

УДК 539.3

## ДВОВІСНИЙ РОЗТЯГ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З ДВОМА ТРІЩИНАМИ НА МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН БІЛЯ ЇХНІХ ВЕРШИН

М. М. НИКОЛИШИН<sup>1</sup>, В. К. ОПАНАСОВИЧ<sup>2</sup>,  
Л. Р. КУРОТЧИН<sup>1</sup>, М. С. СЛОБОДЯН<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;

<sup>2</sup> Львівський національний університет ім. І. Франка

Досліджено розтяг кусково-однорідної пластини з двома рівними наскрізними тріщинами, розміщеними на межі поділу матеріалів. Припущено, що пластинка знаходиться в однорідному полі розтягувальних зусиль на нескінченності, береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження, а біля їхніх вершин утворились пластичні зони. За використання комплексних потенціалів розв'язок задачі зведено до задач лінійного спрощення, на основі яких визначено напружений стан на межі поділу матеріалів. За умови пластичності Треска визначено довжини пластичних зон та розкриття у вершинах тріщин.

**Ключові слова:** розтяг, кусково-однорідна пластинка, тріщина, пластичні зони, комплексні потенціали, умова пластичності Треска, розкриття тріщини.

З технічних міркувань пластинчасті елементи конструкцій можуть складатись з різних матеріалів і в результаті їх експлуатації виникатимуть тріщиноподібні дефекти. Вони впливають на міцність реальних твердих тіл і елементів конструкцій та збільшують ймовірність руйнування такої композиційної структури. Дослідження впливу цих дефектів на напружено-деформований стан та руйнування є актуальною проблемою.

Досить повний огляд праць про напружений стан та граничну рівновагу тіл з тріщинами в пружній постановці поданий у монографіях [1–4]. Наведені критерії руйнування [2] та зроблено огляд досліджень [5] задач розтягу тіл з тріщинами, у вершинах яких утворилися пластичні зони. Розглянуто [6] вплив зміцнення матеріалу на напружений стан пружно-пластичної пластини з тріщиною. Досліджено раніше напружено-деформований стан кусково-однорідної пластини з наскрізною [7, 8] та ненаскрізною [9] тріщинами у пружно-пластичному формулюванні, а також однорідної пластини з двома наскрізними тріщинами [10]. Вивчено [11, 12] вплив міжфазних тріщин на напружено-деформований стан кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів. Розглянуто [13] дві нерівні колінеарні тріщини у пластині з урахуванням пластичних зон за моделлю Дагдейля. Досліджено [14] вплив поверхневих тріщин на напружено-деформований стан. З використанням умови пластичності Мізеса визначено [15] пластичну область на продовженні тріщини у пластині.

Мета роботи – дослідити напружений стан кусково-однорідної пластини з двома тріщинами на прямолінійній межі поділу матеріалів за двовісного розтягу рівномірно розподіленими зусиллями на безмежності. Вважаємо, що береги тріщини вільні від навантаження, а під час деформування біля неї утворилися вузькі пластичні зони по всій товщині пластини. За аналогією з  $\delta_c$ -моделлю, замінимо

пластичні зони поверхнями розриву пружних переміщень, а реакцію пластичної зони на пружний об'єм – невідомими нормальними та дотичними напруженнями, які задовольняють умову пластичності Треска. За допомогою методів теорії функції комплексної змінної розв'язок задачі зводимо до задач лінійного спряження, розв'язавши які, отримуємо вирази для визначення напруженого стану пластини. Числовий аналіз задачі виконано з використанням ортогональних поліномів Чебишева [3, 16, 17].

**Опис та формулювання задачі.** Розглянуто кусково-однорідну пластину з прямолінійною межею поділу матеріалів. Пластина знаходиться під дією однорідного поля зусиль на нескінченності  $q$ ,  $P_1$  та  $P_2$ . Обмежимося випадком, коли навантаження, розміри тріщин та властивості матеріалів такі, що пластичні зони розвиваються на продовженні тріщин по всій товщині пластини. Вважаємо, що на межі поділу матеріалів знаходяться дві рівні тріщини, береги яких вільні від зовнішнього навантаження, а на продовженні тріщин в їхніх вершинах під дією зовнішнього навантаження виникають зони пластичних деформацій. Поза зонами пластичності матеріали пластин спаяні.

