

УДК 539.3

АНТИПЛОСКА ДЕФОРМАЦІЯ АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ З ПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ ТОНКИХ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ

Я. М. ПАСТЕРНАК¹, Г. Т. СУЛИМ², Н. Р. ОЛІЯРНИК²

¹ Луцький національний технічний університет;

² Львівський національний університет ім. Івана Франка

Побудовано інтегральні рівняння антиплатоскої деформації анізотропних тіл із періодичними системами тонких включень. За допомогою модифікованого методу граничних елементів отримано числові розв'язки конкретних задач. Розраховано коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для анізотропного тіла з одним, двома та трьома стовпцями паралельних дефектів. Порівнянням із окремими аналітичними розв'язками для тріщин і абсолютно жорстких включень підтверджено достовірність отриманих результатів. Також досліджено вплив міри анізотропії (ортотропії) матеріалу на напружено-деформований стан тіла та КІН в околі вершин тонких неоднорідностей.

Ключові слова: системи тонких дефектів, лінійна періодичність, анізотропія, антиплатоска деформація.

Відомо, що умисне впровадження в однорідний матеріал різного роду неоднорідностей (включень різної жорсткості, накладок тощо) може значно поліпшувати його фізико-механічні властивості. Однак при цьому внаслідок формування значної концентрації напружень існує також небезпека передчасного руйнування. У зв'язку з цим під час проектування та дослідження таких неоднорідних матеріалів виникають задачі вивчення напружено-деформованого стану тіл як із поодинокими включеннями, так і системами, у тому числі й регулярно розташованих неоднорідностей. Зокрема, останні необхідно враховувати під час моделювання композитних матеріалів та шаруватих гірських порід.

Періодичні системи дефектів в умовах поздовжнього зсуву розглянуто у монографіях [1, 2] та численній кількості статей [3, 4–7], зокрема у працях [4, 8], коли періодичну структуру утворюють одна та дві тріщини. Значно складнішими щодо побудови аналітичного розв'язку є задачі про тіла зі скінченними системами тріщин. Антиплатоска деформація системи з п'яти включень вивчена раніше [2, 9], також досліджено [10, 11] системи тонких тріщин та включень. У більшості цих праць розглядаються періодичні системи неоднорідностей у тілах з ізотропного матеріалу. Анізотропія властивостей матеріалу є одним із чинників, поряд із параметрами розташування дефектів, котрі безпосередньо впливають на напружено-деформований стан тіла. Тому важливою є задача антиплатоского деформування анізотропних тіл зі системами тонких дефектів чи армувальних елементів, яка на сьогодні практично не досліджена.

Мета цієї роботи – побудова загального підходу, який дав би можливість розглядати періодичні системи тонких неоднорідностей в анізотропних тілах за їхнього антиплатоского деформування. Для розв'язку задачі використано підхід безпосереднього підсумовування ядер інтегральних рівнянь [2, 12] та запису на їхній основі загальних співвідношень періодичної задачі. Ефективність відповід-

ного підходу для задачі плоскої деформації тіл із лінійно періодичними системами включень підтверджено [12].

Формулювання задачі. Розглянемо антиплоску деформацію безмежного пружного анізотропного тіла (моноклінна структура) зі системою ідентичних одне одному тонких пружних стрічкових включень однакової жорсткості. При цьому для задоволення умов поздовжнього зсуву вважають, що площина пружної симетрії матеріалів тіла і включень перпендикулярна до твірних стрічкових неоднорідностей. На спільній межі тіла та включень виконуються умови ідеального механічного контакту.

