

УДК 539.3

ВПЛИВ АНІЗОТРОПІЇ МАТЕРІАЛУ НА РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ВИРІЗУ

М. П. САВРУК^{1,2}, А. КАЗБЕРУК², Л. Й. ОНИШКО¹

¹ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

² Білостоцька політехніка, Польща

Розглянуто задачі про розподіли напружень у нескінченній анізотропній площині з параболічним вирізом за трьох основних типів деформації, коли на нескінченності задано асимптотику поля напружень, в яку входять коефіцієнти інтенсивності напружень у вершині відповідної напівнескінченної тріщини. Розв'язки задач отримано за допомогою граничного переходу з відомих аналітичних розв'язків для еліптичного отвору в анізотропній площині за трьох видів навантаження на нескінченності (симетричного розтягу, поперечного та поздовжнього зсувів). Ці результати узагальнюють відомі розв'язки про розподіл напружень біля вузьких закруглених вирізів в ізотропній площині та відображають вплив анізотропії матеріалу на концентрацію напружень.

Ключові слова: анізотропна та ортотропна площини, параболічний виріз, плоска та антиплоска задачі, напружений стан.

Концентрацію напружень біля напівнескінченного параболічного вирізу в ізотропній площині досліджували раніше [1, 2]. В анізотропній площині параболічний виріз розглядали лише за симетричного розтягу [3]. Нижче ці результати узагальнено на параболічний виріз в анізотропній площині за трьох типів деформування: симетричного розтягу, поперечного та поздовжнього зсувів. Детальніше розглянуто ортотропну площину з вирізом, розташованим у напрямку однієї з осей ортотропії матеріалу.

Симетричне навантаження. Розглянемо анізотропну площину з еліптичним отвором у декартовій системі координат xOy , де його велика a і мала b півосі лежать на осях Ox і Oy . Край отвору вільний від зовнішнього навантаження, а на нескінченності задані напруження $\sigma_y^\infty = p$ (рис. 1а).

Аналітичний розв'язок задачі про розтяг на нескінченності анізотропної пластини з еліптичним отвором зусиллями p перпендикулярно до осі Ox записано через дві аналітичні функції $\Phi_j(z_j)$ ($j=1,2$) комплексних змінних $z_j = x + \mu_j y$ [4–7]:

$$\Phi_1(z_1) = \Phi_1^0(z_1) + \frac{pam_2}{a + i\mu_1 b} \left(1 - \frac{z_1}{R(z_1)} \right), \quad \Phi_2(z_2) = \Phi_2^0(z_2) - \frac{pam_1}{a + i\mu_2 b} \left(1 - \frac{z_2}{R(z_2)} \right), \quad (1)$$

де функції $\Phi_1^0(z_1)$ і $\Phi_2^0(z_2)$ – сталі величини, які описують однорідний напружений стан за відсутності отвору [4]

$$m_j = \mu_j / [2(\mu_1 - \mu_2)], \quad R(z_j) = \sqrt{z_j^2 - (a^2 + \mu_j^2 b^2)}, \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Тут μ_1, μ_2 і $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ – корені характеристичного рівняння:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0, \quad (3)$$

а a_{ik} ($i, k = 1, 2, 6$) – пружні характеристики анізотропного матеріалу.

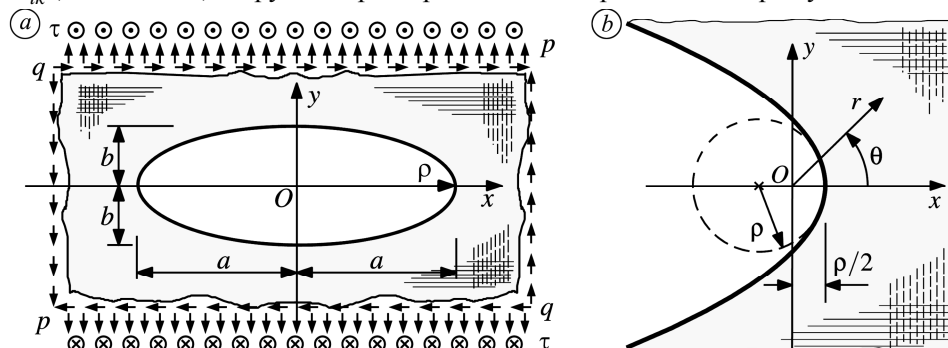


Рис. 1. Еліптичний отвір (а) та параболічний виріз (b) в анізотропній площині.