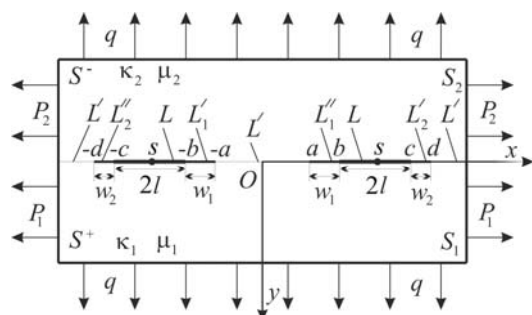


Рис. 1. Пластина із двома тріщинами.

Fig. 1. A plate with two cracks.

У серединній площині пластини введемо декартову систему координат  $Oxy$ , вісь  $Ox$  направимо вздовж межі поділу матеріалів, а початок координат розташуємо так, щоб тріщини були симетричними відносно нього. Введемо позначення:  $2l$  – довжина тріщин, а  $w_1$  та  $w_2$  – довжини пластичних зон біля внутрішніх вершин тріщин та зовні тріщин, відповідно;  $s$  – відстань від початку координат до центрів тріщин;  $L'$  та  $L''$  – лінії спаїв матеріалів та тріщин, відповідно; пластичні зони біля внутрішніх вершин тріщин –  $L'_1$  і  $L''_1$ , а біля зовнішніх –  $L'_2$  і  $L''_2$ ;  $b, c$  та  $a, d$  – вершини тріщин і пластичних зон, відповідно (рис. 1). Пружні характеристики  $\kappa, \mu$  нижньої півплощини  $S_1(S^+)$  позначимо індексом 1, а верхньої  $S_2(S^-)$  – індексом 2, а граничне значення відповідних величин при  $y \rightarrow \pm 0$  – знаками “+” і “-”.

Крайові умови для плоскої задачі:

$$(\sigma_y - i\tau_{xy})^+ = (\sigma_y - i\tau_{xy})^-, \quad (u + iv)^+ = (u + iv)^- \text{ на } L'; \quad (1)$$

$$\sigma_y^\pm = 0, \quad \tau_{xy}^\pm = 0 \text{ на } L; \quad (2)$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_{01}, \quad \tau_{xy}^\pm = \tau_{01} \text{ на } L'_1; \quad \sigma_y^\pm = \sigma_{01}, \quad \tau_{xy}^\pm = -\tau_{01} \text{ на } L''_1; \quad (3)$$

$$\sigma_y^\pm = \sigma_{02}, \quad \tau_{xy}^\pm = \tau_{02} \text{ на } L'_2; \quad \sigma_y^\pm = \sigma_{02}, \quad \tau_{xy}^\pm = -\tau_{02} \text{ на } L''_2, \quad (4)$$

де  $u, v$  – проекції вектора переміщення на осі  $Ox$  і  $Oy$ , відповідно;  $\sigma_y, \tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень;  $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \tau_{01}, \tau_{02}$  – невідомі нормальні та дотичні напруження у пластичній зоні,  $i^2 = -1$ .

**Розв'язання задачі.** Використовуючи методику, викладену раніше [7–10], за допомогою комплексних потенціалів Колосова–Мухелішвілі [18] цю задачу звели до задач лінійного спряження та побудували їх розв'язок у класі функцій, об-

межених у пластичних вершинах. Напруження на межі поділу матеріалів знайдемо за формулами

$$\begin{aligned}\sigma_y^\pm - i\tau_{xy}^\pm &= A_1^{-1} \left[ \Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x) \right], \\ \sigma_x^+ &= A_1^{-1} \operatorname{Re} \left[ 3\Phi_0^+(x) + g\Phi_0^-(x) \right] + P_1 - q(3+g)/(1-g), \\ \sigma_x^- &= -A_1^{-1} \operatorname{Re} \left[ \Phi_0^+(x) + 3g\Phi_0^-(x) \right] + P_2 + q(1+3g)/(1-g),\end{aligned}\quad (5)$$

