

УДК 621.319:519.22

## СТОХАСТИЧНА ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ СИГНАЛІВ ВІБРАЦІЇ ПІДШИПНИКА КОЧЕННЯ ТА ЇХ АНАЛІЗ

І. Й. МАЦЬКО<sup>1</sup>, І. М. ЯВОРСЬКИЙ<sup>1,2</sup>, Р. М. ЮЗЕФОВИЧ<sup>1</sup>, З. ЗАКЖЕВСЬКИЙ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

<sup>2</sup> Інститут телекомунікацій Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща

За стохастичною динамічною моделлю підшипника кочення, поданою у вигляді системи двох нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, виконано комп'ютерну симуляцію і досліджено вертикальний й горизонтальний складники вібрації. З допомогою методів статистики періодично корельованих випадкових процесів встановлено, що за появи дефектів на зовнішньому чи внутрішньому кільцях вібрації набувають властивостей періодичної нестационарності. Проаналізовано часову мінливість оцінок математичного сподівання, що описують детерміновані складники коливань, а також оцінки дисперсій, що визначають потужність флуктуацій. Наведено залежності від зсуву кореляційних компонентів – коефіцієнтів Фур'є кореляційних функцій. Обґрунтовано особливості структури періодично корельованого випадкового процесу, що описує вертикальну й горизонтальну вібрації за присутності дефектів на зовнішньому та внутрішньому кільцях.

**Ключові слова:** підшипник кочення, вібрація, періодично корельований випадковий процес, математичне сподівання, кореляційна функція.

Підшипники кочення широко використовують у найрізноманітніших обертових механізмах – від невеликих портативних пристроїв до важких промислових машин. Щоб забезпечити безперебійну роботу механічних комплексів, необхідно зрозуміти природу породжених ними вібраційних сигналів. Зі всіх складників механічних систем підшипники найбільше піддаються втомним навантаженням та швидше за будь-який інший елемент виходять з ладу. Тому під час діагностики машинного комплексу зосереджують увагу на вивченні саме вібраційних відгуків від підшипникових вузлів.

Кожний дефект відповідно до стадії розвитку можна розглядати як незначний, середній чи серйозний. Термін незначний означає, що дефект виявлений і ідентифікується, але в нормальних експлуатаційних режимах це не може призвести до відмови в передбачуваному інтервалі часу. Якщо дефект серйозний, то немає жодної можливості гарантувати роботу підшипника впродовж тривалого періоду часу без відмови. Його слід або замінити, або якщо його дію продовжити, то час між контрольними вимірами треба суттєво скоротити.

Діагноз “небезпечна відмова” свідчить про проковзування у місці посадки, серйозний дефект змашування, суттєве спрацювання кульок, роликів або сепаратора, або про два та більше небезпечних дефектів на різних поверхнях кочення. Серйозність дефекту визначають параметри періодично чи майже періодичного складника вібраційного сигналу. Метод діагностики підшипників кочення, що ґрунтується на виявленні та аналізі прихованих періодичностей у процесах модуляції випадкової вібрації, використовує принципову відмінність механізмів формування сил тертя в справних і дефектних підшипниках та характерні особливості взаємодії поверхонь кочення з кавернами, відшаруваннями чи тріщинами еле-

ментів підшипника. Сили тертя залежать від коефіцієнта тертя кочення і навантаження на елементи кочення. У справних підшипниках вони не залежать від повороту рухомого кільця або сепаратора, а у підшипниках з дефектами монтажу, включаючи перекося кільця, внаслідок неоднорідної радіальної напруженості навантаження на елементи кочення збільшуються і, що важливо, залежать від цього кута. У результаті сили тертя разом з випадковою вібрацією, збудженою ними, стають періодично модульованими.

У кулькових підшипниках із неоднорідним зношуванням внутрішніх та зовнішніх кілець і елементів кочення коефіцієнт тертя залежить від кута повороту рухомого кільця або сепаратора, що спричиняє періодичну модуляцію амплітуди сил тертя і результуючої випадкової вібрації. Нарешті, ударні імпульси в підшипниках із западинами та тріщинами на поверхнях елементів кочення і кільцях також породжують періодично модульовану стохастичну вібрацію. На резонансних частотах її формує послідовністю загасальних власних коливань, тому вона не є стаціонарна випадкова. На інших частотах імпульси від ударів збуджують послідовності випадкових швидко загасальних сигналів вібрації, що також періодично модулюються.

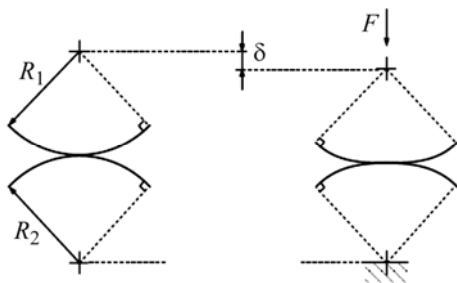


Рис. 1. Схема точкового контакту.

Fig. 1. Scheme of point contact.

Загалом підшипниковим вузлом роторних механізмів притаманна нелінійна поведінка, що пов'язано з нелінійністю сил контакту робочих поверхонь кілець підшипника та кульок, зазорами між кульками та кільцями, поверхневими нерівностями кілець та швидкостями обертання елементів підшипника. Сили, що породжують ці вібрації, змінні в часі, а оскільки контактують округлі поверхні, їх можна вважати точковими. Якщо контакт між двома пружними тілами приведений до

однієї точки, його називають точковим. Геометрію точки контакту визначають радіуси кривизни контактуючих поверхонь (рис. 1).

