

УДК 539.3

## РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ КУТОВИХ ВИРІЗІВ В ОРТОТРОПНІЙ ПЛОЩИНІ ЗА СИМЕТРИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

А. КАЗБЕРУК<sup>1</sup>, М. П. САВРУК<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Білостоцька політехніка, Польща;

<sup>2</sup> Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано розв'язок плоскої задачі теорії пружності для ортотропної площини з напівнескінченим кутовим закругленим вирізом за симетричного навантаження. На цій основі знайдено залежність між коефіцієнтом інтенсивності напружень (КІН) у вершині гострого кутового вирізу та нормальним напруженням у вершині відповідного закругленого вирізу. Для обмежених тіл з кутовими вирізами отриманий розв'язок є асимптотичною залежністю для малих радіусів закруглення їх вершин. Таке співвідношення можна використовувати в граничних переходах для знаходження КІН у вершинах гострих вирізів з розв'язків для відповідних закруглених концентраторів напружень.

**Ключові слова:** механіка руйнування, коефіцієнт інтенсивності напружень, кутовий виріз, ламана тріщина, метод сингулярних інтегральних рівнянь.

В останні роки активно розвивається механіка руйнування твердих тіл з вирізами, що є узагальненням механіки руйнування тіл з тріщинами. Цей напрям охоплює визначення розподілу напружень біля вершин вирізів та формулювання критеріїв руйнування тіл з такими концентраторами напружень, причому основна увага зосереджена на ізотропних тілах [1–3]. Значно менше досліджень концентрації напружень біля вирізів в анізотропних середовищах [4–6]. Нижче розроблений єдиний підхід до розв'язування задач про концентрацію напружень в ізотропних тілах з гострими та закругленими кутовими вирізами [1, 7–10] поширено на відповідні задачі для ортотропних середовищ. Отримано зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих та відповідних закруглених кутових вирізів в ортотропній площині за симетричного розподілу напружень.

**Формулювання задачі та її зведення до сингулярного інтегрального рівняння.** Нехай пружна ортотропна площина містить гострий кутовий виріз з вершиною у початку координат  $xOy$  і кутом розхилу  $2\beta$  ( $0 \leq \beta < \pi$ ). Вважатимемо, що цей пружний клин перебуває під дією симетричного відносно осі  $Ox$  навантаження і займає область  $S = \{(r, \theta); r \geq 0, -\alpha \leq \theta \leq \alpha\}$ , де  $\alpha = \pi - \beta$ ;  $r, \theta$  – полярні координати з полюсом у вершині клина і полярною віссю вздовж його бісектриси. Декартові координатні осі  $Ox$  і  $Oy$  вибрано вздовж осей симетрії ортотропного пружного середовища (рис. 1).

Компоненти напружень у плоскій задачі теорії пружності для ортотропної області виражено через комплексні потенціали  $\Phi_1^0(z_1)$  і  $\Phi_2^0(z_2)$  [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= -2 \operatorname{Re}\{\gamma_1^2 \Phi_1^0(z_1) + \gamma_2^2 \Phi_2^0(z_2)\}, \sigma_y^0 = 2 \operatorname{Re}\{\Phi_1^0(z_1) + \Phi_2^0(z_2)\}, \\ \tau_{xy}^0 &= 2 \operatorname{Im}\{\gamma_1 \Phi_1^0(z_1) + \gamma_2 \Phi_2^0(z_2)\}, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $z_k = x + i\gamma_k y$  ( $k=1,2$ );  $\gamma_1, \gamma_2$  – пружні характеристики, які можна подати через технічні сталі матеріалу (плоский напружений стан):

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{E_x}{G} - 2\nu_{xy} + 2\sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \right)^{1/2} \pm \left( \frac{E_x}{G} - 2\nu_{xy} - 2\sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \right)^{1/2} \right].$$

Тут верхній знак відповідає параметру  $\gamma_1$ , а нижній –  $\gamma_2$ ;  $E_x$  і  $E_y$  – модулі пружності вздовж осей  $x$  і  $y$ ;  $\nu_{xy}$  ( $\nu_{yx} = \nu_{xy} E_y / E_x$ ) і  $G$  – коефіцієнт Пуассона і модуль зсуву.

