

УДК 539.431:624.072

## РОБОЧА ДОВЖИНА ВИСОКОМОДУЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ ЗА ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ЦИКЛІЧНИХ СИЛ В УМОВАХ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ

М. М. КУНДРАТ

*Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне*

Досліджено відшарування тонкого жорсткого включення за умов плоскої задачі під час навантаження неперервними та циклічними зосередженими силами. Отримано його робочу довжину, яка залежить від кількості циклів, мінімального та максимального навантаження за цикл, енергії відшарування одиниці довжини включення, міцнісних та пружних характеристик матриці, відстані до прикладених сил. Обчислено робочу довжину для окремих характеристик композиції та навантажень.

**Ключові слова:** включення, відшарування, зона передруйнування, робоча довжина, кількість циклів.

Проблема руйнування матеріалів за циклічного навантаження та визначення залишкового ресурсу є важливою і актуальною як з наукового, так і прикладного боку. Основні зусилля спеціалісти у галузі циклічної втоми досі зосереджували на аналізі тіл з тріщинами, результати яких узагальнено в низці монографій. Серед підходів найефективнішими виявилися енергетичні, в основу яких покладено, що дисипація енергії пластичного деформування у зоні передруйнування біля вершини тріщини дорівнює енергії руйнування на розраховуваній ділянці.

З огляду на вищу концентрацію напружень поблизу гострокінцевих дефектів, заповнених іншим матеріалом, зокрема й жорстких включень, пластичне деформування та руйнування у таких композиціях мають істотні відмінності від аналогічних явищ у тілах з тріщинами та пористими концентраторами напружень, що робить актуальними дослідження кінетики їх відшарування.

**Огляд досліджень.** Поля напружень і переміщень в околі жорстких включень вивчали раніше, їх подання за сталого навантаження вперше опубліковано в працях [1–3], а найповніший огляд досліджень виконано в монографії [4]. Спільною рисою отриманих суто пружних розв'язків є механічно некоректна коренева сингулярність напружень в околі вершин включень. Дотичні напруження  $\tilde{\sigma}_{xy}$  на включенні та нормальні  $\tilde{\sigma}_{yy}$  на його продовженні (рис. 1а) містять в околах вершини кореневі сингулярності. Тут і далі  $\sigma_{ij}$  – компоненти тензора напружень,  $\tilde{\sigma}_{ij} \equiv \sigma_{ij} / \tau_s^*$ , де  $\tau_s^*$  – зсувна міцність межі поділу.

Внаслідок підвищеної неоднорідності напруженого стану біля включень слід очікувати [3, 5] більших пластичних деформацій порівняно з тріщинами чи гострокінцевими отворами. Дослідні результати свідчать [6, 7], що пластична текучість починається біля кутів на торцях включення і зі збільшенням навантаження поширюється уздовж поверхні поділу до його центральної частини. Аналітичні розв'язки плоских задач для лінійного включення з зонами передруйнування, які моделюють локалізованими тонкими прошарками, отримано в працях [8–10]. Особливість напружень в околі вершин включення у цих розв'язках змінилася із коре-

невої на логарифмічну, що є певним поліпшенням фізичної адекватності моделі: дотичні напруження в околі вершин включення мають розрив першого роду (рис. 1b), а нормальні – логарифмічну сингулярність. В аналогічному формулюванні досліджували [11] просторову задачу для дископодібного жорсткого включення.