У підшипниках кочення тіла контактують як із зовнішнім, так і з внутрішнім їх кільцями. Сила контакту згідно з теорією контакту округлих поверхонь Герца [1, 2]

$$F = \kappa \delta^{3/2},$$

де  $\kappa = \frac{\pi \varepsilon E}{3K} \sqrt{\frac{2\Theta R}{K}}$ ,  $\varepsilon = \frac{b}{a}$ ,  $a$  – половина довжини контакту в напрямку руху,  $b$  – половина ширини контакту в напрямку, перпендикулярному до напрямку руху, параметри  $\Theta$  і  $K$  визначають еліптичні інтеграли:

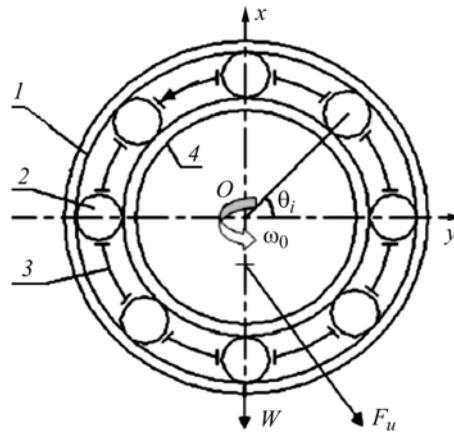
$$K = \int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \sin^2 \phi \right]^{-1/2} d\phi, \quad \Theta = \int_0^{\pi/2} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \sin^2 \phi \right]^{1/2} d\phi.$$

Для округлих контактуючих поверхонь  $\varepsilon = 1$ ,  $K = \Theta = \pi/2$ . Отже, сили контакту між тілами кочення та кільцями підшипника нелінійні. Підшипник вертикально навантажений силою тяжіння  $W = mg$ , спричиненою масою вала, та силою дисбалансу  $F_u$ , породженою його обертанням (рис. 2). У математичній моделі елементи такого підшипника розглядають як пружини з демпфуванням, а систему контакту тіл кочення з кільцями – як нелінійну пружину [3].

Якщо вираз у дужках більший за нуль, то таке тіло кочення вважають навантаженим, що діє на кільця підшипника з силою  $F_{\phi_j}$ . Якщо цей вираз рівний нулю або набуває від'ємне значення, то це означає, що тіло кочення знаходиться поза зоною навантаження підшипника та не діє на кільця.

Рис. 2. Схема підшипника кочення:  
1, 4 – зовнішнє та внутрішнє кільця;  
2 – тіло кочення; 3 – сепаратор.

Fig. 2. Schematic view of ball bearing:  
1, 4 – outer and inner races;  
2 – rolling element; 3 – cage.



Силу точкового контакту, спричинену одним тілом кочення, положення якого описує кут  $\varphi_j$ , можна обчислити так:

$$F_{\varphi_j} = k \left[ x \cos \varphi_j + y \sin \varphi_j \right]^{3/2}.$$

Спроекувавши на осі  $Ox$  та  $Oy$  сумарну силу пружності, зумовлену тілами кочення, отримаємо:

$$F_x = \sum_{j=1}^{N_b} k \left[ x \cos \varphi_j + y \sin \varphi_j - \Pi_i \right]^{3/2} \cos \varphi_j, \quad F_y = \sum_{j=1}^{N_b} k \left[ x \cos \varphi_j + y \sin \varphi_j - \Pi_i \right]^{3/2} \sin \varphi_j.$$

Тут  $N_b$  – кількість тіл кочення;  $\Pi_i$  – функція, що описує форму кілець підшипника та дефекти на них.

Рівняння руху точок на кільці підшипника, враховуючи інерційні сили, сили зникання та силу тяжіння, можна записати так:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + \sum_{j=1}^{N_b} k \left[ x \cos \varphi_j + y \sin \varphi_j - \Pi_j \right]^{3/2} \cos \varphi_j = W + F_u \cos \omega t,$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + \sum_{j=1}^{N_b} k \left[ x \cos \varphi_j + y \sin \varphi_j - \Pi_j \right]^{3/2} \sin \varphi_j = F_u \sin \omega t.$$

Тут  $m$  – сумарна маса вала та внутрішнього кільця, проте майже завжди маса кільця значно менша, ніж вала, і її можна знехтувати.

Наведені вище рівняння взяті за основу для комп'ютерної симуляції вібраційних сигналів. Використовували числовий метод з коригуванням кроку обчислення. З допомогою симуляції отримали серію реалізацій вібрацій як у вертикальному, так і горизонтальному напрямках для бездефектного підшипника та з дефектами на зовнішньому та внутрішньому кільцях. Для опису дефекту використали функцію  $\Pi_j = \frac{A + \varepsilon_A}{2} \left( 1 + \cos \frac{\varphi_j - \varphi_d}{\Delta\varphi} \right) + \varepsilon_\omega$ , де  $\varepsilon_A$  – рівномірно розподіле-

на на інтервалі  $[-0,25A; 0,25A]$  випадкова величина;  $\varphi_d$  – кут, під яким знаходиться дефект;  $\Delta\varphi$  – кутова його ширина;  $\varepsilon_\omega$  – стаціонарний білий шум. Симуляцію виконали за таких параметрів: маса вала  $m = 0,6$  kg, модуль Юнга для сталі  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  J/m, частота обертання вала  $\omega_0 = 80$  Hz, радіус внутрішнього кільця підшипника  $r = 0,023$  m, зовнішнього  $R = 0,046$  m, радіус тіл кочення  $r_b = 0,00398$  m, а їх кількість  $N_b = 8$ . Для оцінювання ймовірнісних характеристик брали довжину реалізації, рівну 100 періодам обертання з 300 точками на періоді і отримали похибку не більше 10%.