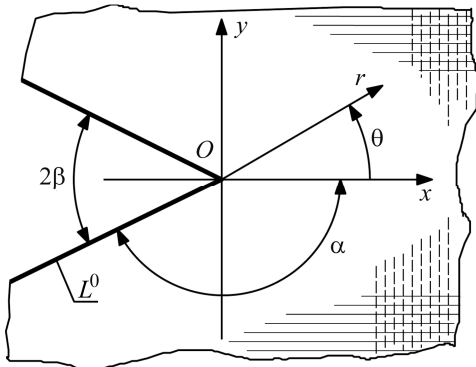


Рис. 1. Пружний ортотропний клин з кутом розхилу  $2\alpha$ .

Fig. 1. An elastic orthotropic wedge with apex angle  $2\alpha$ .

Розподіл сингулярних напружень у клині з вільними від навантажень гранями за симетричного навантаження описують потенціали [4]

$$\Phi_1^0(z_1) = \frac{R_2(\alpha)}{2[R_2(\alpha) - R_1(\alpha)]} \frac{\tilde{K}_1^V}{(2\pi z_1)^{\lambda_1}}, \quad \Phi_2^0(z_2) = -\frac{R_1(\alpha)}{2[R_2(\alpha) - R_1(\alpha)]} \frac{\tilde{K}_1^V}{(2\pi z_2)^{\lambda_1}}. \quad (2)$$

Тут  $\tilde{K}_1^V$  – коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у вершині клина; функції  $R_1(\alpha)$ ,  $R_2(\alpha)$  визначають співвідношення

$$R_k(\alpha) = (\cos^2 \alpha + \gamma_k^2 \sin^2 \alpha)^{1-\lambda_1/2} \cos(2 - \lambda_1)\beta_k(\alpha),$$

$$\beta_k(\alpha) = \pi + \arctg(\gamma_k \operatorname{tg} \alpha), \quad k=1,2;$$

показник особливості напружень  $\lambda_1$  – найменший дійсний корінь характеристичного рівняння

$$(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \operatorname{tg} \alpha - \gamma_2(1 + \gamma_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg}[(2 - \lambda)\beta_2(\alpha)] + \gamma_1(1 + \gamma_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg}[(2 - \lambda)\beta_1(\alpha)] = 0. \quad (3)$$

Тепер в ортотропному клині розглянемо кутовий виріз, закруглений у вершині по дузі кола радіуса  $\rho$  (такого ж кута розхилу) з вільним від напружень контуром  $L$  (рис. 2a).

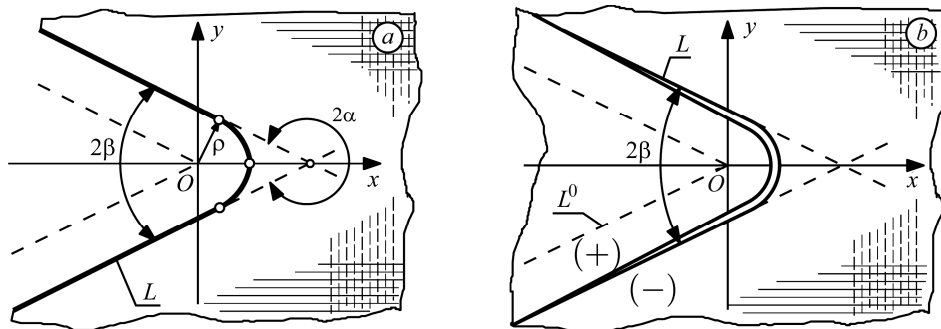


Рис. 2. Закруглений кутовий виріз з контуром  $L$  (a) і нескінченний виріз уздовж контуру  $L$  (b) в ортотропній площині.

Fig. 2. A rounded V-notch with contour  $L$  (a) and an infinite cut along contour  $L$  (b) in an orthotropic plane.

