

УДК 539.375

РЕШЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О РАЗВИТИИ КОГЕЗИОННЫХ ТРЕЩИН ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СДВИГЕ

В. М. МИРСАЛИМОВ, Ф. Ф. ГАСАНОВ

Азербайджанский технический университет, Баку

Рассмотрено перфорированное тело, ослабленное поверхностными когезионными трещинами, при продольном сдвиге. Решение задачи о равновесии такого тела сведено к решению одной бесконечной алгебраической системы и одного сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Коши.

Ключевые слова: перфорированное тело, продольный сдвиг, трещины со связями между берегами в концевых зонах.

Рассматривается изотропная упругая среда, ослабленная периодической системой круговых отверстий, имеющих радиусы λ ($\lambda < 1$) и центры в точках $P_m = m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\omega = 2$. Считается, что из контуров круговых отверстий исходят симметричные прямолинейные трещины, направленные по осям абсцисс (рис. 1). Принято, что контуры круговых отверстий и берега прямолинейных трещин вне концевых зон свободны от внешних нагрузок. В плоскости имеет место антиплоская деформация $\tau_y = \tau_y^\infty$, $\tau_x = 0$ (продольный сдвиг на бесконечности). Ранее [1, 2] предложили модели трещин с концевыми зонами соизмеримыми с длиной трещины. Использовали модель [3] трещины со связями между берегами в концевых зонах. Эти зоны моделируются областями с ослабленными межчастичными связями в материале, а взаимодействие берегов этих областей – путем введения между берегами зоны предразрушения связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры областей предразрушения зависят от вида материала. В рассматриваемом случае рост трещин

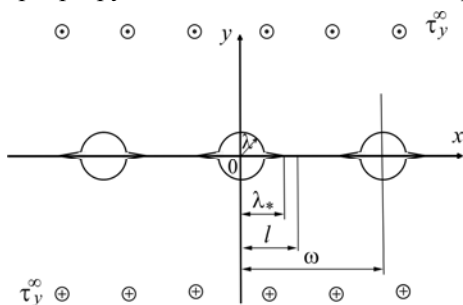


Рис. 1. Расчетная схема задачи механики разрушения при продольном сдвиге.

Fig. 1. Calculation model of the problem of fracture mechanics under longitudinal shear.

представляет собой переход области предразрушения в область разорванных связей между берегами трещины. Принимаем, что развитие трещины произойдет, когда сдвиг ее поверхностей у основания зоны предразрушения достигнет критического для данного материала значения δ_{IIIc} [4]. Эту характеристику определяют опытным путем [5].

Условие локального разрушения среды в случае когезионной трещины продольного сдвига будет иметь вид

$$w^+ - w^- = \delta_{IIIc}. \quad (1)$$

При внешней нагрузке на перфорированное тело в связях, соединяющих берега зон предразрушения (λ_*, l) , возникают касательные усилия $q_y(x)$. Они

заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения.

В силу симметрии граничных условий и геометрии области D , занятой материалом среды, напряжения являются периодическими функциями с основным периодом ω . Как известно [6], поле напряжений и смещений при антиплоской деформации можно выразить через одну аналитическую функцию $f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$

$$\tau_x - i\tau_y = f'(z), \quad w = \operatorname{Re} f(z)/\mu, \quad z = x + iy,$$

где μ – постоянная материала среды; $i = \sqrt{-1}$.

На основании этих соотношений и граничных условий на контурах круговых отверстий и берегах прямолинейных трещин с концевыми зонами задача механики разрушения сводится к определению одной аналитической функции $F(z) = f'(z)$ из краевых условий:

$$F(\tau)e^{i\theta} - \overline{F(\tau)}e^{-i\theta} = 0, \quad (2)$$

$$F(t) - \overline{F(t)} = f_1(t) \text{ на } L, \quad (3)$$

где $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); t – аффикс точек берегов трещин L ; $f_1(t) = 0$ на свободных берегах трещин; $f_1(t_1) = -2iq_y(t)$ на берегах концевых зон.