Fig. 1. An elliptical hole (a) and a parabolic notch (b) in an anisotropic plane.

Для ортотропної площини, коли головні осі ортотропії збігаються з осями Ox і Oy , коефіцієнти a_{ik} виражають через технічні сталі матеріалу:

$$a_{16} = 0, a_{26} = 0, a_{11} = 1/E_x, a_{22} = 1/E_y, a_{66} = 1/G, a_{12} = -\nu_{xy}/E_x,$$

де $E_x = E_1, E_y = E_2$ ($E_x = E_2, E_y = E_1$) – модулі пружності вздовж осей Ox і Oy для розтягу-стиску, $\nu_{xy} = \nu_{12}$ ($\nu_{xy} = \nu_{21} = \nu_{12} E_2/E_1$) – коефіцієнт Пуассона за стиску площини у напрямі осі y (x) під час розтягу вздовж осі x (y); $G = G_{12} = G_{xy} = G_{21} = G_{yx}$ – модуль зсуву.

Тоді характеристичне рівняння (3) стає бікватратним

$$\mu^4 + (E_1/G - 2\nu_{12})\mu^2 + E_1/E_2 = 0 \quad (4)$$

та має суто уявні корені

$$\mu_{1,2} = i\gamma_{1,2} = \frac{i}{2} \left[(E_1/G - 2\nu_{xy} + 2\sqrt{E_1/E_2})^{1/2} \pm (E_1/G - 2\nu_{xy} - 2\sqrt{E_1/E_2})^{1/2} \right].$$

Тут верхній знак (+) відповідає кореню μ_1 , а нижній (-) – кореню μ_2 .

У формулах (1) зробимо паралельне перенесення системи координат xOy , помістивши її початок у фокусі еліпса $x = d$ ($d = a - \rho/2$), та перейдемо до границі, коли велика піввісь еліпса $a \rightarrow \infty$, за таких умов: $\lim_{a \rightarrow \infty} (p\sqrt{\pi a}) = K_I$,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (b^2/a) = \rho = \text{const}, \quad (5)$$

де ρ – радіус кривини у вершині параболічного вирізу, K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у вершині відповідної напівнескінченної тріщини ($\rho = 0$). У результаті отримуємо функції напружень для анізотропної площини з напівнескінченим параболічним вирізом (рис. 1b) [3]

$$\Phi_1(z_1) = -\frac{K_I m_2}{\sqrt{\pi} L(z_1)}, \quad \Phi_2(z_2) = \frac{K_I m_1}{\sqrt{\pi} L(z_2)}, \quad L(z_j) = \sqrt{2z_j - \rho(1 + \mu_j^2)}. \quad (6)$$

Формули (6) дають розв'язок плоскої задачі теорії пружності для анізотропної площини з вільним від навантажень параболічним вирізом, коли на нескінченності задано асимптотику поля напружень, яку визначають потенціали

$$\Phi_1(z_1) = -K_I m_2 / \sqrt{2\pi z_1}, \quad \Phi_2(z_2) = K_I m_1 / \sqrt{2\pi z_2},$$

що описують симетричний розподіл сингулярних напружень в анізотропній площині з напівнескінченною тріщиною ($\rho = 0$) [1].

Використавши співвідношення [4]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} [\mu_1^2 \Phi_1(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2(z_2)], & \sigma_y &= 2 \operatorname{Re} [\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)], \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} [\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2)], \end{aligned} \quad (7)$$

отримаємо розподіл напружень у нескінченній анізотропній площині з напівнескінченим параболічним вирізом [3]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2K_I}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left[\mu_1 \mu_2 \left(\frac{m_2}{L(z_2)} - \frac{m_1}{L(z_1)} \right) \right], & \sigma_y &= \frac{2K_I}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{m_1}{L(z_2)} - \frac{m_2}{L(z_1)} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{2K_I}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left[\mu_1 m_2 \left(\frac{1}{L(z_2)} - \frac{1}{L(z_2)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Звідси знайдемо нормальне напруження у вершині вирізу

$$\sigma_y(\rho/2, 0) = (K_I / \sqrt{\pi \rho}) \operatorname{Im}[(\mu_1 + \mu_2) / (\mu_1 \mu_2)]. \quad (9)$$

Детальніше розглянемо ортотропну площину. Поклавши у формулах (8) $\mu_1 = i\gamma_1$, $\mu_2 = i\gamma_2$, отримаємо компоненти напружень в ортотропній площині з параболічним вирізом