де

$$\begin{aligned}\Phi_0(z) &= A_1 X_0(z) \left[ \frac{\sigma_{01}}{2\pi i} \int_{L_1' \cup L_1''} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} + \frac{\sigma_{02}}{2\pi i} \int_{L_2' \cup L_2''} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\tau_{01}}{2\pi i} \int_{L_1'} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} - \frac{i\tau_{02}}{2\pi i} \int_{L_2'} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} + \frac{i\tau_{01}}{2\pi i} \int_{L_1''} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} + \frac{i\tau_{02}}{2\pi i} \int_{L_2''} \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)} \right], \\ X_0(z) &= \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - d^2)} \left( \frac{(z+a)(z-d)}{(z-a)(z+d)} \right)^{i\beta}, \quad \beta = -\frac{\ln|g|}{2\pi}, \\ g &= -\frac{E_1(1+\nu_2) + E_2(1+\nu_1)(3-\nu_1)}{E_2(1+\nu_1) + E_1(1+\nu_2)(3-\nu_2)},\end{aligned}$$

$E_j, \nu_j$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу  $j$ -ої площини.

При цьому  $\sigma_{01}, \sigma_{02}, \tau_{01}, \tau_{02}$  задовольняють систему

$$\sigma_{01} I_s^{ab} + \sigma_{02} I_s^{cd} - \tau_{01} I_c^{ab} + \tau_{02} I_c^{cd} = 0, \quad (6)$$

$$\sigma_{01} I_{ct}^{ab} + \sigma_{02} I_{ct}^{cd} + \tau_{01} I_{st}^{ab} - \tau_{02} I_{st}^{cd} = q\pi e^{-\beta\pi} / (1-g), \quad (7)$$

$$-\sigma_{01} I_{st2}^{ab} - \sigma_{02} I_{st2}^{cd} + \tau_{01} I_{ct2}^{ab} - \tau_{02} I_{ct2}^{cd} = 2q\pi\beta(d-a)e^{-\beta\pi} / (1-g), \quad (8)$$

де введено такі позначення (на різних проміжках інтегрування):

$$I_{si}^{km} = \int_k^m \frac{t^i \sin b(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt, \quad I_{ci}^{km} = \int_k^m \frac{t^i \cos b(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt, \quad b(x) = \beta \ln \frac{(x+a)(d-x)}{(x-a)(x+d)}.$$

Умова однозначності переміщень має вигляд

$$\int_a^d \left[ \Phi_0^+(x) - \Phi_0^-(x) \right] dx = 0. \quad (9)$$

Зауважимо, що зусилля  $q, P_1$  і  $P_2$  пов'язані співвідношенням

$$P_2 = [P_1 E_2 + (E_1 \nu_2 - E_2 \nu_1) q] / E_1. \quad (10)$$

Довжини зон пластичності шукаємо з умови пластичності Греска [19, 20]

$$\max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2| \} = \sigma_T, \quad \sigma_{1,2} = \left( \sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\tau_{xy})^2} \right) / 2, \quad (11)$$

де  $\sigma_T = \min(\sigma_T^{(1)}, \sigma_T^{(2)})$ ,  $\sigma_T^{(1)}, \sigma_T^{(2)}$  – границі текучості матеріалів.

**Числові результати.** Числово проаналізовано задачу для нитесилу  $\sigma_T^{(1)} = 278$  МПа,  $E_1 = 1,38 \cdot 10^5$  МПа та технічно чистого заліза  $\sigma_T^{(2)} = 130$  МПа,  $E_2 = 2,08 \cdot 10^5$  МПа,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ . На рис. 2–4 суцільні лінії відповідають внут-

рішнім вершинам тріщин  $w_1^* = w_1/l$ ,  $\delta_1^* = \delta_1 E_1 / (l\sigma_T)$  (на  $L_1', L_1''$ ), а штрихові – зовнішнім  $w_2^* = w_2/l$ ,  $\delta_2^* = \delta_2 E_1 / (l\sigma_T)$  (на  $L_2', L_2''$ ).