Основные соотношения поставленной задачи необходимо дополнить уравнением, связывающим сдвиг берегов зон предразрушения (концевые зоны) и усилия в связях. Без потери общности это соотношение представим в виде

$$w^+(x, 0) - w^-(x, 0) = C(x, q_y(x))q_y(x), \quad (4)$$

где функция $C(x, q_y(x))$ представляет собой эффективную податливость связей; $(w^+ - w^-)$ – сдвиг берегов концевых зон трещин.

Решение краевой задачи (2)–(3) будем искать в виде

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z), \quad (5)$$

$$F_1(z) = \tau_y^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \quad (6)$$

$$F_2(z) = \frac{1}{i\omega} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(t-z) dt, \quad (7)$$

где интегралы в формулах (7) берутся по линии $L = \{[-\ell, -\lambda] + [\lambda, \ell]\}$; $g(t)$ – искомая функция, характеризующая сдвиг берегов при переходе через линию трещин;

$$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \left[\frac{1}{\sin^2(\pi z/\omega)} - \frac{1}{3} \right], \quad g(x) = \frac{\mu}{2} \frac{d}{dx} [w^+(x, 0) - w^-(x, 0)] \text{ на } L. \quad (8)$$

Неизвестная функция $g(x)$ и искомые постоянные α_{2k} должны быть определены из краевых условий (2) и (3). Для вывода уравнений относительно коэффициентов α_{2k} функции $F_1(z)$ преобразуем краевое условие (2) к виду

$$F_1(\tau)e^{i\theta} - \overline{F_1(\tau)}e^{-i\theta} = if_2(\theta), \quad (9)$$

где $if_2(\theta) = -F_2(\tau)e^{i\theta} + \overline{F_2(\tau)}e^{-i\theta}$.

Для решения краевой задачи (9) применим метод степенных рядов. Относительно функций $if_2(\theta)$ и $F_1(\tau)$ будем считать, что они разлагаются на контуре $|\tau| = \lambda$ в ряды Фурье

$$if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k+1} e^{(2k+1)\theta}, \quad \operatorname{Re} A_{2k+1} = 0, \quad A_{2k+1} = -\frac{1}{i\omega} \int_L g(t) f_{2k+1}(t) dt,$$

$$f_{2k+1}(t) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) - \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} \gamma^{(2k+2)}(t), \quad \gamma = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} t,$$

$$F_1(\tau) = \tau_y^\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{\tau^{2k+2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k} \tau^{2j}.$$

Подставив в левую часть краевого условия (9) вместо $F_1(\tau)$, $\overline{F_1(\tau)}$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки $z = 0$, а в правую часть (9) вместо функции $if_2(\theta)$ ряд Фурье и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $\exp(i\theta)$ в обеих частях, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k+2} :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} r_{0,j} + \alpha_0 - \alpha_2 = A_1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} r_{n,j} \lambda^{2n} - \alpha_{2n+2} - \alpha_2 = A_{2n+1}. \quad (10)$$

Здесь $r_{n,j} = \frac{(2n+2j+1)!}{(2n)!(2j+1)!} \frac{g_{n+j+1}}{2^{2n+2j+2}}$, $r_{0,0} = 0$, $g_j = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2j}}$.

Требую, чтобы функции (5) удовлетворяли краевое условие на берегах L , для определения неизвестной функции $g(x)$ получаем сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\omega} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt - \operatorname{Im}[F_1(x)] = f_1(x) \quad \text{на } L. \quad (11)$$