Згідно з принципом спряження континуумів різної вимірності [2], кожне включення моделюємо лінією Γ_s ($s \in \mathbb{Z}$) розривів полів напружень $\Sigma t^s = t^{+,s} + t^{-,s}$ та переміщень $\Delta w^s = w^{+,s} - w^{-,s}$ (тут $w^{\pm,s}$ і $t^{\pm,s}$ – контактні переміщення та напруження, що виникатимуть на берегах Γ_s^\pm включення). Тоді, відповідно до формули Сомільяни, інтегральні рівняння задачі для тіла з лініями стрибків Γ_s ($s \in \mathbb{Z}$) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma w^s(\mathbf{y}) = \sum_s \left[\text{RPV} \int_{\Gamma_s^+} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_s^+} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] + w^\infty(\mathbf{y}), \\ \frac{1}{2} \Delta t^s(\mathbf{y}) = n_j^+(\mathbf{y}) \times \\ \times \left[\sigma_{3j}^\infty + \sum_s \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_s^+} D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_s^+} S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w^s(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] \right], \end{aligned} \quad (1)$$

де $\mathbf{y} \in \Gamma_k$ ($k \in \mathbb{Z}$) – точка колокації; w, t – ненульові компоненти векторів переміщень та напружень $(0; 0; w)$ та $(0; 0; t)$, відповідно; $\Delta t = t^+ - t^-$, $\Sigma w = w^+ + w^-$; $t^\pm = \sigma_{3j}^\pm n_j^\pm$ (n_j^\pm – компоненти векторів нормалей \mathbf{n}^\pm до поверхонь Γ_s^\pm); знаками “+” та “-” позначено величини, що стосуються поверхонь Γ_s^+ та Γ_s^- , утворених розрізом Γ_s ; $\sigma_{3j}^\infty, w^\infty(\mathbf{y})$ – задані на безмежності навантаження та відповідне йому поле переміщень у суцільному бездефектному матеріалі. Індокси у позначеннях відповідають проекціям векторів на осі глобальної системи координат Ox_1x_2 . У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Ядра інтегральних рівнянь для антиплоскої задачі теорії пружності анізотропного тіла відповідно до залежностей формалізму Stroh [13] мають такий вигляд [14]:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[A^2 \ln Z(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right], \quad T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[(n_2 - n_1 p) \frac{AB}{Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right], \\ D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{jk} \frac{\partial W}{\partial y_k} = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left[(\delta_{2j} - \delta_{1j} p) \frac{AB}{Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right], \\ S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{jk} \frac{\partial T}{\partial y_k} = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[(\delta_{2j} - \delta_{1j} p) \frac{B^2 (n_2 - n_1 p)}{[Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})]^2} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $Z(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = x_1 + px_2 - (y_1 + py_2)$; A, B та p – комплексні сталі, що залежать від механічних властивостей матеріалу тіла [14].

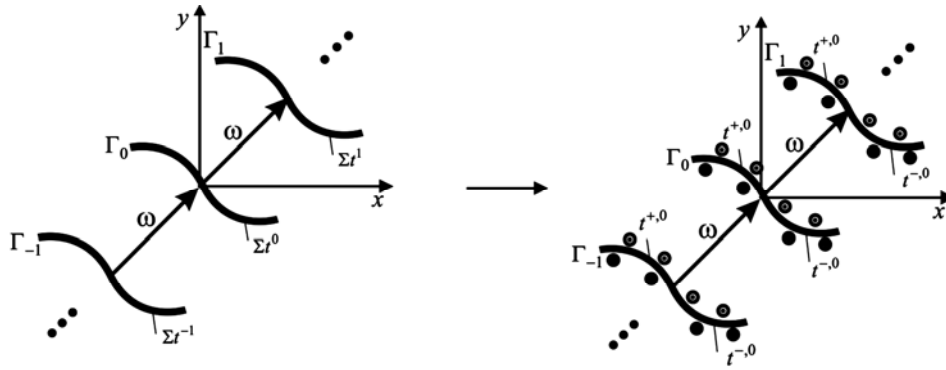


Рис. 1. Схема задачі.

Fig. 1. Scheme of the problem.