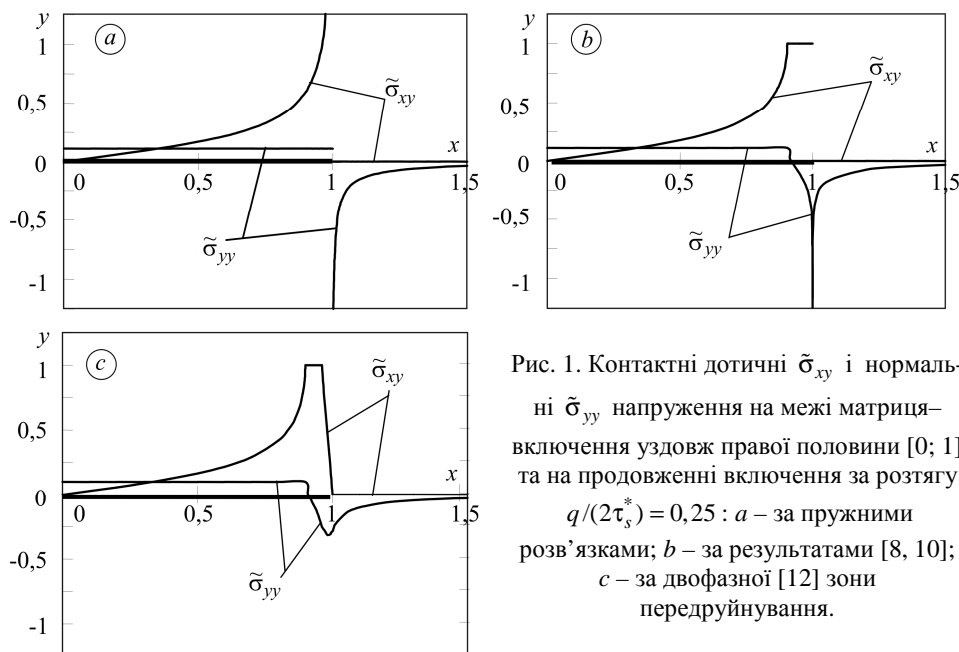


Рис. 1. Контактні дотичні  $\tilde{\sigma}_{xy}$  і нормальні  $\tilde{\sigma}_{yy}$  напруження на межі матриця–включення уздовж правої половини  $[0; 1]$  та на продовженні включення за розтягу  $q/(2\tau_s^*) = 0,25$  : *a* – за пружними розв’язками; *b* – за результатами [8, 10]; *c* – за двофазної [12] зони передруйнування.

Fig. 1. Contact tangential  $\tilde{\sigma}_{xy}$  and normal  $\tilde{\sigma}_{yy}$  stresses at a matrix-inclusion boundary along a right half  $[0; 1]$  and at the continuation of the inclusion under tension  $q/(2\tau_s^*) = 0.25$  : *a* – by elastic solutions; *b* – by results [8, 10]; *c* – for two-phase [12] process zone.

Сформульовано [12, 13] нову модельну постановку, де математична модель деформування тіла з включенням передбачає двофазну зону передруйнування, яка складається зі спричиненої високою концентрацією пружних напружень ділянки розпушення та області пластичного зсуву чи адгезії. Це дало змогу отримати вищий рівень фізичної адекватності моделі та уникнути внаслідок цього сингулярності напружень в околах вершин включення, одержавши природним чином як на включенні (рис. 1c), так і в усіх точках композиції механічно коректні обмежені напруження. Максимального значення дотичні напруження досягають [12] в околах кінців включення і саме тут йому передається більша частина навантаження від матриці. За межами деякого околу біля країв вони швидко зменшуються і в середній частині рівні нулю (рис. 2). Прийнята схема узгоджується як з експериментальними результатами [14, 6], так і числовими розрахунками [15].

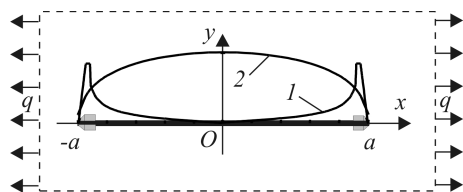


Рис. 2. Дотичні напруження  $\tilde{\sigma}_{xy}$  на межі включення–матриця (1) та розривні  $\tilde{\sigma}_{xx}$  в перерізі включення (2) за одновісного розтягу.

Fig. 2. Tangential stresses  $\tilde{\sigma}_{xy}$  at the inclusion-matrix boundary (1) and rupture  $\tilde{\sigma}_{xx}$  stresses in the inclusion cross-section (2) under uniaxial tension.

Отримані результати дали можливість виявити [13] два найочікуваніших механізми локального руйнування в композиції залежно від механічних та міцніс-

них характеристик включення, матриці, контактної межі та від довжини включення. За довжини включення меншій від  $2a_{cr}^*$  відбуватиметься його відшарування, за більшої від  $2a_{cr}^*$  – розрив.

Аналізу особливостей втомного відшарування високомодульного включення присвячені праці [16–18]. Нижче з використанням енергетичного підходу отримано аналітичний розв’язок задачі про відшарування жорсткого лінійного включення в однорідній ізотропній матриці за сталого, неперервного та циклічного навантажень зосередженими силами.