Нехай на нескінченності заданий асимптотичний розподіл поля напружень, який визначають потенціали  $\Phi_1^0(z_1)$ ,  $\Phi_2^0(z_2)$ . Крайову задачу для такої області розв'язуватимемо методом суперпозиції, шукаючи комплексні потенціали у вигляді

$$\tilde{\Phi}_1(z_1) = \Phi_1^0(z_1) + \Phi_1(z_1), \quad \tilde{\Phi}_2(z_2) = \Phi_2^0(z_2) + \Phi_2(z_2), \quad (4)$$

де другі доданки

$$\Phi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\phi_1'(\tau_1)}{\tau_1 - z_1} d\tau_1, \quad \Phi_2(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\phi_2'(\tau_2)}{\tau_2 - z_2} d\tau_2 \quad (5)$$

описують збурений напружений стан, викликаний закругленим кутовим вирізом. Тут  $L_1, L_2$  – контури у допоміжних комплексних площинах  $z_k = x + i\gamma_k y$  ( $k = 1, 2$ ), які відповідають контуру  $L$  у площині  $z = x + iy$ .

Для знаходження збуреного напруженого стану необхідно розв'язати крайову задачу для пружної площини, що містить закруглений кутовий виріз, на контурі  $L$  якого виконується крайова умова

$$\sigma_n + i\tau_{ns} = p(t), \quad t \in L,$$

а на нескінченності напруження відсутні. Тут

$$p(t) = -\operatorname{Re} \left[ (1 - \gamma_1^2) \Phi_1^0(t_1) + (1 - \gamma_2^2) \Phi_2^0(t_2) \right] - \frac{d\bar{t}}{dt} \operatorname{Re} \left[ (1 + \gamma_1^2) \Phi_1^0(t_1) + (1 + \gamma_2^2) \Phi_2^0(t_2) \right] + 2i \frac{d\bar{t}}{dt} \operatorname{Im} \left[ \gamma_1 \Phi_1^0(t_1) + \gamma_2 \Phi_2^0(t_2) \right], \quad (6)$$

де  $t_k = [(1 + \gamma_k)t + (1 - \gamma_k)\bar{t}] / 2$ ,  $k = 1, 2$ .

Оскільки напруження на нескінченності зникають, то такий збурений напружений стан можна отримати також в ортотропній площині з гладким симетричним криволінійним розрізом  $L$  (рис. 2b), береги розрізу якого завантажені самозрівноваженими нормальними ( $\sigma_n$ ) і дотичними ( $\tau_{ns}$ ) напруженнями

$$\sigma_n^+ + i\tau_{ns}^+ = \sigma_n^- + i\tau_{ns}^- = p(t), \quad t \in L, \quad (7)$$

де верхні індекси вказують на граничні значення на контурі  $L$  відповідних величин за підходу до нього зліва або справа. Саме таким способом і знайдемо розв'язок поставленої задачі.

Задовольняючи за допомогою потенціалів (4) крайові умови (7), приходимо до інтегрального рівняння [12, 13]

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} [K_1(\tau_1, t_1) \phi_1'(\tau_1) d\tau_1 + L_1(\tau_1, t_1) \overline{\phi_1'(\tau_1)} d\bar{\tau}_1] = P_1(t_1), \quad t_1 \in L_1, \quad (8)$$

яке треба розв'язати за додаткової умови

$$\int_{L_1} \phi_1'(\tau_1) d\tau_1 = 0. \quad (9)$$

Ядра і права частина рівняння (8) визначають формули

$$K_1(\tau_1, t_1) = \frac{i(\gamma_1 - \gamma_2)}{2} \left( \frac{1}{\tau_1 - t_1} \frac{dt_1}{dt} + \frac{1}{\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2} \frac{d\bar{t}_2}{dt} \right),$$

$$L_1(\tau_1, t_1) = \frac{i(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \left( \frac{1}{\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1} \frac{d\bar{t}_1}{dt} - \frac{1}{\tau_2 - t_2} \frac{dt_2}{dt} \right),$$

$$P_1(t_1) = P(t) = \frac{1}{2} \left[ (1 + \gamma_2) p(t) - (1 - \gamma_2) \overline{p(t)} \frac{d\bar{t}}{dt} \right],$$

де  $p(t)$  – відома функція (6). Невідому густину потенціалу  $\Phi_2(z_2)$  (5) знайдемо зі співвідношення [12]

$$2\gamma_2\phi'_2(t_2)dt_2 = -(\gamma_1 + \gamma_2)\phi'_1(t_1)dt_1 + (\gamma_1 - \gamma_2)\overline{\phi'_1(t_1)}d\bar{t}_1. \quad (10)$$