Періодична система включень формується шляхом нескінченної кількості почергових поступальних переміщень однієї неоднорідності на сталу відстань ω , що породжує систему ідентичних одне одному тонких включень. Тоді внаслідок трансляційної симетрії за такого навантажування структури розриви напружень Σt^s та переміщень Δw^s є однаковими для кожного включення (рис. 1). Тобто рівняння (1) запишемо у вигляді

$$\frac{1}{2} \Sigma w^0(\mathbf{y}) = \text{RPV} \int_{\Gamma_0^+} W^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_s^+} T^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + w^\infty(\mathbf{y}), \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \Delta t^0(\mathbf{y}) = n_j^+(\mathbf{y}) \left[\sigma_{3j}^\infty + \text{CPV} \int_{\Gamma_0^+} D_j^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_0^+} S_j^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w^0(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right],$$

де ядра $\mathbf{K}^p = [W^p, T^p, D_j^p, S_j^p]$ мають такий загальний вигляд:

$$\mathbf{K}^p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\mathbf{x} + s\omega, \mathbf{y}). \quad (4)$$

Тут $\omega = (\omega_{x_1}, \omega_{x_2})$ – вектор періоду.

Тобто у рівнянні (3), відповідно до виразів (2) та (4), необхідно обчислити суми:

$$S_1^p = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \ln(u + s\omega), \quad S_2^p = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{u + s\omega} = \frac{dS_1^p}{du}, \quad S_3^p = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u + s\omega]^2} = -\frac{dS_2^p}{du}, \quad (5)$$

де $u = Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, $\omega = Z(\omega)$.

Оскільки сума S_1^p розходиться в звичайному сенсі, то подамо її у вигляді головної частини та деякої безмежної сталої C_∞^p . Тобто матимемо:

$$S_1^p = \ln \left[\frac{u\pi}{\omega} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{u}{s\omega} \right)^2 \right) \right] + C_\infty^p, \quad (6)$$

де $C_\infty^p = \ln \left(\frac{\omega}{\pi} \right) + \sum_{s \in \mathbb{Z} \setminus 0} \ln(s\omega)$.

Відповідно до формули (4.22.1) довідника [15]

$$\sin z = z \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{s\pi} \right)^2 \right),$$

отже, вираз (6) можна записати так:

$$S_1^p = \ln \sin \left(\frac{u\pi}{\omega} \right) + C_{\infty}^p. \quad (7)$$

Диференціюючи (7) двічі за змінною u , отримаємо:

$$S_2^p = \frac{\pi}{\omega} \operatorname{ctg} \left(\frac{u\pi}{\omega} \right), \quad S_3^p = \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^2 \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{u\pi}{\omega} \right). \quad (8)$$

Таким чином, для розв'язування задач із лінійно періодичними системами тонких включень в ядрах (2) інтегральних рівнянь (3) необхідно зробити такі заміни:

$$\ln Z(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rightarrow S_1^p, \quad [Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})]^{-1} \rightarrow S_2^p, \quad [Z(\mathbf{x} - \mathbf{y})]^{-2} \rightarrow S_3^p.$$

За умови $\int_{\Gamma_s^+} \Sigma t^s d\Gamma = 0$ рівноважного навантаження кожного з розрізів Γ_s (фактично рівноваги кожного окремого включення) відповідно до рівнянь (3) стала C_{∞}^p не впливатиме на розв'язок задач, тому її можна відкинути.

Для розв'язування сформульованої задачі інтегральних рівнянь (3) недостатньо. Повну систему рівнянь отримаємо, долучивши до них співвідношення математичної моделі тонкого включення [14], що пов'язує між собою стрибки і середні значення компонент векторів переміщень і напружень на берегах включення (розрізу)

$$\Sigma w^0(\mathbf{y}) = F^w(\mathbf{y}, \Delta w, \Sigma t), \quad \Delta t^0(\mathbf{y}) = F^t(\mathbf{y}, \Delta w, \Sigma t). \quad (9)$$

Розв'язування задачі. Систему крайових інтегральних рівнянь (3), (9) розв'язуватимемо модифікованим методом граничних елементів (МГЕ) [16, 17]. Для цього криву Γ_0 апроксимуємо за допомогою n тривузлових граничних елементів. Крайові функції Σt^0 та Δw^0 апроксимуємо на елементі за їхніми вузловими значеннями. Базові функції для елементів, що не прилягають до торців неоднорідності, виберемо у формі поліномів Лагранжа [18] для системи вузлів $\xi_p = [-2/3; 0; 2/3]$ тривузлового розривного граничного елемента:

$$\phi_1 = \xi \left(\frac{9}{8} \xi - \frac{3}{4} \right), \quad \phi_2 = \left(1 - \frac{3}{2} \xi \right) \left(1 + \frac{3}{2} \xi \right), \quad \phi_3 = \xi \left(\frac{9}{8} \xi + \frac{3}{4} \right). \quad (10)$$