**Формулювання задачі.** Розглядаємо в умовах плоскої задачі композицію з пружно-пластичної матриці та лінійного жорсткого включення завдовжки  $2a$  ( $2a < 2a_{cr}^*$ ), віднесено до системи координат  $xOy$  (рис. 3а). Матеріали матриці та контактної межі матриця–включення вважаємо рівноміцними. Обмеження на довжину включення виключає можливість його руйнування розривом. Композиція навантажена у точках  $x = \pm l$ ,  $y = 0$  зосередженими циклічними силами  $Q = Q_0 + \Delta Q \sin \omega t$  ( $Q \geq 0$ ) на продовженні лінії включення, де  $\omega$  – кругова частота. Впливом зон нелінійності біля точок прикладання сил нехтуємо, що допустимо за достатнього їх віддалення від кінців включення. Вважаємо, що інерційні та теплотвірні ефекти неістотні. Оскільки околиці вершин включення є місцями найінтенсивнішого локального деформування, то саме тут зароджуються локалізовані зони передруйнування, які, просуваючись до центральної частини уздовж межі матриця–включення, охоплюють вершини включення [10]. Вони можуть імітувати області накопичення пошкоджень, розрив адгезійного зв’язку, проковзування тощо. За певної комбінації значень амплітуди та кількості циклів навантаження включення відшаровується від матриці за механізмом поперечного зсуву. Довжину включення без відшарованих на кінцях частин позначаємо через  $2a_{wr}$  і називаємо робочою довжиною включення (рис. 3б). Коефіцієнт тертя на ділянках  $L_2 \approx a_{wr} < |x| \leq a$ , де відбулося розшарування між включенням та матеріалом матриці, приймаємо рівним нулю.

Необхідно знайти (рис. 3б) аналітичні залежності зміни робочої довжини включення  $a_{wr}$  від кількості циклів  $n$ , мінімального  $Q_{min}$  та максимального  $Q_{max}$  навантаження за цикл, енергії відшарування одиниці довжини включення  $\gamma_t^*$ , міцнісної  $\tau_s^*$  та пружних  $\nu$ ,  $G$  характеристик, відстані до точок прикладання сил  $l$ . Отримані розрахункові формули будуть справедливими за допущення суперпозиції зовнішніх силових, температурних та інших чинників.

Спочатку розглядаємо відповідну крайову задачу для композиції з включенням ( $a_{wr} = a$ ) за дії сталих зосереджених сил  $Q$  за таких крайових умов. На проміжку  $L_1 \approx |x| \leq c_{wr}$  ( $c_{wr} = c$ ) включення бездефектно зв’язане з матрицею і тому поздовжні деформації там відсутні:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = 0 \quad (x \in L_0). \quad (1)$$

У зонах передруйнування дотичні напруження досягають свого граничного значення

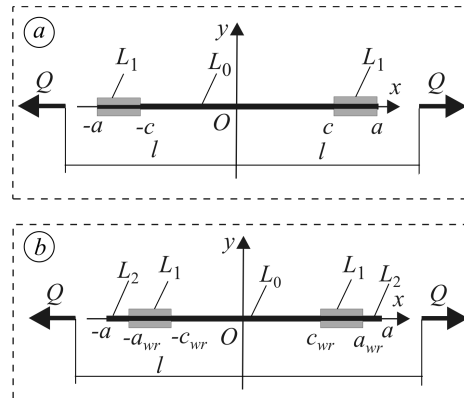


Рис. 3. Схема задачі до (а) та під час (б) відшарування включення.

Fig. 3. Scheme of the problem before (a) and during (b) the inclusion lamination.

$$\sigma_{xy}^+(x) = -\sigma_{xy}^-(x) = \tau_s^* \text{sign}(x) \quad (x \in L_1). \quad (2)$$

Поза межами робочої довжини включення

$$\sigma_{xy}(x) = 0 \quad (|x| > a_{wr}, \quad y = 0). \quad (3)$$

Умова неперервності напружень в околах вершин зон передруйнування така:

$$\sigma_{xy}(x, 0) \rightarrow \tau_s^* \quad (x \rightarrow c_{wr} - 0). \quad (4)$$

Для розв'язування задачі (1)–(4) використовуємо відомі [1] подання Колосова–Мусхелішвілі для напружень і деформацій:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\text{Re}\Phi(z), \quad \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) - \kappa\Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (5)$$

$$2G(\partial u / \partial x + i\partial v / \partial x) = 2\kappa\text{Re}\Phi(z) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad z = x + iy, \quad (6)$$

де  $\kappa = 3 - 4\nu$  для плоскої деформації та  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  за умов плоского напруженого стану.