Вібраційний сигнал від підшипника кочення з дефектом свідчить про викиди на зовнішньому кільці, тобто про накопчування тіл кочення на дефект (рис. 3). Частота таких ударів відповідає частоті перекопчування тіл кочення по зовнішньому кільці і становить  $\omega_{out} = 283,5$  Hz. Амплітуди викидів мають випадковий характер. У вібраційному сигналі від підшипника кочення з дефектним внутрішнім кільцем

присутні періодичні викиди як вгору, так і вниз, що вказує на переміщення дефекту. Частота таких викидів відповідає частоті перекошування тіл кочення по внутрішньому кільці:  $\omega_m = 365,5$  Hz. Вертикальний і горизонтальний складники мало відрізняються, але вертикальний дещо потужніший, що спричинено силою тяжіння.

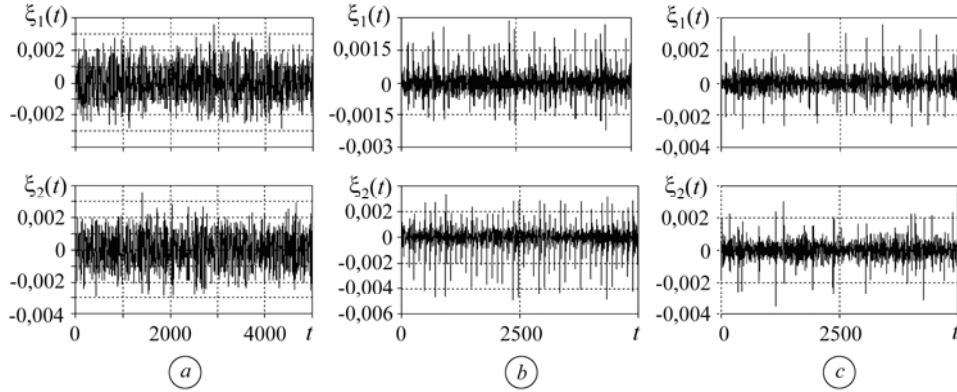


Рис. 3. Горизонтальний  $\xi_1(t)$  та вертикальний  $\xi_2(t)$  складники вібрації підшипника кочення: *a* – бездефектного; *b*, *c* – з дефектом на зовнішньому та внутрішньому кільцях.

Fig. 3. Horizontal  $\xi_1(t)$  and vertical  $\xi_2(t)$  components of roll bearing vibration: *a* – non-defective; *b*, *c* – with a fault on outer and inner races.

Виконаємо кореляційно-спектральний аналіз отриманих реалізацій у стаціонарному наближенні. Кореляційні функції стаціонарного наближення складників  $\xi_j(t)$ ,  $i = \overline{1, 2}$  обчислювали за формулою [4–6]

$$\hat{R}_{\xi_j}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[ \xi_j(nh) - \hat{m}_{\xi_j} \right] \left[ \xi_i(nh+u) - \hat{m}_{\xi_i} \right], \quad (1)$$

де

$$\hat{m}_{\xi_j} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \xi_j(nh),$$

$K = \theta/h$  – кількість елементів вибірки,  $\theta$  – довжина відрізка реалізації,  $h$  – крок дискретизації (рис. 4). Якщо підшипник справний, то потужність стохастичного вертикального складника становить приблизно 0,5 від потужності всього сигналу. Якщо зовнішнє кільце з дефектом, то вона зменшується до 0,2 потужності сигналу, а на хвості оцінки кореляційної функції появляються потужні викиди, які відповідають зіткненням тіл кочення з дефектом. Якщо внутрішнє кільце з дефектом, тоді потужність стохастичного складника становить  $\sim 0,4$  всієї потужності сигналу, а на хвості оцінки кореляційної функції присутні різнонапрямлені викиди, що відповідають зіткненням дефекту впродовж руху з тілами кочення.

Оцінка кореляційної функції стаціонарного наближення горизонтальної вібрації підшипника кочення з дефектом зовнішнього кільця така сама, як вертикальної. Співвідношення між потужностями детермінованого та стохастичного складників практично такі ж, однак, повна потужність горизонтальної вібрації майже вдвічі менша. За дефекту внутрішнього кільця оцінки кореляційної функції близькі.