Для елементів, що моделюють приторцеві ділянки включення, використаємо спеціальні функції $\phi_p^{\Delta u}$ та $\phi_p^{\Sigma t}$ [16, 17], які враховують кореневу особливість напружень у вершині неоднорідності і дають можливість визначати узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН) з високою точністю. Останні обчислюємо за формулами:

$$K_{31} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} L \Delta w(s), \quad K_{32} = - \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma t(s), \quad (11)$$

де $L = -2\sqrt{-1}B^2$ – дійсне число, що відповідає тензору Барнета–Лоте \mathbf{L} [13] за плоскої анізотропії.

Числові результати. Приклад 1. Для верифікації запропонованого підходу результати числового розрахунку КІН для паралельних та співвісних систем трі-

щин або абсолютно жорстких включень (АЖВ) в ізотропному середовищі порівняно із точним аналітичним розв'язком (АР) відповідних задач. У всіх прикладах для розбиття осі неоднорідності у МГЕ брався 21 граничний елемент.

Періодичні системи паралельних та співвісних тріщин. Для системи паралельних тріщин (рис. 2а) значення УКІН $K_{III} = K_{31}$ за навантаження $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau$, $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$, згідно з працею [2], задаємо формулою

$$K_{31} = K_{31}^* \tau \sqrt{\pi a}, \quad K_{31}^* = \sqrt{\frac{d}{\pi a} \operatorname{th} \frac{\pi a}{d}}, \quad (12)$$

де $2a$ – довжина тріщини; d – період, що дорівнює відстані між центрами тріщин.

Результати обчислення нормованих УКІН за АР та запропонованим підходом з використанням математичної моделі (9) у вигляді [14]

$$\Delta t(y) = -\frac{Q^i(y)}{h(y)} [\Delta w(y) + \Delta w^*(y)], \quad \Sigma w(y) = w^0 + \int_{y_0}^y \frac{P(y) + P^*(y)}{T^i(y) h(y)} ds \quad (13)$$

подані в табл. 1.

Таблиця 1. Нормовані УКІН K_{31}^* для системи паралельних тріщин

d/a	100/3	8/3	4/3	8/9	4/9
АР, (12)	0,9985	0,8377	0,6456	0,5314	0,3761
МГЕ	0,9988	0,8382	0,6463	0,5323	0,3777
$\delta, \%$	0,03	0,06	0,11	0,17	0,43

Дані в табл. 1 показують добру узгодженість результатів розрахунку УКІН тріщини запропонованим підходом, оскільки відносна похибка обчислень δ за невеликої кількості граничних елементів (21 граничний елемент) не перевищує 0,5%. Також очевидним є зменшення значень КІН за зближення тріщин між собою, тобто зменшення періоду d (екранувальний ефект тріщин).

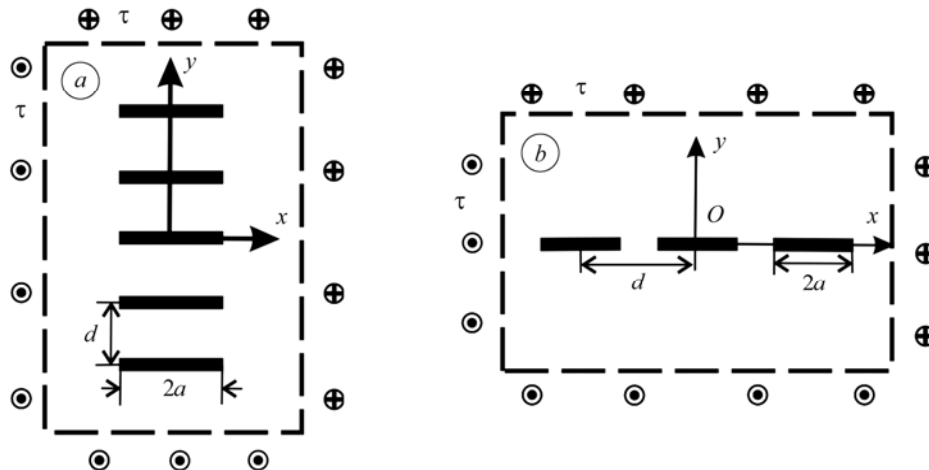


Рис. 2. Схема задачі для системи паралельних (а) та співвісних (b) тріщин у безмежному середовищі.