Параметричне рівняння контуру закругленого кутового вирізу  $L$  візьмемо у вигляді

$$t = \omega(\xi) = \rho \begin{cases} \sin\beta + (\zeta + \zeta_B)\cos\beta - i[\cos\beta - (\zeta + \zeta_B)\sin\beta], & -\infty < \zeta < -\zeta_B, \\ \cos\zeta + i\sin\zeta, & -\zeta_B \leq \zeta \leq \zeta_B, \\ \sin\beta - (\zeta - \zeta_B)\cos\beta + i[\cos\beta + (\zeta - \zeta_B)\sin\beta], & \zeta_B < \zeta < \infty, \end{cases}$$

де  $\zeta = \xi/(1 - \xi^2)^c$ ,  $-1 < \xi < 1$ ;  $\zeta_B = \pi/2 - \beta$  – кутова координата кінця дуги кола,  $c$  – довільне додатне число, вибране експериментально з умови найкращої збіжності числового розв'язку (тут  $c = 3/2$ ).

Розглянемо також гіперболічний виріз в ортотропній площині з кутом розхилу  $2\beta$  і таким самим радіусом закруглення у вершині. Параметричне рівняння контуру цього вирізу  $L_H$  запишемо у вигляді [14]

$$t = \omega(\xi) = \rho \left[ \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \cos(\xi\alpha)} \exp(i\xi\alpha) + \frac{1}{2} \cot^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right], \quad \alpha = \pi - \beta, \quad -1 < \xi < 1.$$

Параметричні рівняння контурів  $L_k$  (у допоміжних площинах  $z_k$ ) подамо так:

$$t_k = \omega_k(\xi) = \frac{1}{2} \left[ (1 + \gamma_k)\omega(\xi) + (1 - \gamma_k)\overline{\omega(\xi)} \right], \quad -1 < \xi < 1, \quad k = 1, 2.$$

Після заміни змінних

$$\tau = \omega(\xi), \quad t = \omega(\eta); \quad \tau_k = \omega_k(\xi), \quad t_k = \omega_k(\eta); \quad \phi'_1(t_1)\omega'_1(\eta) = \phi'_1(\eta) = u_1(\eta)/\sqrt{1 - \eta^2} \quad (11)$$

інтегральне рівняння (8) і додаткову умову (9) зведемо до канонічної безрозмірної форми. Отримавши його числовий розв'язок квадратурним методом [15, 16], компоненти напружень на берегах розрізу  $L$  знайдемо за формулами

$$\begin{aligned} \delta_x^\pm &= \sigma_x^0 - 2 \operatorname{Re} \left[ \gamma_1^2 \Phi_1^\pm(t_1) + \gamma_2^2 \Phi_2^\pm(t_2) \right], \quad \delta_y^\pm = \sigma_y^0 + 2 \operatorname{Re} \left[ \Phi_1^\pm(t_1) + \Phi_2^\pm(t_2) \right], \\ \tau_{xy}^\pm &= \tau_{xy}^0 + 2 \operatorname{Im} \left[ \gamma_1 \Phi_1^\pm(t_1) + \gamma_2 \Phi_2^\pm(t_2) \right], \end{aligned}$$

де напруження  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy}^0$  на контурі  $L$  визначають вирази (1) для  $z_1 = t_1$ ,  $z_2 = t_2$ , а граничні значення потенціалів  $\Phi_k(z_k)$  (5) – формули Сохоцького–Племеля [17]

$$\Phi_k^\pm(t_k) = \pm \frac{1}{2} \phi'_k(t_k) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\phi'_k(\tau_k)}{\tau_k - t_k} d\tau_k, \quad t_k \in L_k, \quad k = 1, 2.$$

Таким чином, використавши квадратурні формули [16], маємо:

$$\Phi_k^\pm(\omega_k(\eta_m)) = \frac{1}{2} \left[ \pm \frac{u_k(\eta_m)}{\omega'_k(\eta_m)\sqrt{1 - \eta^2}} + \frac{1}{2ni} \sum_{j=1}^{2n} \frac{u_k(\xi_j)}{\omega_k(\xi_j) - \omega_k(\eta_m)} \right],$$

де  $\eta_m = \cos \frac{\pi m}{2n}$ ,  $m = 1, \dots, 2n - 1$ ;  $\xi_j = \cos \frac{\pi(2j - 1)}{4n}$ ,  $j = 1, \dots, 2n$ .