Оцінки спектральної густини потужності стаціонарного наближення знайдемо, використовуючи кореляційний метод Блекмана–Тьюкі [4–6]:

$$\hat{f}_{\xi_j}(\omega) = \frac{\Delta u}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{R}_{\xi_j}(n\Delta u) k(n\Delta u) e^{-i\omega n\Delta u}, \quad (2)$$

де  $\Delta u = u_m/L$  – інтервал дискретизації за зсувом, а  $k(u)$  – кореляційне вікно:  $k(0) = 1$ ,  $k(-u) = k(u)$ . Тут вибрали вікно Хеммінга:

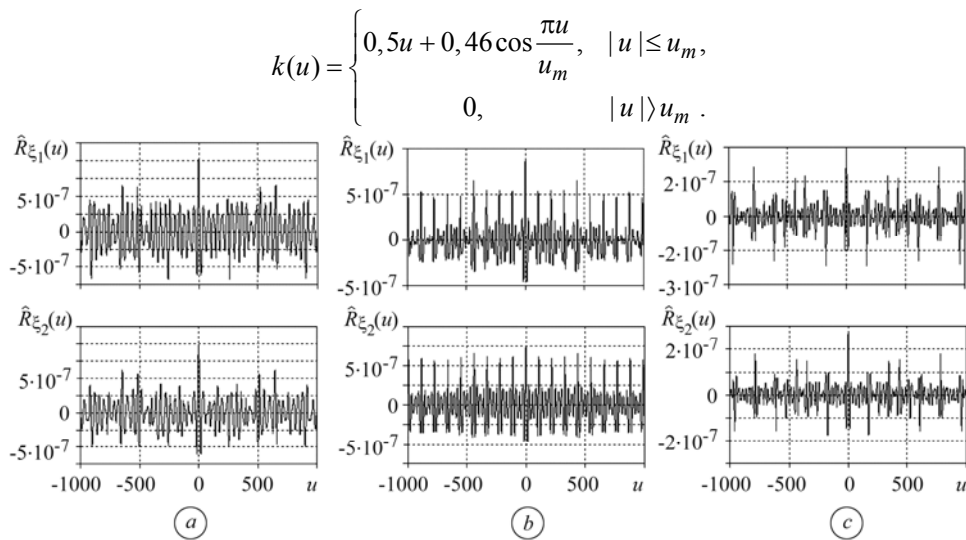


Рис. 4. Оцінки кореляційних функцій стаціонарного наближення горизонтального та вертикального складників: *a* – бездефектного підшипника; *b, c* – з дефектами на зовнішньому та внутрішньому кільцях.

Fig. 4. Estimators of correlation functions in stationary approximation of horizontal and vertical vibration components: *a* – non-defective bearing; *b, c* – with faults on outer and inner races.

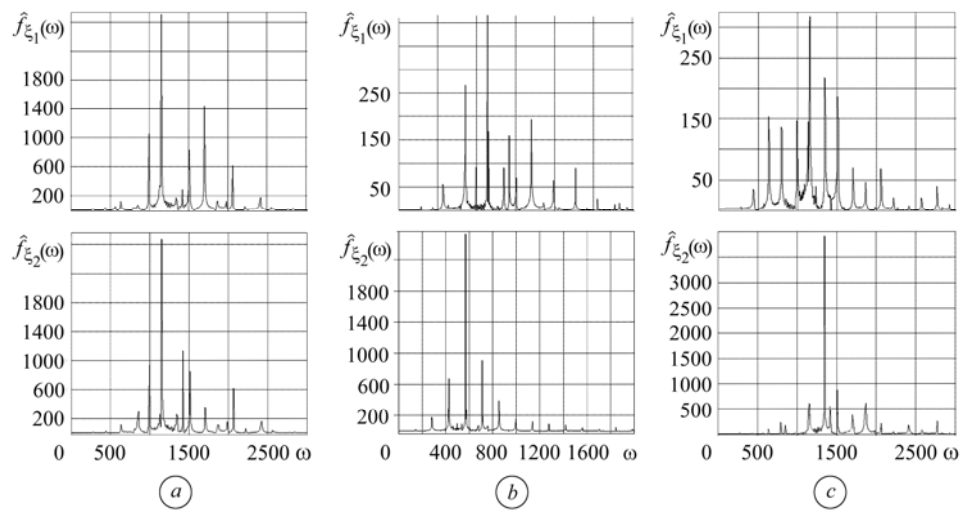


Рис. 5. Оцінки спектральних густин стаціонарного наближення горизонтального та вертикального складників вібрації: *a* – бездефектного підшипника; *b, c* – з дефектами на зовнішньому та внутрішньому кільцях.

Fig. 5. Estimators of spectral density in stationary approximation of horizontal and vertical vibration components: *a* – non-defective bearing; *b, c* – with a fault on outer and inner races.

Отримані оцінки (рис. 5) свідчать про те, що в усіх випадках переважають складники на частотах перекочування кульок по зовнішньому та внутрішньому кільцях та кратних до них. Також у спектрах за обертання вала присутні комбінаційні частоти. Якщо дефект знаходиться на зовнішньому кільці, то спектральна густина зосереджена в області частот від 250 до 1400 Hz, а якщо на внутрішньому – від 600 до 2500 Hz.

За спектральними густинами стаціонарного наближення важко проаналізувати ті їх частини, які сформовані детермінованими складниками вібрацій і які за

оцінками кореляційних функцій стаціонарного наближення є досить потужні. Зі спектрального аналізу випливає, що регулярні коливання можна описати майже періодичною функцією, тому для їх виділення використовуємо метод найменших квадратів [7] (рис. 6).