Fig. 2. Scheme of the problem for an infinite solid containing sets of parallel (a) and coaxial (b) cracks.

Для системи співвісних тріщин (рис. 2b) за навантаження $\sigma_{xz}^{\infty} = \tau$, $\sigma_{yz}^{\infty} = \tau$ УКІН визначають за формулою [2]

$$K_{31} = K_{31}^* \tau \sqrt{\pi a}, \quad K_{31}^* = \sqrt{\frac{d}{\pi a} \operatorname{th} \frac{\pi a}{d}}. \quad (14)$$

Таблиця 2. Нормовані УКІН K_{31}^* для системи співвісних тріщин

d/a	100/3	20/3	10/3	8/3	7/3
АР, (14)	1,0015	1,0398	1,2084	1,4326	1,8039
МГЕ	1,0018	1,0401	1,2089	1,4315	1,8089
δ , %	0,03	0,03	0,04	0,08	0,28

В табл. 2 подані результати обчислення нормованих УКІН за аналітичним розв'язком та запропонованим підходом для системи співвісних тріщин. Відхилення результатів від АР менше 0,3%, що свідчить про достовірність отриманих даних. Внаслідок зближення тріщин між собою УКІН зростають, а для великих відстаней $d \geq 20/3$ вони практично збігаються з АР для однієї ізольованої тріщини в безмежному середовищі.

Періодичні системи паралельних та співвісних абсолютно жорстких включень. Використовуючи такі ж як і для тріщин схеми геометричного розташування дефектів та навантаження, розраховували ненульові нормовані УКІН для систем паралельних (K_{32}^{*p} , рис. 2a) та співвісних (K_{32}^{*c} , рис. 2b) абсолютно жорстких включень за формулами

$$K_{32}^{*p} = \sqrt{\frac{d}{\pi a} \operatorname{th} \frac{\pi a}{d}}; \quad (15a)$$

$$K_{32}^{*c} = \sqrt{\frac{d}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{d}}. \quad (15b)$$

Узагальнені КІН, згідно з АР, для систем паралельних АЖВ задаються формулою (15a), для співвісних – (15b). Результати обчислень нормованих УКІН запропонованим підходом з використанням математичної моделі (9) у вигляді (13) та за аналітичним розв'язком подані в табл. 3.

Таблиця 3. Нормовані УКІН для системи паралельних (K_{32}^{*p}) та співвісних (K_{32}^{*c}) АЖВ

d/a	K_{32}^{*p}					K_{32}^{*c}				
	100/3	8/3	4/3	8/9	4/9	100/3	20/3	10/3	8/3	7/3
АР, (15)	0,9985	0,8377	0,6456	0,5314	0,3761	1,0015	1,0398	1,2084	1,4326	1,8039
МГЕ	0,9986	0,838	0,6463	0,5325	0,3792	1,0015	1,0399	1,2089	1,4338	1,8144
δ , %	0,01	0,04	0,11	0,21	0,82	–	0,01	0,04	0,16	0,58

Дані у табл. 3 свідчать про достовірність отриманих результатів та можливість використання запропонованого підходу для вивчення тіл також і зі системами абсолютно жорстких включень. Відносна похибка для паралельних АЖВ не

перевищує 0,9%, для співвісних – менше 0,6%. Зміна відношення d/a впливає на УКІН так: для великих d/a УКІН практично збігаються із аналітичним розв'язком, далі зі зближенням паралельних включень УКІН спадають, зменшення періоду для співвісних АЖВ, навпаки, спричиняє зростання УКІН.