Значення  $u_1(\xi_j)$  – розв'язок лінійної системи алгебричних рівнянь, яку отримали з інтегрального рівняння (8) з урахуванням умови симетрії задачі

$$u_1(-\xi) = -\overline{u_1(\xi)}.$$

Значення  $u_2(\xi_j)$  знайдемо з рівняння

$$u_2(\xi) = -\frac{1}{2\gamma_2} \left[ (\gamma_1 + \gamma_2)u_1(\xi) - (\gamma_1 - \gamma_2)\overline{u_1(\xi)} \right],$$

яке впливає зі співвідношень (10) і (11), якщо взяти до уваги залежності

$$\phi_2'(t_2)\omega_2'(\eta) = \phi_2'(\eta) = u_2(\eta)/\sqrt{1-\eta^2}.$$

Оскільки край вирізу вільний від навантажень ( $\tilde{\sigma}_n = \tilde{\tau}_{ns} = 0$ ) і сума нормальних напружень є інваріантом ( $\tilde{\sigma}_n + \tilde{\sigma}_s = \tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y$ ), для нормального напруження вздовж контуру вирізу отримуємо:

$$\tilde{\sigma}_s(\eta) = \tilde{\sigma}_s^-(\eta) = \tilde{\sigma}_x^-(\eta) + \tilde{\sigma}_y^-(\eta) = (2\pi\rho)^{-\lambda_1} \tilde{K}_I^V R_I(\eta),$$

де  $R_I(\eta)$  – безрозмірне нормальне напруження.

У вершині закругленого вирізу ( $\eta = 0$ )

$$\tilde{\sigma}_s(0) = (2\pi\rho)^{-\lambda_1} \tilde{K}_I^V R_I, \quad (12)$$

де  $R_I = R_I(0)$  – коефіцієнт впливу закруглення кутового вирізу на напруження у його вершині [7, 14], який залежить від кута розхилу вирізу, його форми в певному околі вершини, а також від пружних сталих анізотропного матеріалу. Співвідношення (12) для обмежених тіл має асимптотичний характер і тим точніше, що менший відносний радіус закруглення вершини вирізу. Його можна використовувати не тільки для оцінювання нормального напруження у вершині вирізу, а й для знаходження КІН у вершині гострого кутового вирізу зі співвідношення

$$\tilde{K}_I^V = \frac{1}{R_I} \lim_{\rho \rightarrow 0} [(2\pi\rho)^{\lambda_1} \tilde{\sigma}_s(0)], \quad (13)$$

що є аналогом відповідної залежності для ізотропного матеріалу [1].

**Числові результати.** Розрахунки зроблено для ортотропної пластини за плоского напруженого стану для чотирьох матеріалів (див. табл. 1). Розглянуто дві орієнтації кутового вирізу, коли модулі пружності  $E_x = E_1$  і  $E_2$ . Показник особливості напружень у вершині гострого вирізу  $\lambda_1$ , який знайдено з рівняння (3) для різних кутів розхилу  $2\beta$ , наведено в табл. 2.

**Таблиця 1. Механічні характеристики ортотропних матеріалів**

Матеріал	$E_2/E_1$	$G/E_1$	$\nu_{12}$	$E_x = E_1$		$E_x = E_2$	
				$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
$M_0$	1,0	0,375	0,33	1,0	1,0	1,0	1,0
$M_1$	0,082	0,081	0,45	3,2033	1,0902	0,9173	0,3122
$M_2$	0,074	0,041	0,31	4,8240	0,7642	1,3085	0,2073
$M_3$	0,284	0,110	0,29	2,8355	0,6623	1,5099	0,3527

**Примітка:**  $M_0$  – ізотропний матеріал;  $M_1$  – деревина (червоний дуб) [18];  $M_2$  – графітоепоксид AS4/3502 [19];  $M_3$  – склоепоксид SP-250/Ер [19].