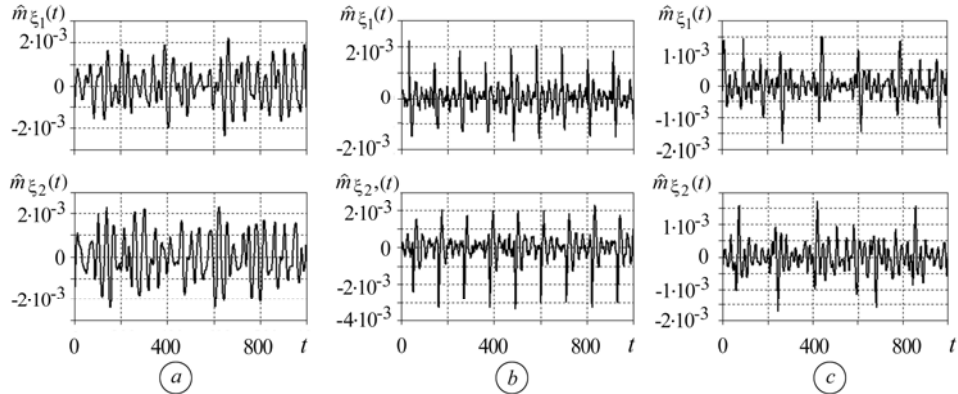


Рис. 6. Оцінки математичного сподівання горизонтальної та вертикальної вібрацій: *a* – без-дефектного підшипника; *b, c* – з дефектами на зовнішньому та внутрішньому кільцях.

Fig. 6. Estimators of mathematical expectation of horizontal and vertical vibration components: *a* – non-defective bearing; *b, c* – with a fault on outer and inner races.

Виявлено, що серед частот гармонік є кратні до  $\omega_{out}$  і  $\omega_{in}$ , а також комбінації  $n\omega_{out} \pm k\omega$  і  $n\omega_{in} \pm k\omega$ . Зауважимо, що через дефект суттєво збільшується кількість гармонік, особливо комбінаційних. За відсутності дефекту (рис. 7) стохастичний складник є реалізацією стаціонарного випадкового процесу з відносно швидкозникальними кореляційними зв'язками, а для дефектного підшипника присутні чіткі викиди. Оцінки кореляційних функцій позбавлені незначальних періодичних хвостів, що свідчить про відсутність детермінованих коливань.

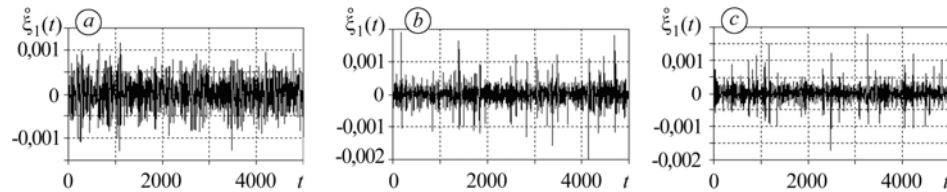


Рис. 7. Стохастичний складник вертикальної вібрації бездефектного підшипника кочення (*a*) та з дефектами на зовнішньому (*b*) та внутрішньому (*c*) кільцях.

Fig. 7. Stochastic part of non-defective ball bearing vertical vibration (*a*) and with a fault on outer (*b*) and inner (*c*) races.

Для вивчення періодичностей другого порядку у властивостях стохастичних складників використовуємо когерентний метод, який дає можливість аналізувати часові зміни характеристик за всіма можливими частотами. Кореляційний функціонал для визначення періоду має вигляд [8, 9]

$$\hat{b}_{\xi_j}(t, u, \tau) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \left[ \xi_j(t+n\tau) - \hat{m}_{\xi_j}(t+n\tau) \right] \left[ \xi_j(t+u+n\tau) - \hat{m}_{\xi_j}(t+u+n\tau) \right], \quad (3)$$

де  $\tau$  – пробний період. Значення  $\tau$ , що відповідають екстремумам цього перетворення, є оцінками періоду корельованості  $T$ .

Побудовані (рис. 8) залежності функціоналів  $\hat{b}_{\xi_j}(t, \Delta, \tau)$  від пробного періоду  $\tau$ , обчислених для горизонтального та вертикального складників вібрацій

дефектного підшипника для тих значень  $t_i$ , що відповідають максимумам цих перетворень за часом  $t$ . Тут чітко видно періодичні зміни характеристик другого порядку. Детальніший аналіз залежностей кореляційного функціонала (3) від параметра  $\tau$  дає можливість вибрати за оцінку періоду корельованості для дефекту зовнішнього кільця величину  $\hat{T}_{out} = 109$  у.а., а для внутрішнього –  $\hat{T}_{in} = 872$  у.а. Зауважимо, що їх значення практично збігаються з періодами обертання тіл кочення по зовнішньому й внутрішньому кільцях підшипника. Знаючи періоди, оцінимо кореляційні функції стохастичних складників. Застосуємо для цього компонентний метод [10, 11]:

$$\hat{b}_{\xi_j}(t, u) = \sum_{k=-L_2}^{L_2} \hat{B}_k^{(\xi_i)}(u) e^{ik \frac{2\pi}{T} t}, \quad (4)$$

при цьому

$$\hat{B}_k(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[ \xi_j(nh) - \hat{m}_{\xi_j}(nh) \right] \left[ \xi_j(nh+u) - \hat{m}_{\xi_j}(nh+u) \right] e^{-ik \frac{2\pi}{T} nh}, \quad (5)$$

$$\hat{m}_{\xi_j}(nh) = \sum_{k=-L_1}^{L_1} e^{ik \frac{2\pi}{T} nh} \left[ \frac{1}{K} \sum_{r=0}^{K-1} \xi_j(rh) e^{-ik \frac{2\pi}{T} rh} \right], \quad (6)$$

а числа  $L_s$ ,  $s = \overline{1, 2}$ , визначають номери найвищих гармонік у математичному сподіванні та кореляційній функції.