Приклад 2. Розглянемо безмежне анізотропне тіло з двома стовпчиками паралельних тонких неоднорідностей. Довжина включення – $2a$, відстань між центрами двох неоднорідностей, розмішених у сусідніх стовпчиках, дорівнює $2b$. Товщина включення $h = 0,001a$, $a/b = 0,75$. Межа тіла навантажена зусиллями τ так, що воно перебуває в умовах всебічного зсуву (рис. 3а). Під час граничноелементного моделювання використали по 21 елементу рівномірно розподілених по серединних поверхнях двох базових неоднорідностей представницького елемента. Щоб описати включення, конкретизували математичну модель (9) у вигляді (13). Не зменшуючи загальності, вважаємо, що характеристика анізотропії матеріалу визначається співвідношенням $c = c_{44}/c_{55}$ та $c_{45} = 0$, тобто розглядаємо ортотропне тіло.

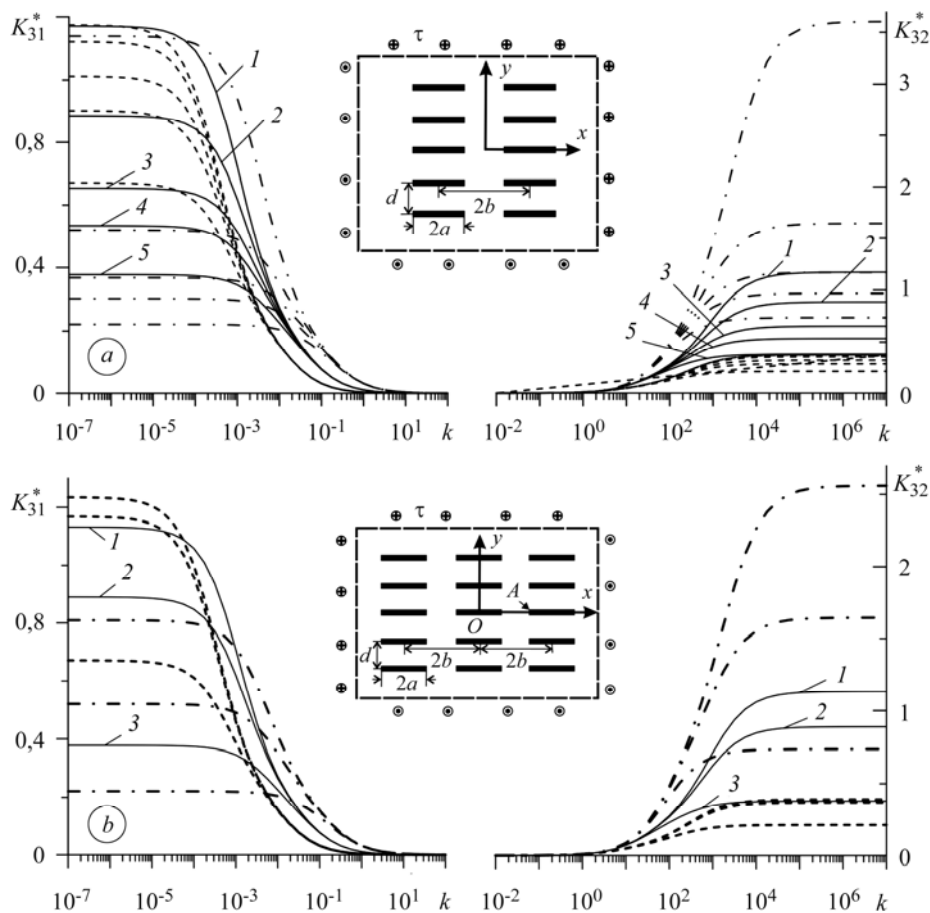


Рис. 3. Залежність нормованих УКІН K_{31}^* та K_{32}^* від відносної жорсткості включень k для двох (а: 1 – $d/a = 100/3$; 2 – $8/3$; 3 – $4/3$; 4 – $8/9$; 5 – $4/9$) та трьох (б: 1 – $d/a = 20/3$; 2 – $8/3$; 3 – $4/9$) стовпців дефектів.