Функцію напружень  $\Phi(z)$  знайдемо після підстановки формул (5), (6) у крайові умови (1)–(4) та розв'язання відповідної задачі спряження з кусково-неперервними коефіцієнтами

$$\Phi(z) = (\tau_s^* / \pi(\kappa + 1)) \ln \Gamma_1(z, a_{wr}, c_{wr}), \quad (7)$$

$$\Gamma_1(z, a_{wr}, c_{wr}) = \left[ \zeta^+(z) / \zeta^-(z) \right], \quad \zeta^\pm(z) = a_{wr} \sqrt{z^2 - c_{wr}^2} \pm z \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2},$$

$$Q / (2\tau_s^*) - \sqrt{l^2 - c_{wr}^2} \ln \left[ \left( a_{wr} + \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2} \right) / c_{wr} \right] = 0. \quad (8)$$

Формули (5)–(8) цілком описують поля напружень та деформацій у тілі з включенням за заданим навантаженням і дають можливість дослідити умови його руйнування. Рівняння (8), отримане із забезпечення умови (4), описує зв'язок між довжиною зон передруйнування, навантаженням та відстанню до прикладених сил.

У зонах передруйнування відбуваються зміщення точок матеріалу матриці стосовно включення, які, згідно з виразами (6), (8), визначають за формулою

$$u(x, a_{wr}) = \frac{\kappa \tau_s^* l}{\pi G(\kappa + 1)} \{ a_{wr} \Gamma_2(x, a_{wr}, c_{wr}) + x \Gamma_1(x, a_{wr}, c_{wr}) \}, \quad c_{wr} \leq |x| \leq a_{wr}, \quad (9)$$

$$\Gamma_2(x, a_{wr}, c_{wr}) = \ln \left[ \eta^-(x) / \eta^+(x) \right], \quad \eta^\pm(x) = \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2} \pm \sqrt{x^2 - c_{wr}^2}.$$

Їхні найбільші значення  $\tilde{u}(t) = Gu(t) / (\tau_s^* a_{wr})$  досягаються (рис. 4) в околах вершин ( $x = \pm a_{wr}$ ). Їх обчислюємо за формулою

$$u(a_{wr}) \equiv u(a_{wr}, a_{wr}) = \lim_{x \rightarrow a_{wr}} u(x, a_{wr}) = \frac{2\kappa \tau_s^* a_{wr}}{\pi G(\kappa + 1)} \ln \frac{a_{wr}}{c_{wr}}. \quad (10)$$

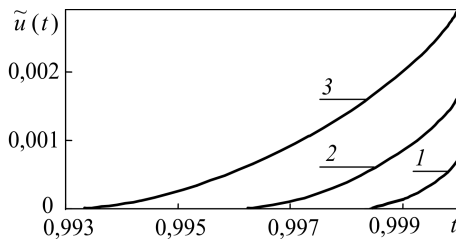


Рис. 4. Переміщення по довжині зони передруйнування  $t \equiv x/a_{wr}$  за фіксованого навантаження  $\tilde{Q} \equiv Q/(2a_{wr}\tau_s^*)$ :  $1 - \tilde{Q} = 0,1$ ,

$$c_{wr}/a_{wr} = 0,9983; \quad 2 - \tilde{Q} = 0,15,$$

$$c_{wr}/a_{wr} = 0,9963; \quad 3 - \tilde{Q} = 0,2,$$

$$c_{wr}/a_{wr} = 0,9983.$$

Fig. 4. Displacement along the process zone length  $t \equiv x/a_{wr}$  under fixed loading  $\tilde{Q} \equiv Q/(2a_{wr}\tau_s^*)$ :  $1 - \tilde{Q} = 0.1$ ,  $c_{wr}/a_{wr} = 0.9983$ ;  $2 - \tilde{Q} = 0.15$ ,  $c_{wr}/a_{wr} = 0.9963$ ;  $3 - \tilde{Q} = 0.2$ ,  $c_{wr}/a_{wr} = 0.9983$ .

За досягнення максимальними переміщеннями  $u(a_{wr})$  граничної межі  $\delta_{2c}$  настає ймовірність розшарування, тобто втрата зв'язку між включенням та матрицею за умови

$$u(a_{wr}) = \delta_{2c}. \quad (11)$$

Найменше навантаження  $Q=Q^*$ , за досягнення якого реалізується умова (11), називаємо граничним навантаженням. Його значення обчислюємо з системи рівнянь (8), (10), (11), а в першому наближенні ( $\varepsilon \ll 1$ ,  $\varepsilon = (a_{wr} - c_{wr})/a_{wr}$ ) оцінюємо за формулою

$$Q^* = 2\sqrt{l^2 - a_{wr}^2} \sqrt{\pi(\kappa+1)G\delta_{2c}\tau_s^*/(\kappa a)}. \quad (12)$$

Отримані співвідношення придатні для експериментальної механіки руйнування, оскільки за відомими довжиною зони передруйнування та граничним навантаженням можна оцінити граничні розриви переміщень  $\delta_{2c}$  чи енергію відшарування для конкретних композицій.