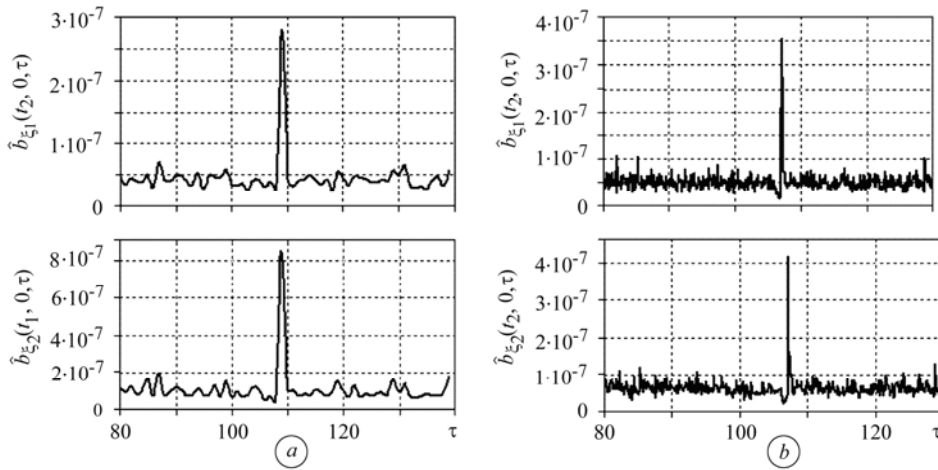


Рис. 8. Оцінки функціонала  $\hat{b}_{\xi_j}(t_i, 0, \tau)$  для горизонтального та вертикального складників вібрацій підшипника кочення з дефектом на зовнішньому (а) та внутрішньому (б) кільцях.

Fig. 8. Estimators of functional  $\hat{b}_{\xi_j}(t_i, 0, \tau)$  for horizontal and vertical vibration components of roll bearing with a fault on outer (a) and inner (b) races.

Обчислені на основі співвідношень (4)–(6) оцінки дисперсій  $\hat{b}_{\xi_j}(t, 0)$  для зовнішнього і внутрішнього кілець підшипника з дефектами подано на рис. 9. Як бачимо, змінам у часі цих величин притаманний ударний характер. Для бездефектного підшипника часові зміни мають вигляд малопотужних флуктуацій. Для зовнішнього кільця з дефектом у стохастичних складниках присутні потужні модуляції частоти перекочування тіл кочення по зовнішньому кільцю, тобто частоти  $\omega_{out} = 283,5$  Hz, а для внутрішнього –  $365,5$  Hz.

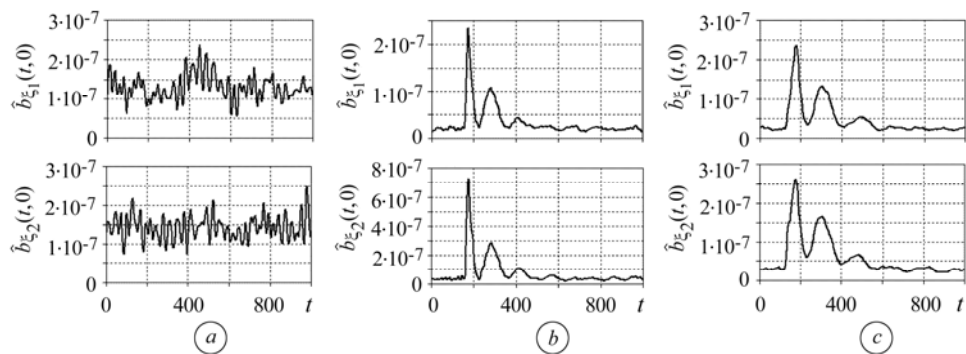


Рис. 9. Оцінки дисперсій горизонтального та вертикального стохастичних складників вібрації підшипника кочення: *a* – бездефектного; *b, c* – з дефектами на зовнішньому та внутрішньому кільцях.

Fig. 9. Estimators of variances of horizontal and vertical stochastic parts of roll bearing vibration: *a* – non-defective; *b, c* – with a fault on outer and inner races.

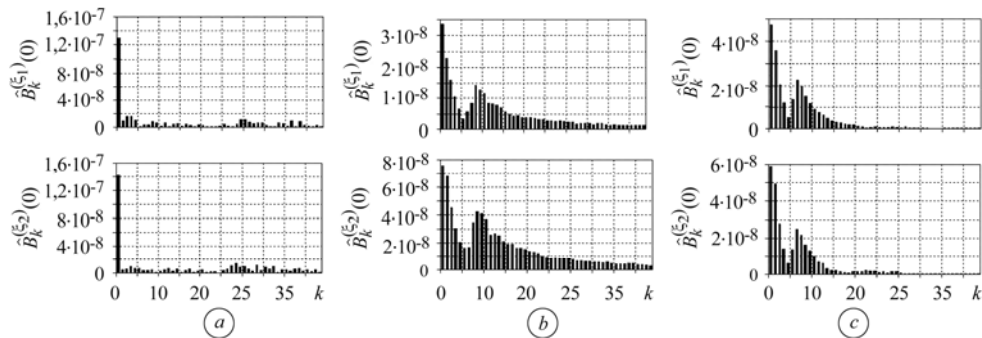


Рис. 10. Оцінки компонентів Фур'є дисперсії горизонтального та вертикального стохастичних складників вібрації: *a* – бездефектного підшипника; *b, c* – з дефектами на зовнішньому та внутрішньому кільцях.