Fig. 3. Dependence of normalized generalized SIF K_{31}^* and K_{32}^* on the relative rigidity of inclusions k for two (а: 1 – $d/a = 100/3$; 2 – $8/3$; 3 – $4/3$; 4 – $8/9$; 5 – $4/9$) and three (б: 1 – $d/a = 20/3$; 2 – $8/3$; 3 – $4/9$) columns of defects.

Розрахували залежності нормованих УКІН $K_{31}^* = K_{31}/\tau\sqrt{\pi a}$, $K_{32}^* = K_{32}/\tau\sqrt{\pi a}$ біля вістря A дефекту від відносної жорсткості включень $k = G^i/c_{55}$ для різних значень періоду d (рис. 3а). Виявили, що за фіксованої відстані $2b$ між стовпцями неоднорідностей, зменшення відстані між рядами знижує узагальнені КІН K_{31}^* та K_{32}^* (екранувальний ефект). У результаті взаємодії стовпців неоднорідностей між собою у внутрішніх щодо центра тіла вершинах завжди виникають дещо більші УКІН, аніж на зовнішніх торцях.

Досліджено також вплив міри анізотропії c на УКІН. Суцільні лінії на рис. 3а відповідають ізотропному матеріалу ($c = 1$), штрихові – $c = 0,1$, штрихпунктирні – $c = 10$. Для двох стовпців тріщин спостерігають зменшення УКІН зі зростанням c , навпаки, їхнє зростання у разі спадання c . Для двох стовпців включень за посилення анізотропії матеріалу граничні значення УКІН K_{32}^* збільшуються. Для ізотропного тіла отримані результати збігаються із графіками, поданими у монографії [2] (враховуючи описку щодо періоду $d/4a$ замість d/a). У граничних випадках параметра k ($k \rightarrow 0, \infty$) отримують значення, властиві системам тріщин і АЖВ.

Приклад 3. Розглянемо періодичну задачу за наявності в тілі трьох стовпців паралельних неоднорідностей. Позначення та механічні характеристики тіла такі ж, як у попередньому прикладі. Обчислення залежності нормованих КІН біля вістря A дефекту від відносної жорсткості включення здійснено для різних відношень d/a (рис. 3б).

Так само досліджено вплив анізотропії матеріалу на УКІН. У граничних випадках жорсткості неоднорідності закономірності зміни УКІН K_{31}^* та K_{32}^* у разі $c < 1$ та $c > 1$ для трьох стовпців дефектів такі ж, як і для двох, проте збільшення кількості стовпців сприяє зростанню УКІН. Як свідчать розрахунки, найменша інтенсивність напружень виникає у крайніх вершинах тріщин чи АЖВ, що знаходяться у крайніх стовпцях, а найбільша – у неоднорідностях центральних стовпчиків. Зі зближенням стовпчиків ці тенденції посилюються. Зменшення відстані між рядами тріщин чи АЖВ, навпаки, знижує УКІН, що свідчить про універсальність характеру екранувального ефекту.

ВИСНОВКИ

Побудовано аналітично-числовий підхід для розв'язування задачі антиплоского деформування анізотропного тіла із лінійно періодичними системами тонких неоднорідностей. Обчислено узагальнені КІН за наявності в тілі одного, двох та трьох стовпців паралельних дефектів типу тріщина або абсолютно жорстке чи пружне включення. Верифіковано отримані результати шляхом зіставлення із аналітичним розв'язком для ізотропного тіла. Виявлено, що зі зближенням стовпців неоднорідностей УКІН зростають, натомість за фіксованої відстані між стовпцями, зі зменшенням періоду повторюваності тріщин КІН зменшуються – спрацьовує екранувальний ефект. Крім того, досліджено вплив міри анізотропії матеріалу на КІН, розраховано для слабкої $c < 1$ та сильної $c > 1$ ортотропії, побудовано графічні залежності. Результати можуть бути використані під час дослідження стрічкових композитів, періодичних систем дефектів у гірських породах, регулярних систем дефектів конструкційних елементів із анізотропних матеріалів.