Зображено графічні залежності відносних довжин пластичних зон  $w_1^*$ ,  $w_2^*$  (рис. 2a) та розкриття  $\delta_1^*$ ,  $\delta_2^*$  у внутрішніх та зовнішніх вершинах тріщин (рис. 2b) від рівномірно розподіленого навантаження на безмежності  $P_1/\sigma_T$  при  $s^* = s/l = 3$ . Бачимо, що зі збільшенням рівномірно розподіленого навантаження довжини пластичних зон та розкриття у вершинах тріщин збільшуються. Крім того, вони є більшими у внутрішніх вершинах порівняно зі зовнішніми.

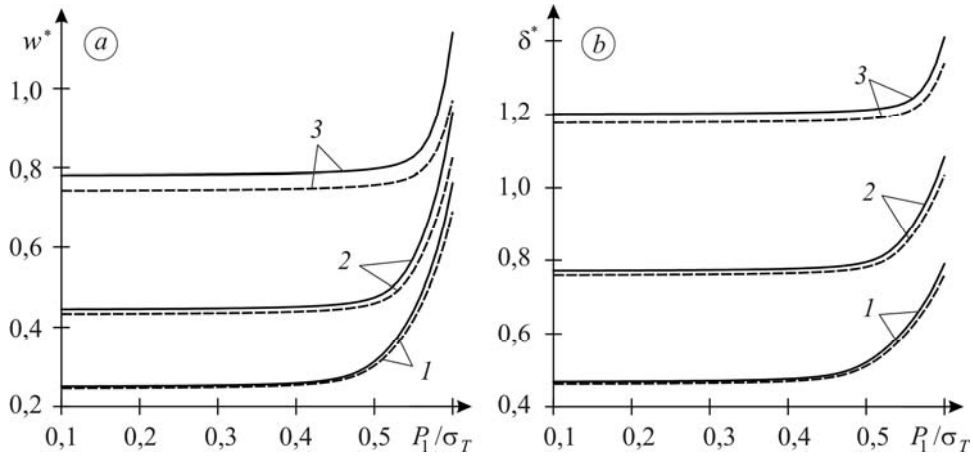


Рис. 2. Залежність відносних довжин пластичних зон (a) та розкриття вершин тріщин (b) від різних навантажень на безмежності  $P_1/\sigma_T$ : 1 –  $q/\sigma_T = 0,4$ ; 2 –  $q/\sigma_T = 0,5$ ; 3 –  $q/\sigma_T = 0,6$ .

Fig. 2. Graphic dependence of relative length of plastic zones (a) and crack tips opening (b) for different loads at infinity  $P_1/\sigma_T$ : 1 –  $q/\sigma_T = 0,4$ ; 2 –  $q/\sigma_T = 0,5$ ; 3 –  $q/\sigma_T = 0,6$ .