Fig. 10. Estimators of Fourier variance components of horizontal and vertical vibration stochastic parts: *a* – non-defective bearing; *b, c* – with a fault on outer and inner races.

Часова поведінка оцінок дисперсій для різних складників і дефектів подібна, проте за дефекту зовнішнього кільця оцінка дисперсії вертикального складника втричі більша, ніж горизонтального. Відношення мінімальних за період значень оцінок до максимальних для зовнішнього кільця з дефектом такі:  $\hat{b}_{\xi_1}^{(\min)}(t, 0) / \hat{b}_{\xi_1}^{(\max)}(t, 0) = 0,12$  та  $\hat{b}_{\xi_2}^{(\min)}(t, 0) / \hat{b}_{\xi_2}^{(\max)}(t, 0) = 0,04$ , а для внутрішнього –  $\hat{b}_{\xi_1}^{(\min)}(t, 0) / \hat{b}_{\xi_1}^{(\max)}(t, 0) = 0,11$  та  $\hat{b}_{\xi_2}^{(\min)}(t, 0) / \hat{b}_{\xi_2}^{(\max)}(t, 0) = 0,15$ . Інформативним діагностичним критерієм про стан підшипника є коефіцієнти Фур'є кореляційної функції стохастичного складника вібраційного сигналу. Якщо підшипник кочення справний, то вібраційний сигнал, що породжується в ньому, стаціонарний. Підтверджує це діаграма компонентів (рис. 10*a*), на якій серед значущих присутній лише нульовий.

За появи дефекту сигнал набуває властивостей періодичної нестационарності і значущими є більше 10 компонентів: що він розвинутіший, то більша величина

$$I = \sum_{k=1}^L |\hat{B}_k(0)| / \hat{B}_0(0),$$

яку можна вважати мірою нестационарності (рис. 11). Для

зовнішнього кільця з дефектом для горизонтального та вертикального складників маємо:  $I = 5,88$  і  $8,32$ , а для внутрішнього –  $I = 4,29$  і  $3,83$ .



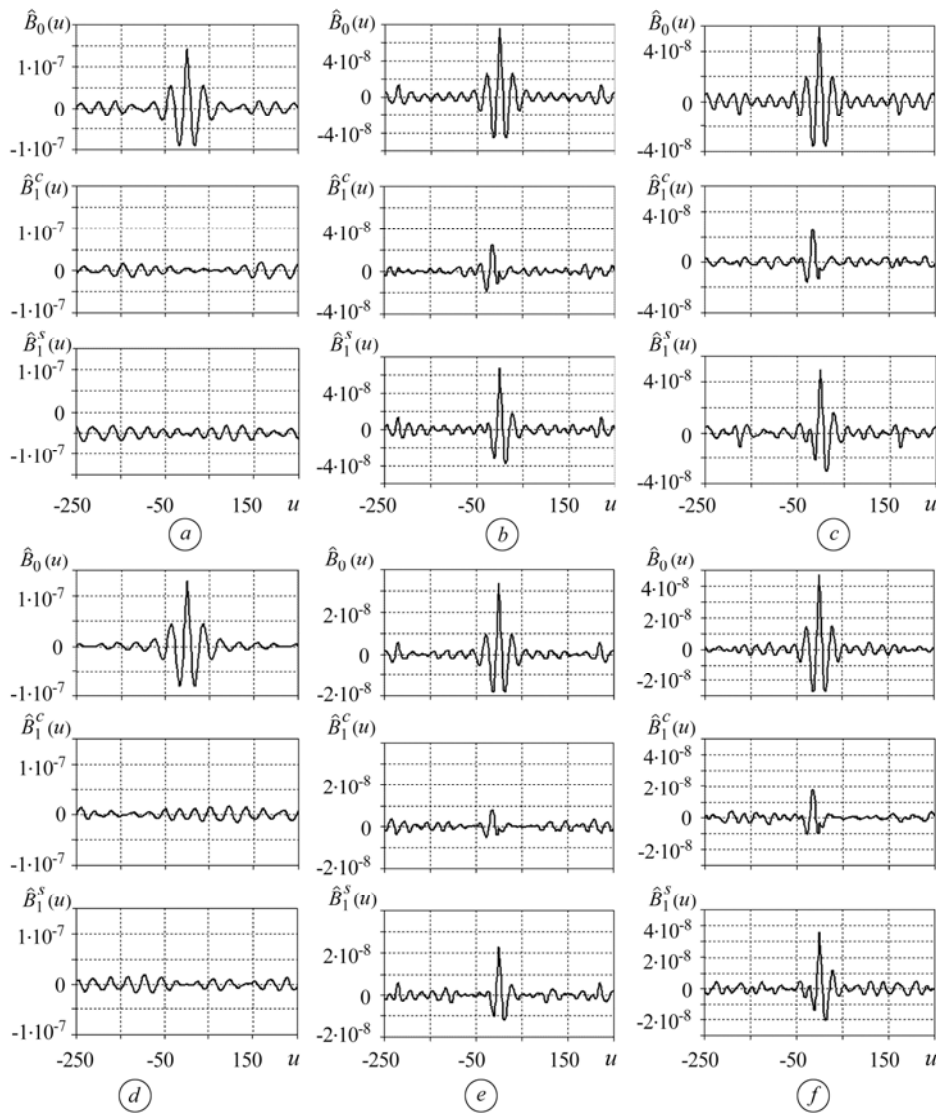


Рис. 11. Оцінки нульового та перших косинусного і синусного кореляційних компонентів горизонтального (a–c) і вертикального (b–f) складників бездефектного підшипника (a, d), а також з дефектами на зовнішньому (b, e) і внутрішньому (d, f) кільцях.