**Автономність зон передруйнування.** Нехай робоча довжина включення значно більша проти параметра  $\delta_{2c}$  та довжини зони передруйнування:

$$a_{wr} \gg \delta_{2c}, \quad a_{wr} - c_{wr} \ll a_{wr}. \quad (13)$$

Включення, для яких справедливі такі нерівності, називаємо макроскопічними. Покажемо, що для них виконується гіпотеза автономності кінцевої області, тобто в стані граничної рівноваги ( $u(a_{wr}) = \delta_{2c}$ ) розмір зони передруйнування не залежить від діючого навантаження та робочої довжини включення. За виконання умов (13) формулу (10) з точністю до величин порядку  $\varepsilon^2$  можна подати так:

$$u(a_{wr}) = 2\kappa\tau_s^*a_{wr}\varepsilon/(\pi G(\kappa+1)).$$

Якщо навантаження відповідає гранично рівноважному стану стосовно відшарування включення ( $Q = Q^*$ ), то існує умова (11) і звідси

$$a_{wr} - c_{wr} = \pi G(\kappa+1)\delta_{2c}/(2\kappa\tau_s^*).$$

Тобто довжина зони передруйнування в гранично рівноважному стані не залежить від навантаження та розміру включення, а лише від пружних та міцнісних характеристик, а отже, для макроскопічних включень справедлива гіпотеза їх автономності. Довжину макроскопічного включення оцінюємо за порівнянням результатів розрахунків граничного навантаження його відшарування з системи рівнянь (8), (10), (11) – точний розв'язок та формулою (12) – перше наближення. При  $G\delta_{2c}/(\tau_s^*a_{wr}) < 0,16$  розбіжність між двома прогнозами не виходить за межі 5%, тому з такою похибкою при  $a_{wr} > 6G\delta_{2c}/\tau_s^*$  включення можна вважати макроскопічним.

**Відшарування за неперервного навантаження.** Для побудови рівняння відшарування включення використовуємо енергетичний критерій, який передбачає існування критичного значення енергії  $W_f$ , необхідної для того, щоб робоча довжина включення зменшилася на одиницю довжини. Тоді для зменшення робочої довжини включення  $a_{wr}$  на величину  $\delta a_{wr}$  дисипація енергії повинна досягти значення  $W_f = \eta_1 \gamma_{\tau f}^* \delta a_{wr}$ , де  $\gamma_{\tau f}^*$  – густина енергії відшарування;  $\eta_1$  – поправковий коефіцієнт. Зі зменшенням робочої довжини на деяку величину  $\delta a_{wr}$  напруження на відповідному переміщенні виконують роботу

$$W = \int_{a_{wr}-d-\delta a_{wr}}^{a_{wr}-\delta a_{wr}} 2\sigma_{xy}(x) [u(x, a_{wr} - \delta a_{wr}, Q + \delta Q) - u(x, a_{wr}, Q)] dx,$$

де  $d = a_{wr} - c_{wr}$ . За схемою [17] подаємо функцію  $u(x, a_{wr} - \delta a_{wr})$  у вигляді ряду

Тейлора за степенями  $\delta a_{wr}$ , знехтуємо доданками порядку  $(\delta a_{wr})^2$  та спрямуємо  $\delta a_{wr}$  до нуля, вважаючи параметр  $a_{wr}$  залежним від навантаження. Тоді отримаємо:

$$W = 2\tau_s^* \frac{d}{da_{wr}} \int_{c_{wr}}^{a_{wr}} x \frac{\partial u(x, a_{wr}, Q)}{\partial x} dx - 2\tau_s^* a_{wr} \frac{du(a_{wr}, a_{wr}, Q)}{da_{wr}}. \quad (14)$$