Система (10) алгебраических уравнений совместно с сингулярным уравнением (11) являются основными разрешающими уравнениями рассматриваемой задачи, позволяющими определить искомую функцию и коэффициенты α_{2k} . После определения функции $g(x)$ и α_{2k} можно найти напряженно-деформированное состояние перфорированного тела при наличии когезионных трещин. Используя в основной полосе периодов разложение функции $\operatorname{ctg}(\pi z/\omega)$ и замену переменных после некоторых преобразований, сингулярное интегральное уравнение (11) приводят к стандартному виду. Так как в перфорированном теле напряжения ограничены, решение сингулярного интегрального уравнения ищем в классе всюду ограниченных функций. Используя процедуру алгебраизации [7] сингулярных интегральных уравнений, интегральное уравнение сводится к $M+1$ алгебраических уравнений. В правую часть полученных систем входят неизвестные значения напряжений $q_y(\eta_r)$ в узловых точках, принадлежащих конечным зонам L . Незвестные напряжения в связях $q_y(\eta_r)$, возникающие на берегах конечных зон L , определяются из дополнительного условия (4).

Используя полученное решение, соотношения (8) запишем в виде

$$g(x) = \frac{\mu}{2} \frac{d}{dx} \left[C(x, q_y(x)) q_y(x) \right]. \quad (12)$$

Требую выполнения условий (12) в узловых точках, принадлежащих конечной зоне L , получим еще одну систему из M_1 уравнений для определения значений $q_y(\eta_m)$ ($m = 1, 2, \dots, M_1$). При этом используют метод конечных разностей. Так как размеры конечных зон неизвестны, объединенная алгебраическая система уравнений является нелинейной даже при линейных связях. Для ее решения применяют метод последовательных приближений [8]. В каждом приближении

объединенная алгебраическая система решалась методом Гаусса с выбором главного элемента. В случае нелинейного закона деформирования связей при определении усилий в концевых зонах используется итерационный метод, подобный методу упругих решений [9]. Считается, что закон деформирования межчастичных связей в концевых зонах линейный при $w^+ - w^- \leq w_*$. Первый шаг итерационного процесса счета состоит в решении системы уравнений для линейно-упругих связей. Следующие итерации выполняются только в случае, если на части концевой зоны имеет место неравенство $w^+ - w^- > w_*$. Расчет эффективной податливости проводится подобно определению секущего модуля в методе переменных параметров упругости [10]. Нелинейная часть кривой деформирования связей аппроксимировалась билинейной зависимостью [11], восходящий участок которой соответствовал деформированию связей ($0 < w^+ - w^- \leq w_*$) с их максимальным усилием. При $w^+ - w^- > w_*$ закон деформирования описывали нелинейной зависимостью, определяемой точками (w_*, τ_*) и (δ_c, τ_c) , причем при $\tau_c > \tau_*$ имела место возрастающая линейная зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей). В численных расчетах полагалось $M = 30$, что соответствует разбиению интервала интегрирования на 30 чебышевских узлов. Установлена зависимость длины концевой зоны трещины от безразмерного параметра нагружения (рис. 2). С увеличением радиуса отверстий длина концевой зоны растет.

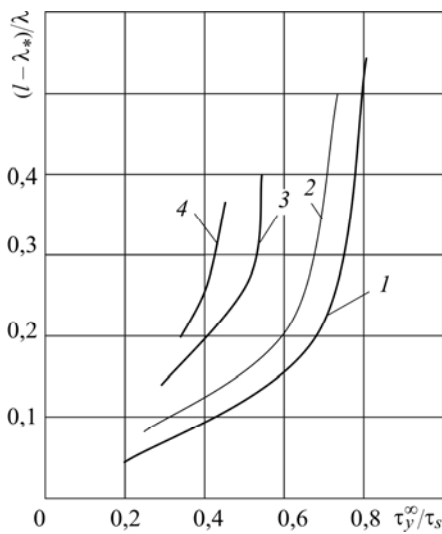


Рис. 2. Fig. 2.

Рис. 2. Зависимость длины концевой зоны $(\ell - \lambda_*)/\lambda$ от безразмерной внешней нагрузки τ_y^∞/τ_s для радиусов отверстий $\lambda = 0,2$ (1); $0,3$ (2); $0,4$ (3); $0,5$ (4).