РЕЗЮМЕ. Построены интегральные уравнения задачи антиплоской деформации анизотропных тел с периодическими системами тонких включений. С помощью модифицированного метода граничных элементов получено численные решения конкретных примеров. Проведены расчеты коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для анизотропного тела с одним, двумя и тремя столбиками параллельных дефектов. Сравнением с отдельными аналитическими решениями для трещин и абсолютно жестких включений

подтверждена достоверность полученных результатов. Также исследовано влияние меры анизотропии (ортотропии) материала на напряженно-деформированное состояние тела и КИН в окрестности вершин тонких неоднородностей.

SUMMARY. The integral equations of the antiplane shear deformation of anisotropic solids with periodic sets of thin ribbon-like inclusions are constructed. Using the modified boundary element method the numerical solutions of specific examples are obtained. The calculations of the stress intensity factors for anisotropic material with one, two and three columns of parallel defects are obtained. Comparison with the analytical solutions confirms the validity of the obtained results. The paper also studies the effect of changes in the degree of anisotropy (orthotropy) of the material on the stress-strain state of the solid and on the stress intensity factors in the vicinity of tips of thin inhomogeneities.

1. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
2. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
3. *Kondo T.* The interaction between two or periodic parallel cracks in an anisotropic medium under longitudinal shear // Res. Repts. Nagaoka Techn. Coll. – 1986. – **22**, № 4. – P. 179–187.
4. *Пастернак Я. М.* Плоска задача теорії пружності анізотропного тіла з періодичними системами тонких неоднорідностей // Вісн. Дон. нац. ун-ту, Сер. А: Природничі науки. – 2012. – № 1. – С. 83–90.
5. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
6. *Сулим Г. Т.* Періодична задача для системи компланарних тонких стрічок в умовах подовжного зсуву // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, Вип. 2. – С. 91–99.
7. *VEM approach for the antiplane shear of anisotropic solids containing thin inhomogeneities / V. Vozhydrynyk, Ia. Pasternak, H. Sulym, and N. Oliyarnyk // Acta mechanica et automatica. – 2011. – 5, № 4. – P. 11–16.*
8. *Божидарник В. В., Сулим Г. Т.* Концентрація напружень на пружних стрічках при подовжному зсуві ізотропного масиву // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1990. – Вип. 246. – С. 11–14.
9. *Сулим Г. Т., Божидарник В. В.* Продольный сдвиг изотропной среды с системой туннельных разрезов // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1990. – № 243. – С. 10–12.
10. *Pasternak Ia.* Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities // Eng. Analysis with Boundary Elements. – 2011. – **35**, № 4. – P. 678–690.
11. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О равновесии и распространении трещин в анизотропной среде // Прикладная математика и механика. – 1961. – **25**, № 1. – С. 46–55.
12. *Новиков В. Г., Тулинов Б. М.* Напряженное состояние плоскости с периодической системой параллельных пар трещин продольного сдвига // Прикладная математика и механика. – 1984. – **48**, № 5. – С. 877–880.
13. *Pasternak Ia. M. and Sulym H. T.* Thin inclusions theory integral equations numerical solution using the boundary element method procedure // Proc. Int. Conf. “Integral Equations–2010” (Lviv, August, 25–27, 2010). – Lviv: PAIS, 2010. – P. 104.
14. *Ting T. C. T.* Anisotropic elasticity: theory and applications. – New York: Oxford University Press, 1996. – 567 p.
15. *NIST Handbook of Mathematical Functions / F. W. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark. – New York: Cambridge University Press, 2010. – 951 p.*
16. *Portela A., Aliabadi M. H., and Rooke D. P.* The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1992. – **33**. – P. 1269–1287.
17. *Опанасович В. К., Драган М. С.* Антиплоска деформація тіла з системою тонких пружних включень // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1984. – Вип. 22. – С. 71–77.
18. *Стадник М. М., Горбачевский И. Я.* Определение напряженно-деформированного состояния в теле с системой тонких туннельных включений. – Львов, 1986. – 52 с. (Препринт / АН УССР. Физ.-мех. ин-т; № 110).

Одержано 04.12.2012