Трансцендентне щодо довжини смуг  $a_{wr} - c_{wr}$  рівняння (8) використаємо в неявному вигляді

$$f[\varphi_1(\tilde{Q}), \varphi_2(\tilde{Q}), \tilde{Q}] = 0,$$

де  $\varphi_1(\tilde{Q}) = c_{wr}/l$ ,  $\varphi_2(\tilde{Q}) = l/a_{wr}$ ,  $\tilde{Q} \equiv Q/(2\tau_s^* a_{wr})$ , при цьому  $\varphi_1(\tilde{Q}) \cdot \varphi_2(\tilde{Q}) = c_{wr}/a_{wr}$ . Тоді із формули (14)

$$2\tau_s^* \frac{d}{da_{wr}} R(\varphi_1(\tilde{Q}), \varphi_2(\tilde{Q}), a_{wr}) + 2\tau_s^* u(a_{wr}, a_{wr}, \tilde{Q}) = \eta_1 \gamma_{tf}^*, \quad (15)$$

$$\text{де } R(\varphi_1(\tilde{Q}), \varphi_2(\tilde{Q}), a_{wr}) = \frac{\kappa \tau_s^* a_{wr}^2}{\pi G(\kappa + 1)} [2 \ln(\varphi_1 \varphi_2) + s_1(\tilde{Q}) \sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2}],$$

$$\frac{dR}{da_{wr}} = \frac{\partial R}{\partial a_{wr}} + \frac{\partial R}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{Q}} \frac{d\tilde{Q}}{da_{wr}} + \frac{\partial R}{\partial \varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{Q}} \frac{d\tilde{Q}}{da_{wr}}, \quad \varphi_1 = \varphi_1(\tilde{Q}), \varphi_2 = \varphi_2(\tilde{Q}),$$

$$R = R(\varphi_1(\tilde{Q}), \varphi_2(\tilde{Q}), a_{wr}), \quad \frac{\partial R}{\partial \varphi_1} = a_{wr}^2 \tilde{Q} \frac{\sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2} - \varphi_1^2 \varphi_2^2 s_1(\tilde{Q})}{\varphi_1^2 \sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2}},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi_2} = \frac{\kappa \tau_s^* a_{wr}^2}{\pi G(\kappa + 1)} \frac{\sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2} - \varphi_1^2 \varphi_2^2 s_1(\tilde{Q})}{\varphi_2^2 \sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2}},$$

$$s_1(\tilde{Q}) = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2}}{\varphi_1 \varphi_2}\right), \quad s_2(\tilde{Q}) = \varphi_1^2 - 1 - s_1(\tilde{Q}) \varphi_1^2 \sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2},$$

$$\partial \varphi_1 / \partial \tilde{Q} = \sqrt{(1 - \varphi_1^2)(1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2)} / (a_{wr} \varphi_2 s_2(\tilde{Q})),$$

$$\partial \varphi_2 / \partial \tilde{Q} = -\sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2} / (a_{wr} \sqrt{1 - \varphi_1^2}).$$

Після відносно громіздких перетворень формулу (15) подамо у вигляді

$$\frac{\kappa a_{wr}}{G(\kappa + 1)} \left\{ 2A_1(\varphi_1, \varphi_2) + \frac{1}{\varphi_2} \frac{B_1(\varphi_1, \varphi_2)}{C_1(\varphi_1, \varphi_2)} \frac{d\tilde{Q}}{da_{wr}} \right\} = \pi \frac{\eta_1 \gamma_{tf}^*}{\tau_s^*},$$

$$\text{де } A_1(\varphi_1, \varphi_2) = \ln(\varphi_1 \varphi_2) + s_1(\tilde{Q}) \sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2}, \quad C_1(\varphi_1, \varphi_2) = s_2(\tilde{Q}) \varphi_1 \sqrt{1 - \varphi_1^2},$$

$$B_1(\varphi_1, \varphi_2) = (1 - \varphi_1^2 - s_2(\tilde{Q}) \varphi_1) \left( \sqrt{1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2} - s_1(\tilde{Q}) \varphi_1^2 \varphi_2^2 \right).$$

Звідси шуканий зв'язок між робочою довжиною включення та навантаженням подаємо у вигляді задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку:

$$\frac{da_{wr}}{d\tilde{Q}} = R_1(\varphi_1, \varphi_2), \quad a_{wr}(\tilde{Q} = 0) = a_0, \quad (16)$$

$$\text{де } R_1(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\pi \kappa g_c a_{wr} B_1(\varphi_1, \varphi_2)}{\varphi_2 C_1(\varphi_1, \varphi_2) (\kappa + 1 - 2\pi \kappa g_c a_{wr} A_1(\varphi_1, \varphi_2))}, \quad g_c \equiv (\tau_s^*)^2 / (\pi^2 G \eta_1 \gamma_{tf}^*),$$

$a_0$  – початкова робоча довжина включення.