Побудовано залежності коефіцієнта впливу закруглення кутового вирізу  $R_I$  від кута розхилу  $2\beta$  для закругленого кутового та гіперболічного вирізів, орієнтованих уздовж ( $E_x = E_1$ ) або впоперек ( $E_x = E_2$ ) волокон (рис. 3). Для вибраних значень кута  $2\beta$  ці результати для закругленого кутового вирізу наведено також у табл. 2, оскільки вони потрібні для обчислення КІН у вершині гострого кутового вирізу за формулою (13).

Для гіперболічного вирізу з малим кутом розхилу ( $2\beta = 1^\circ$ ) обчислені значення коефіцієнта впливу закруглення кутового вирізу  $R_H$  добре узгоджуються (відносна різниця менша за 0,1%) з аналітичним розв'язком

$$R_H = \sqrt{2} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2},$$

отриманим для параболічного вирізу [20]. Відносні різниці між безрозмірними коефіцієнтами концентрації напружень у вершинах гіперболічного та кутового закругленого вирізів досягають 10% і залежать від орієнтації вирізу та його кута розхилу.

**Таблиця 2. Показник особливості напружень  $\lambda_I$  та коефіцієнт  $R_I$  для кутового вирізу в ортотропній пластині (матеріали  $M_1, M_2$  і  $M_3$ ), коли модулі пружності  $E_x = E_1$  (чисельник) і  $E_x = E_2$  (знаменник)**

$2\beta$ , grad	$M_1$		$M_2$		$M_3$	
	$\lambda_I$	$R_I$	$\lambda_I$	$R_I$	$\lambda_I$	$R_I$
1	0,5000	1,956	0,5000	2,390	0,5000	2,845
	0,5000	6,201	0,5000	8,051	0,5000	5,110
5	0,5000	1,959	0,4999	2,393	0,5000	2,847
	0,5000	6,202	0,5000	8,052	0,4999	5,111
15	0,4987	1,966	0,4984	2,403	0,4994	2,853
	0,5000	6,203	0,5000	8,054	0,4999	5,113
30	0,4914	1,974	0,4907	2,412	0,4960	2,859
	0,4997	6,205	0,4997	8,056	0,4993	5,117
45	0,4758	1,973	0,4768	2,407	0,4882	2,855
	0,4991	6,205	0,4990	8,056	0,4976	5,115
60	0,4527	1,961	0,4579	2,389	0,4757	2,838
	0,4976	6,199	0,4975	8,047	0,4943	5,104
90	0,3863	1,901	0,4048	2,306	0,4341	2,746
	0,4898	6,140	0,4904	7,977	0,4795	5,020
120	0,2942	1,778	0,3243	2,126	0,3611	2,522
	0,4647	5,868	0,4707	7,688	0,4422	4,720
150	0,1709	1,540	0,1996	1,767	0,2326	2,037
	0,3761	4,708	0,4032	6,409	0,3389	3,721

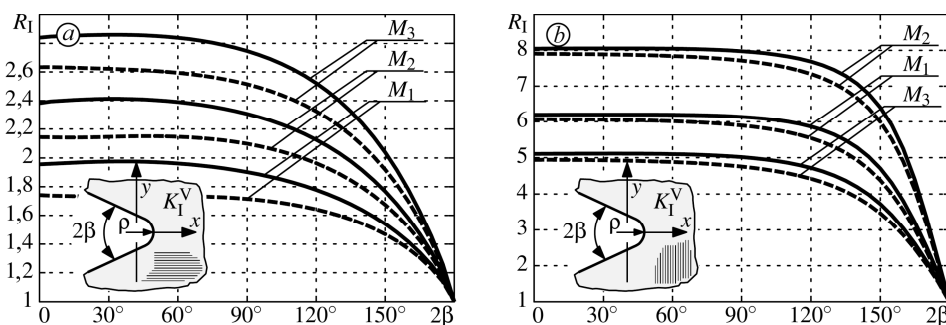


Рис. 3. Залежність коефіцієнта  $R_I$  від кута розхилу вирізу  $2\beta$  для ортотропних матеріалів з кутовим закругленим (суцільні криві) та гіперболічним (штрихові) вирізами, орієнтованими вздовж (а) або впоперек (б) волокон.