Fig. 2. Dependence of the crack-tip zone length $(\ell - \lambda_*)/\lambda$ on the dimensionless value of external loading τ_y^∞/τ_s for some values of the hole radius $\lambda = 0.2$ (1); 0.3 (2); 0.4 (3); 0.5 (4).

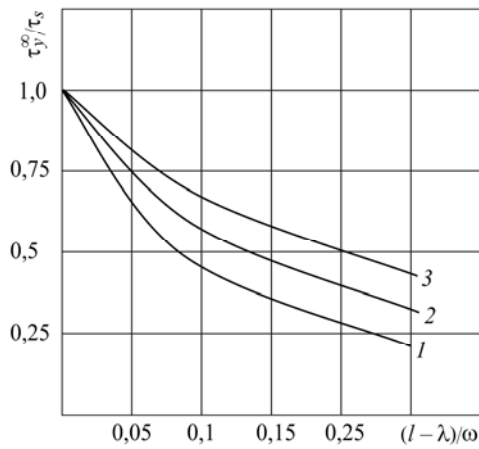


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Зависимость критической нагрузки τ_y^∞/τ_s от безразмерной длины трещины $(\ell - \lambda)/\omega$ для радиусов отверстий $\lambda = 0,2$ (1); $0,3$ (2); $0,4$ (3).

Fig. 3. Dependence of critical loading τ_y^∞/τ_s on dimensionless crack length $(\ell - \lambda)/\omega$ for some values of the hole radius $\lambda = 0.2$ (1); 0.3 (2); 0.4 (3).

Для определения предельно равновесного состояния перфорированного тела, при котором трещина развивается, используют условие (1).

Используя полученное решение, условием, определяющим предельную внешнюю нагрузку, при которой происходит рост трещин в точках $x = \pm\lambda_*$, является следующее:

$$C(\lambda_*, q_y(\lambda_*))q_y(\lambda_*) = \delta_{IIIc}. \quad (13)$$

Решение объединенной алгебраической системы и критерия (13) позволяет определить критическое значение внешней нагрузки, размеры концевых зон трещин и усилия в связях в состоянии предельного равновесия, при котором происходит рост трещин. Установлена зависимость критической нагрузки от безразмерной длины трещины (рис. 3). Как показывают расчеты, с увеличением радиуса отверстий критическая нагрузка уменьшается.

ВЫВОДЫ

Анализ предельно равновесного состояния перфорированного тела, при котором трещина развивается, сводится к параметрическому исследованию объединенной алгебраической системы и критерия роста трещин (13) при различных законах деформирования связей, упругих постоянных материалов и геометрических характеристиках перфорированного тела.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто перфороване тіло, послаблене поверхневими когезійними тріщинами, за поздовжнього зсуву. Вирішення задачі про рівновагу такого тіла зведено до розв'язку однієї нескінченної алгебричної системи та одного сингулярного інтегрального рівняння з ядром типу Коші.

SUMMARY. The punched body weakened by surface cohesive cracks is considered under antiplane sliding. The solution of the problem on equilibrium of the punched body under longitudinal shear with cohesive cracks is reduced to the solution of one infinite algebraic system and one nonlinear singular integral equation with a Cauchy-type kernel.

1. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие найдрібніших тріщин в твердому тілі // Прикл. механіка. – 1959. – 5, № 4. – С. 391–401.
2. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. solids. – 1960. – 8, № 2. – P. 100–104.
3. The special issue: Cohesive models // Eng. Fract. Mech. – 2003. – 70, № 14. – P. 1741–1987.
4. Панасюк В. В. Деформационные критерии в механике разрушения // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1986. – 22, № 1. – С. 7–17.
5. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
6. Мирсалимов В. М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. – Баку: Элм, 1984. – 124 с.
7. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 443 с.
8. Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
9. Ильюшин А. А. Пластичность. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. – 376 с.
10. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С. 51–73.
11. Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – 2, № 2. – С. 22–39.

Получено 26.11.2012