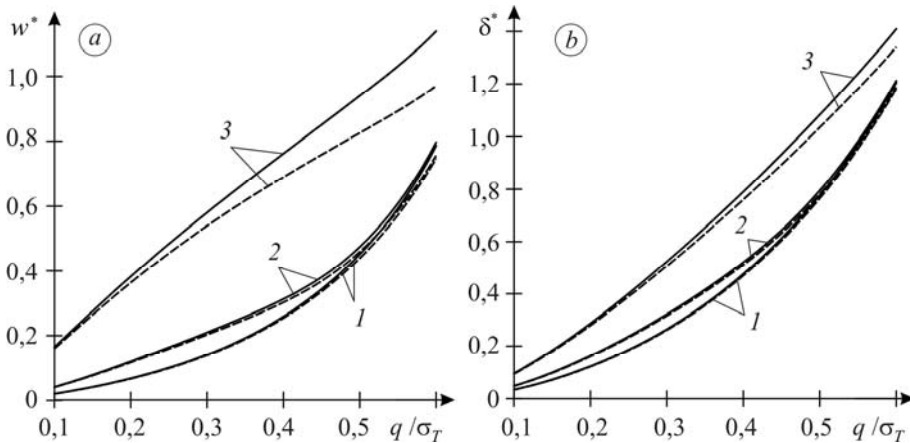


Рис. 3. Залежність відносних довжин пластичних зон (a) та розкриття вершин тріщин (b) від різних навантажень на безмежності  $q/\sigma_T$ : 1 –  $P_1/\sigma_T = 0,4$ ; 2 –  $P_1/\sigma_T = 0,5$ ; 3 –  $P_1/\sigma_T = 0,6$ .

Fig. 3. Graphic dependence of relative length of plastic zones (a) and crack tips opening (b) for different loads at infinity  $q/\sigma_T$ : 1 –  $P_1/\sigma_T = 0,4$ ; 2 –  $P_1/\sigma_T = 0,5$ ; 3 –  $P_1/\sigma_T = 0,6$ .

Побудовано графічні залежності відносних довжин пластичних зон  $w_1^*$ ,  $w_2^*$  (рис. 3a) і розкриття вершин тріщин (рис. 3b) від рівномірно розподіленого на-

вантаження на безмежності  $q/\sigma_T$  при  $s^* = s/l = 3$ . Зі збільшенням рівномірно розподіленого навантаження відносні довжини пластичних зон та розкриття вершин тріщин збільшуються. Зауважимо, що у внутрішній вершині відповідні величини є більші, ніж у зовнішній.

Наведено графічні залежності відносних довжин пластичних зон  $w_1^*$ ,  $w_2^*$  (рис. 4a) та розкриттів у вершинах тріщин (рис. 4b) від відносної відстані від початку координат до центрів тріщин  $s^*$ , для  $P_1/\sigma_T = 0,4$ . Якщо відстань між тріщинами збільшується, то пластичні зони та розкриття зменшуються і прямують до значень, отриманих для однієї тріщини [7].

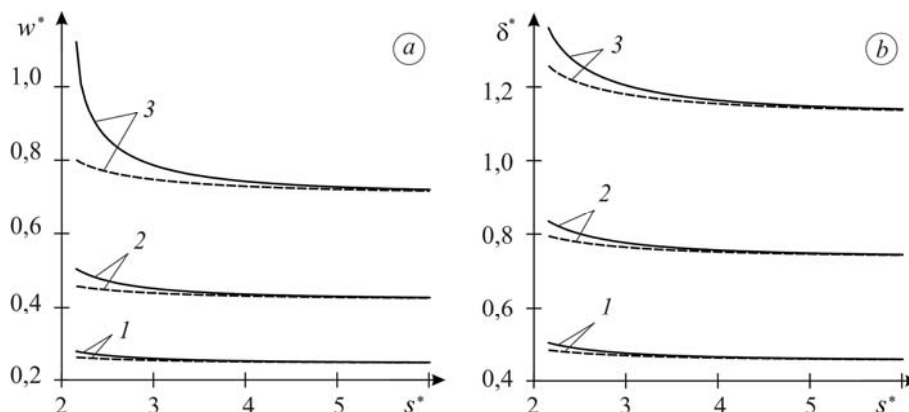


Рис. 4. Залежність відносних довжин пластичних зон (a) та розкриття вершин тріщин (b) від відносної відстані  $s^*$  за різних навантажень:  
 $1 - q/\sigma_T = 0,4$ ;  $2 - q/\sigma_T = 0,5$ ;  $3 - q/\sigma_T = 0,6$ .

Fig. 4. Graphic dependence of relative length of plastic zones (a) and opening of crack tips (b) on the relative distance  $s^*$  for different loads:  
 $1 - q/\sigma_T = 0.4$ ;  $2 - q/\sigma_T = 0.5$ ;  $3 - q/\sigma_T = 0.6$ .

