давления // Приборы для науч. исслед. – 1980. – № 6. – С. 161–162.
8. Prins J.F. A semiempirical description of pressure generation between Bridgman anvils // High Temp.-High Press. – 1984. – V. 16. – P. 657–664.
9. Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш.. Механика пластических деформаций при обработке металлов. – М.: Машиностроение, 1969. – 503 с.
10. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М. : Технико-теоретическая л-ра, 1956. – 407 с.
11. Шестопал О.Я., Шурин Я.И.. Экспериментальное определение распределения давления в тонкой пластине, сжатой между плоскими наковальнями // ПМТФ. – 1963. №6. – С. 174–176.
12. Майерс М.В., Декил Ф., Рой Р. Умножение давления в установке со встречными наковальнями // Приборы для науч. исслед. – 1963. – Вып. 34. – С. 74–75.
13. Шупяков Ю.Ф., Коломийцев А.И., Олонина Т.В., Соловьева Т.Н. Определение нормальных компонент напряжений в твердофазовой ячейке высокого давления // Эксперимент и техника высоких газовых и твердофазовых давлений. – М. : Наука, 1978. – С. 185–188.
14. Д Миринский.С. К определению градуировочных кривых установок высокого давления // ПМТФ. – 1964. – Т.2 . – С. 106–111.
15. Кузин Н.Н., Садков Ю.А., Семерчан А.А. К расчету градуировочных кривых аппаратов высокого давления с профилированными наковальнями // ПМТФ. – 1976. – № 3. – С. 149–154.
16. Шестопал О.Я., Шурин Я.И.. Экспериментальное определение распределения давления в тонкой пластине, сжатой между плоскими наковальнями // ПМТФ. – 1963. – № 6. – С. 174–176.

Поступила 10.06.15