**Відшарування за циклічного навантаження.** Диференціальне рівняння задачі Коші (16) використаємо для розв'язання задачі про відшарування включення

за циклічного навантаження. Приймаємо, що воно відбувається під час кожного періоду навантаження, а за розвантаження робоча довжина включення не змінюється. Інтегруючи рівняння (16) від мінімального  $\tilde{Q}_{\min}$  до максимального  $\tilde{Q}_{\max}$  навантаження та вважаючи параметр  $a_{wr}$  сталим упродовж одного циклу, отримуємо зменшення робочої довжини включення протягом одного циклу на  $\Delta a_{wr} = \int_{\tilde{Q}_{\min}}^{\tilde{Q}_{\max}} R_1(\varphi_1, \varphi_2) d\tilde{Q}$ . Звідси швидкість відшарування включення подаємо виразом

$$\frac{da_{wr}}{dn} = \int_{\tilde{Q}_{\min}}^{\tilde{Q}_{\max}} R_1(\varphi_1, \varphi_2) d\tilde{Q} \equiv R_2(\tilde{Q}_{\max}, \tilde{Q}_{\min}, a_{wr}),$$

де  $n$  – кількість циклів навантаження. Після інтегрування залежність між робочою довжиною включення та кількістю циклів така:

$$n = \int_{a_0}^{a_n} \frac{da_{wr}}{R_2(\tilde{Q}_{\max}, \tilde{Q}_{\min}, a_{wr})}, \quad (17)$$

де  $a_n$  – значення параметра  $a_{wr}$  через  $n$  циклів. Швидкість відшарування (рис. 5) істотно залежить як від початкової довжини включення, так і максимального навантаження за цикл. При цьому повного відшарування не відбувається, включення в середній частині залишається зв'язаним з матрицею. Що менша початкова робоча довжина включення, то повільніше (рис. 5b) проходить відшарування.

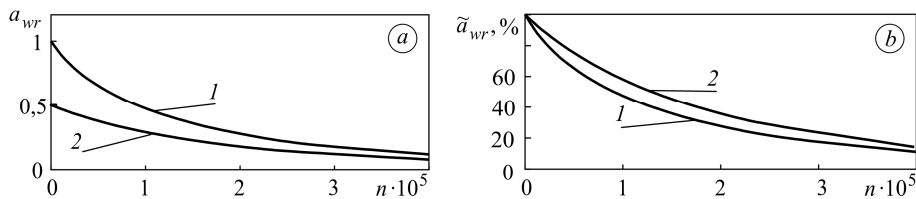


Рис. 5. Робоча (a) та відносна (b) довжини включення  $\tilde{a}_{wr} = a_{wr} \cdot 100\% / a_0$  залежно від кількості циклів навантаження:  $\tilde{Q}_{\min} = 0,1$ ,  $\tilde{Q}_{\max} = 0,2$ ,  $\kappa = 2,2$ ,  $g_c = 1$ ,  $l = 2$ ; 1 –  $a_0 = 1$ , 2 –  $a_0 = 0,5$ .

Fig. 5. Working (a) and relative (b) lengths  $\tilde{a}_{wr} = a_{wr} \cdot 100\% / a_0$  of inclusion depending on the number of loading cycles:  $\tilde{Q}_{\min} = 0,1$ ,  $\tilde{Q}_{\max} = 0,2$ ,  $\kappa = 2,2$ ,  $g_c = 1$ ,  $l = 2$ ; 1 –  $a_0 = 1$ , 2 –  $a_0 = 0,5$ .

## ВИСНОВКИ

Запропоновано розрахункову модель відшарування тонкого жорсткого включення від основного матеріалу матриці. Отримано аналітичний розв'язок задачі відшарування включення за неперервного (описано задачею Коші для диференціального рівняння першого порядку) та циклічного (нелінійним рівнянням) силового навантаження. Для фіксованого навантаження за цикл та наперед відомій кількості циклів завжди можна підібрати довжину включення чи його характеристики так, щоб відшарування не перевищувало заданого наперед значення (чи не відбувалося). Отримані співвідношення необхідні в експериментальній механіці руйнування композитів. За відомих довжини включення, пружних та міцнісних параметрів композиції, мінімального та максимального навантаження за цикл отриманими формулами можна оцінити робочу довжину включення чи її значення відносно початкової через задану кількість циклів навантаження.