## ВИСНОВКИ

Розглянуто двовісний розтяг кусково-однорідної пластини з двома рівними тріщинами на прямолінійній межі поділу матеріалів. Досліджено вплив рівномірно розподіленого навантаження на безмежності  $q/\sigma_T$ ,  $P_1/\sigma_T$  та відстані між тріщинами на довжини пластичних зон та розкриття вершин тріщин. Якщо пружні характеристики матеріалів пластини однакові, то одержуємо результати встановлені раніше [10].

**РЕЗЮМЕ.** Исследовано растяжение кусочно-однородной пластины с двумя сквозными трещинами, размещенными вдоль границы раздела материалов. Предполагаем, что пластина находится под воздействием растягивающих усилий на бесконечности, берега трещин свободны от нагрузки, а возле их вершин образуются зоны пластических деформаций. Используя комплексные потенциалы, решение задачи сведено к задачам линейного сопряжения, с помощью которых определено напряженное состояние на линии раздела материалов. При условии пластичности Треска получены соотношения для определения размера пластических зон и раскрытия вершин трещин.

**SUMMARY.** The tension of a piecewise-homogeneous plate with two equal through cracks at the interface of materials is investigated. It is assumed that the plates are subjected to the effect of tensile stresses at infinity, the crack edges are load-free and the plastic zones initiate at their tips. Having used the complex potentials, the solution of the problem is reduced to the problems of linear conjugation. On their basis the stress state at the interface of materials is determined. Having used the Tresca plasticity condition, the lengths of plastic zones and the values of opening at the crack tips is found.

1. *Андрейкив А. Е.* Разрушение квазихрупких тел с трещинами при сложном напряженном состоянии. – К.: Наук. думка, 1979. – 142 с.
2. *Панасюк В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
3. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
4. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
5. *Витвицкий П. М., Панасюк В. В., Ярема С. Я.* Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения (Обзор) // Проблемы прочности. – 1973. – № 2. – С. 3–18.
6. *Каминський А. А., Галатенко Г. В.* Исследования роста усталостных трещин в материалах с упрочнением // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 4. – С. 54–60.
7. *Знаходження* довжини пластичних зон біля вершин наскрізної тріщини на прямолінійній межі поділу матеріалів при розтязі кусково-однорідної ізотропної пластини / М. М. Николишин, В. В. Опанасович, Л. Р. Куротчин, М. С. Слободян // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2012. – Вип. 13. – С. 294–300.
8. *Николишин М. М., Опанасович В. В., Куротчин Л. Р.* Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їх вершин // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2006. – Вип. 4. – С. 101–108.
9. *Двовісний* розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів та ненаскрізною тріщиною в ній з урахуванням пластичних зон біля її вершин / М. М. Николишин, В. В. Опанасович, Л. Р. Куротчин, М. С. Слободян // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 72. – С. 29–45.
10. *Двовісний* розтяг однорідної ізотропної пластини з двома рівними співвісними тріщинами з урахуванням пластичних зон біля їх вершин / М. М. Николишин, В. В. Опанасович, Л. Р. Куротчин, М. С. Слободян // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 1. – С. 115–121.
11. *Острик В. І.* Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – 39, № 2. – С. 58–65.  
(*Ostryk V. I.* Friction contact of the interphase crack edges under tension and shear // Materials Science. – 2003. – 39, № 2. – P. 214–224.)
12. *Харун І. В., Лобода В. В.* Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил і моментів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – 45, № 2. – С. 103–113.
13. *Bhargava R. R. and Hasan Shehzad* The Dugdale Solution for two unequal straight cracks weakening in an infinite // Indian Academy of Sciences. – 2010. – 35, P. 1. – P. 19–29.
14. *Jong-Min Kim and Huhon Nam-Su* Crack interaction effects of in-plane surface cracks using elastic and elastic-plastic finite element analyses // Nuclear engineering and technology. – 2010. – 42, № 6. – P. 680–689.
15. *Castro et alii J. T. P.* Characterization of crack tip stress fields // Forni di Sopra (UD). – 2011. – March 7–9. – P. 58–65.
16. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
17. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружності рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
18. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
19. *Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М.* Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. – Львів: Сполом, 2007. – 320 с.
20. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 320 с.

Одержано 22.05.2013