Fig. 3. Dependence of factor  $R_I$  on the notch opening angle  $2\beta$  for orthotropic materials with rounded V-shaped (solid lines) and hyperbolic (dashed lines) notches oriented along (a) or across (b) fibers.

Отриманий коефіцієнт  $R_1$  для ортотропного матеріалу порівняно (рис. 4) з таким самим коефіцієнтом  $\bar{R}_1$  для ізотропного залежно від кута розхилу кутового закругленого та гіперболічного вирізів. Числові результати для ізотропного матеріалу  $M_0$  одержано для параметрів  $\gamma_1 = 1,001$ ,  $\gamma_2 = 0,999$ . Значення коефіцієнта  $\bar{R}_1$  ідентичні до визначених раніше [7, 21].

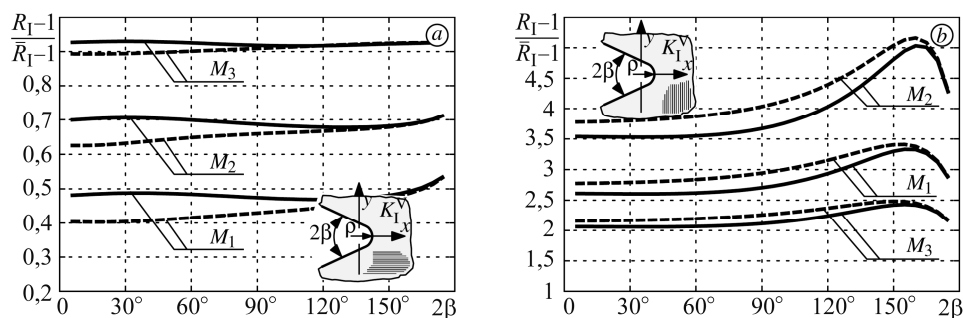


Рис. 4. Залежність відношення  $(R_1 - 1) / (\bar{R}_1 - 1)$  від кута розхилу  $2\beta$  для кутового закругленого (суцільні криві) та гіперболічного (штрихові) вирізів, орієнтованих уздовж (а) або впоперек (б) волокон.

Fig. 4. Dependence of relation  $(R_1 - 1) / (\bar{R}_1 - 1)$  on the notch opening angle  $2\beta$  for rounded V-shaped (solid lines) and hyperbolic (dashed lines) notches oriented along (a) or across (b) fibers.

## ВИСНОВКИ

Розроблено єдиний підхід до розв'язування двовимірних задач про концентрацію напружень біля гострих та закруглених кутових вирізів у пружному ортотропному тілі за симетричного навантаження. Методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано залежності між коефіцієнтом концентрації напружень у вершині напівнескінченного кутового закругленого та гіперболічного вирізів та КІН для відповідного гострого вирізу. Ці залежності можна інтерпретувати як асимптотичні розв'язки для скінченних тіл з вирізами малого радіуса закруглення.

**РЕЗЮМЕ.** Методом сингулярних інтегральних уравнений получено решение плоской задачи теории упругости для ортотропной плоскости с полубесконечным угловым закругленным вырезом при симметричном нагружении. На этой основе найдена зависимость между коэффициентом интенсивности напряжений (КИН) в вершине острого углового выреза и нормальным напряжением в вершине соответствующего закругленного выреза. Для ограниченных тел с угловыми вырезами полученное решение является асимптотической зависимостью для малых радиусов закругления их вершин. Такое соотношение можно использовать в граничных переходах для получения КИН в вершинах острых вырезом на основе решений для соответствующих закругленных концентраторов напряжений.

**SUMMARY.** The solution of elastostatics problem for the plane with a semi-infinite rounded V-notch under symmetric loading was obtained by means of singular integral equation method. Based on this solution, the relationships between the stress intensity factor at the sharp V-notch vertex and normal stress at the vertex of the corresponding rounded notch were found. For finite bodies with V-notches a resulting solution is the asymptotic dependence for small rounded radii of the vertices. Presented relationship can be used for performing the limit transition to find the stress intensity factor at the vertices of sharp V-notches, based on the solutions for the corresponding rounded stress concentrators.