Fig. 11. Estimators of the zero and the first cosine and sine parts of correlation components of horizontal (a–c) and vertical (b–f) parts of vibration of non-defective roll bearing (a, d), with faults on outer (b, c) and inner (d, f) races.

Характерні риси дефектів підшипника кочення проявляються у змінах кореляційної функції та кореляційних компонентів за зсувом. Оцінки залежностей від зсуву нульового та першого кореляційних компонентів горизонтального та вертикального складників вібрації проілюстровано на рис. 11. Як бачимо, вони осциляційно зникають з ростом зсуву. Подібна поведінка оцінок вищих кореляційних компонентів, проте період зникання коливань з ростом номера компонента зменшується і є обернено пропорційним до нього. Це свідчить про єдине джерело модуляції гармонічних складників. Якоїсь відчутної різниці у властивостях оцінок за дефектів зовнішнього та внутрішнього кілець виділити не вдається.

Тестовою ознакою, за якою можна судити про дефект елемента підшипника кочення, є періодична нестационарність вібраційного сигналу, яка проявляється у

характеристиках другого порядку. Ця нестационарність виникає внаслідок взаємодії стохастичного і детермінованого складників вібрацій, оскільки система диференціальних рівнянь другого порядку, яка їх описує, нелінійна. Власне той факт, що періодична нестационарність вібросигналу виникає тільки за появи дефекту, слід використовувати для оцінки ступеня розвитку останнього, сформувавши ознаки, які визначають міру нестационарності другого порядку. Характерні риси дефектів проявляються в кореляційно-спектральній структурі сигналу, тому подальші дослідження слід зосередити на її аналізі. За наведеними вище результатами про окремі складники також важко оцінити просторові властивості вібрацій, без яких неможливо розв'язати задачу про локалізацію дефектів, тому доцільний також взаємний аналіз вертикального та горизонтального складників.

*РЕЗЮМЕ.* На основани стохастической модели подшипника качения в виде системы двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка проведено компьютерную симуляцию и исследовано вертикальную и горизонтальную вибрации. С использованием методов статистики периодически коррелированных случайных процессов обнаружено, что при появлении дефекта на внешнем или внутреннем кольцах вибрации приобретают свойства периодически нестационарности. Проанализирована временная изменчивость оценок математического ожидания, которые описывают детерминированные составляющие колебаний, а также оценены дисперсии, определяющие мощность флуктуаций. Наведены зависимости от смещения корреляционных компонентов – коэффициентов Фурье корреляционных функций. Обсуждены особенности структуры периодически коррелированного случайного процесса, что описывает вертикальную и горизонтальную вибрации при наличии дефектов на внешнем и внутреннем кольцах.

*SUMMARY.* On the base of stochastic dynamical model of roll bearing in the form of the system of two non-linear differential second-order equations the computer simulation is done and horizontal and vertical parts of vibration are investigated. Using the methods of statistic of periodically correlated random processes it is shown that the fault appearing on the outer or inner race leads to vibrations and acquire properties of periodical non-stationarity. The time variety of the mean function estimators, which describe deterministic oscillations and variance estimators which determine the power of fluctuations is analyzed. The dependences of correlation components, Fourier coefficients of correlation functions, on time lag are shown. The structure peculiarities of periodically correlated random processes which describe the vertical and horizontal vibrations of the roll bearing with faulty outer and inner races are analyzed.

1. *Fault Diagnosis of a Rotor Bearing System using Response Surface Method* / P. K. Kankar, S. P. Harsha, P. Kumar, S. C. Sharma // *European J. Mechanics, A Solids*. – 2009. – **28**. – P. 841–857.
2. *Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper* // *J. für die reine und angewandte, Mathematik*. – 1881. – **92**. – P. 156–171.
3. *Мыслович М. В., Марченко Б. Г. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин*. – К.: Наук. думка, 1992. – 195 с.
4. *Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций*. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – 280 с.
5. *Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных*. – М.: Мир, 1989. – 546 с.
6. *Грибанов Ю. И., Мальков В. Л. Спектральный анализ случайных процессов*. – М.: Энергия, 1974. – 239 с.
7. *Javorskyj I., Mykhajlyshyn V., and Zabolotnyj O. Least squares method for statistical analysis of polyrhythms* // *Appl. Math. Letters*. – 2003. – **16**, № 8. – P. 1217–1222.
8. *Javorskyj I. and Mykhajlyshyn V. Probabilistic Models and Investigation of Hidden Periodicities* // *Ibid.* – 1996. – **9**, № 2. – P. 21–23.
9. *Javorskyj I. and Mykhajlyshyn V. Probabilistic Models and Statistical Analysis of stochastic Oscillations* // *Pattern Recognitions and Image Analysis*. – 1996. – **6**, № 4. – P. 749–763.
10. *Coherent Covariance Analysis of Periodically Correlated Random Processes* / I. Javorskyj, I. Isaev, Z. Zakrzewski, S. P. Brooks // *Signal Proc.* – 2007. – **87**. – P. 13–32.
11. *Component covariance analysis for periodically correlated random processes* / I. Javorskyj, I. Isayev, J. Majewski, R. Yuzefovych // *Ibid.* – 2010. – **90**. – P. 1083–1102.

*Одержано 25.04.2013*