**РЕЗЮМЕ.** Исследовано отслоение тонкого жесткого включения в условиях плоской задачи при нагрузке непрерывными и циклическими сосредоточенными силами. Получено значение его рабочей длины, которое зависит от количества циклов, минимальной и максимальной нагрузки за цикл, энергии отслаивания единицы длины включения, прочностных и упругих характеристик матрицы, расстояния к прилагаемым силам. Выполнены расчеты рабочей длины для отдельных характеристик композиции и нагрузок.

**SUMMARY.** Lamination of the thin hard inclusion in the condition of plane problem under loading by continuous and cyclic concentrated forces is investigated. The value of its working length of the inclusion depending on the amount of cycles, minimum and maximal loading for a cycle, energy of lamination of a unit of inclusion length, strength and elastic rates of matrix, distance to applied forces are obtained. The working length for some cases of composition and load is calculated.

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Sih G. C. Plane extension of rigidly embedded line inclusions // *Developments in mechanics*. Pt. 1: Solid. Mech. and Mat. – New York: Wiley, 1965. – Vol. 3. – P. 61–79.
3. Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т., Труш И. И. Распределение напряжений около дефектов типа жестких остроугольных включений // *Проблемы прочности*. – 1972. – № 7. – С. 3–9.
4. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
5. Бережницкий Л. Т., Громяк Р. С. К оценке предельного состояния матрицы в окрестности остроконечного жесткого включения // *Физ.-хим. механика материалов*. – 1977. – 13, № 2. – С. 39–47.
6. Эберт Л. Дж., Райт П. К. Механические поверхности раздела // *Композиционные материалы*. Т. 1. Поверхности раздела в металлических композитах. – М.: Мир, 1978. – С. 42–76.
7. Fukuda Hiroshi and Chou Tsu-Wei Stiffness and strength of short fibre composites as affected by crack and plasticity // *Fibre Sci. and Technol.* – 1981. – 15, № 4. – P. 243–256.
8. Brussat T. R. and Westmann R. A. Interfacial slip around rigid fiber inclusions // *J. Comp. Mater.* – 1974. – 8, № 4. – P. 364–377.
9. Shioiri J. and Inoue K. Micromechanics of interfacial failure in short fiber reinforced composite materials // *Rep. 1<sup>st</sup> Soviet-Japanese Symp. on Composite Materials*. – Moscow, 1979. – P. 286–295.
10. Бережницкий Л. Т., Кундрат Н. М. Локальное упругопластическое разрушение одного класса композитов // *Физ.-хим. механика материалов*. – 1984. – 19, № 5. – С. 57–64.
11. Силованюк В. П. Розвиток смуг пластичності на жорсткому дископодібному включенні // *Доп. АН УРСР, Сер. А*. – 1985. – № 10. – С. 35–38.
12. Кундрат Н. М. Локальное разрушение в композиции с жестким линейным включением // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 1998. – 4, № 4. – С. 115–127.
13. Сулим Г. Т., Кундрат М. М. Гранична рівновага та руйнування в ортотропному тілі зі жорстким стрічковим включенням // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2006. – 42, № 2. – С. 69–79.  
(Sulym H. T. and Kundrat M. M., Limiting equilibrium and fracture in an orthotropic body containing a thin rigid inclusion // *Materials Science*. – 2006. – 42, № 2. – P. 220–232.)
14. Шами К. Механизм передачи нагрузки через поверхность раздела // *Композиционные материалы*. Т. 6. Поверхности раздела в полимерных композитах. – М.: Мир, 1978. – С. 42–87.
15. Сулим Г. Т., Рокач И. В. Метод конечных элементов в задаче о тонкостенном включении // *Материалы 10-ой конф. мол. ученых Физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. мех. материалов*. (12–16 октября, 1981). – Львов, 1983. – 3 с. – Деп. в ВИНТИ 12 апр. 1983 г. № 1948-83 Деп.
16. Kim J. K. and Mai Y. W. Engineered interfaces in fiber reinforced composites. – Elsevier Science Ltd, 1998. – 418 p.
17. Кундрат М. М. Про відшарування жорсткого лінійного включення // *Доповіді НАН України*. – 2001. – № 2. – С. 60–65.
18. Sulym H. T. and Kundrat M. M. Odseparowywanie gietkiej nakladki na krawedzi polplaszczyny sprzystej w plaskim zagadnieniu termosprzystosci // *Materiały III Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji (Augustów 1–4 czerwca 2005)*. – Białystok, 2005. – S. 401–404.

Одержано 03.01.2013