**Робота виконана за проектом № 2011/03/B/ST8/06456, що фінансується Національним центром науки (Польща).**

1. Саврук М. П., Казберук А. Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. пос. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Сполом, 2012. – Т. 14. – 384 с.

2. *Berto F. and Lazzarin P.* Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches // *Mater. Sci. Eng. R.* – 2014. – **75**, № 1. – P. 1–48.
3. *Radaj D.* State-of-the-art review on extended stress intensity factor concepts // *Fat. Fract. Eng. Mater. Struct.* – 2014. – **37**, № 1. – P. 1–28.
4. *Саврук М. П., Казберук А.* Плоскі задачі теорії пружності на власні значення для ортотропного та квазіортотропного клинів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2014. – **50**, № 6. – С. 7–14.  
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Plane eigenvalue problems of the elasticity theory for orthotropic and quasi-orthotropic wedges // *Materials Science.* – 2015. – **50**, № 6. – P. 771–781.)
5. *Zappalorto M. and Carraro P. A.* An engineering formula for the stress concentration factor of orthotropic composite plates // *Composites.* – 2015. – **B68**. – P. 51–58.
6. *Zappalorto M. and Carraro P. A.* Stress distributions for blunt cracks and radiused slits in anisotropic plates under in-plane loadings // *Int. J. Solids Struct.* – 2015. – **56–57**. – P. 136–141.
7. *Саврук М. П., Казберук А.* Зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих і закруглених кутових вирізів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2006. – **42**, № 6. – С. 17–26.  
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches // *Materials Science.* – 2006. – **42**, № 6. – P. 725–738.)
8. *Саврук М. П., Казберук А.* Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов // *Прикл. механика.* – 2007. – **43**, № 2. – С. 70–87.  
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* A unified approach to problems of stress concentration near V-shaped notches with sharp and rounded tip // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, № 2. – P. 182–196.)
9. *Саврук М. П., Казберук А.* Единый подход к решению задач о распределении напряжений около острых и закругленных угловых вырезов // *Актуальные проблемы механики сплошной среды.* – Ереван: Ереванск. гос. ун-т архитектуры и строительства, 2007. – С. 359–363.
10. *Kazberuk A.* Dwuwymiarowe zagadnienia mechaniki pękania ciał z korbami. – Białystok: Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, 2010. – 242 s.
11. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
12. *Ioakimidis N. I. and Theocaris P. S.* The problem of the simple smooth crack in an infinite anisotropic elastic medium // *Int. J. Solids Struct.* – 1977. – **13**, № 4. – P. 269–278.
13. *Саврук М. П., Казберук А.* Криволінійні тріщини в анізотропній площині та граничний перехід до виродженого матеріалу // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2014. – **50**, № 2. – С. 32–40.  
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Curvilinear cracks in anisotropic plane and limit passage to the degenerate material // *Materials Science.* – 2014. – **50**, № 2. – P. 189–200.)
14. *Benthem J. P.* Stresses in the region of rounded corners // *Int. J. Solids Struct.* – 1987. – **23**, № 2. – P. 239–252.
15. *Erdogan F., Gupta G. D., and Cook T. S.* Numerical solutions of singular integral equations // *Methods of analysis and solutions of crack problems.* – Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973. – P. 368–425.
16. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
17. *Мухомелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
18. *Kretschmann D. E.* Mechanical properties of wood // *Wood Handbook: Wood as an Engineering Material*, USDA – Madison: Forest Service, 2010. – P. 5.1–5.46.
19. *Tan S. C.* Stress Concentrations in Laminated Composites. – Lancaster: Technomic, 1994. – 482 p.
20. *Саврук М. П., Казберук А., Онишко Л. Й.* Вплив анізотропії матеріалу на розподіл напружень біля параболічного вирізу // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2015. – **51**, № 6. – С. 24–33 .
21. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Two-dimensional fracture mechanics problems for solids with sharp and rounded V-notches // *Int. J. Fract.* – 2010. – **161**, № 1. – P. 79–95.

*Одержано 20.10.2015*