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{K_I}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \operatorname{Re} \left[\frac{\gamma_2}{L_1(z_2)} - \frac{\gamma_1}{L_1(z_1)} \right], & \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \operatorname{Re} \left[\frac{\gamma_1}{L_1(z_2)} - \frac{\gamma_2}{L_1(z_1)} \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{L_1(z_2)} - \frac{1}{L_1(z_1)} \right], & L_1(z_j) &= \sqrt{2z_j - \rho(1 - \gamma_j^2)}. \end{aligned}$$

Записавши параметричне рівняння контуру параболічного вирізу в полярній системі координат (r, θ) (рис. 1b)

$$x = (\rho/2)[1 - \operatorname{tg}^2(\theta/2)], \quad y = \rho \operatorname{tg}(\theta/2), \quad -\pi < \theta < \pi,$$

отримаємо компоненти напружень в ортотропній площині на контурі вирізу

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{\pi \rho}} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 - \gamma_2)} \left(\frac{\gamma_1 \cos \alpha_1}{\beta_1} - \frac{\gamma_2 \cos \alpha_2}{\beta_2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{K_I}{\sqrt{\pi \rho}} \frac{1}{(\gamma_1 - \gamma_2)} \left(\frac{\gamma_2 \cos \alpha_1}{\beta_1} - \frac{\gamma_1 \cos \alpha_2}{\beta_2} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{\pi \rho}} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 - \gamma_2)} \left(\frac{\sin \alpha_1}{\beta_1} - \frac{\sin \alpha_2}{\beta_2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Тут

$$\alpha_j = \alpha_j(\theta) = \frac{1}{2} \operatorname{atan}2\left(2\gamma_j \operatorname{tg}(\theta/2), \gamma_j^2 - \operatorname{tg}^2(\theta/2)\right),$$

$$\beta_j = \beta_j(\theta) = \sqrt{\gamma_j^2 + \operatorname{tg}^2(\theta/2)}, \quad j=1,2,3, \quad (11)$$

де $\operatorname{atan}2(y, x) = \operatorname{Arg}(x + iy) \in (-\pi, \pi]$.

Нормальні напруження $\sigma_s(\theta)$ вздовж вільного контуру вирізу знайдемо за формулою

$$\sigma_s(\theta) = \sigma_x(\theta) + \sigma_y(\theta) = K_1 R_1(\theta) / \sqrt{2\pi\rho},$$

де

$$R_1(\theta) = \sqrt{2} \frac{\gamma_2 (\gamma_1^2 - 1) \cos \alpha_1}{\beta_1(\theta) (\gamma_1 - \gamma_2)} - \frac{\gamma_1 (\gamma_2^2 - 1) \cos \alpha_2}{\beta_2(\theta) (\gamma_1 - \gamma_2)}. \quad (12)$$

У вершині параболи ($\theta = 0$) напруження

$$\sigma_s|_{\theta=0} = (\gamma_1 + \gamma_2) K_1 / (\gamma_1 \gamma_2 \sqrt{\pi\rho}), \quad (13)$$

що впливає також з формули (9).

Перша похідна функції $\sigma_s(\theta)$ за кутом θ у вершині вирізу рівна нулю ($\sigma'_s(0) = 0$), а друга набуває значення

$$\left. \frac{d^2 \sigma_s(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = \frac{K_1}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) (\gamma_1^2 \gamma_2^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2)}{2\gamma_1^3 \gamma_2^3}.$$

Отже, напруження $\sigma_s(\theta)$ досягають максимуму у вершині параболічного вирізу, орієнтованого вздовж волокон ($E_x = E_1$), за умови

$$(\gamma_1 \gamma_2)^2 < \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \quad (E_1/E_2 < E_1/G - 2\nu). \quad (14)$$

Для вирізів, які орієнтовані впоперек волокон ($E_x = E_2$, $\gamma'_1 = 1/\gamma_2$, $\gamma'_2 = 1/\gamma_1$), умова існування максимуму (14)

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 > 1$$

виконується практично для всіх ортотропних матеріалів.

Розподіл відносного нормального напруження $R_1(\theta)$ (12) на контурі параболічного вирізу отримано для ізотропного (M_0) та трьох ортотропних матеріалів (M_1 – деревина (дуб) [8], M_2 – графіто-епоксид AS4/3502 [9], M_3 – скло-епоксид SP-250/Ер [9]) (див. таблицю), коли виріз орієнтований вздовж (рис. 2a) або впоперек (рис. 2b) волокон.

Механічні характеристики ортотропних матеріалів

Матеріал	E_2/E_1	G/E_1	ν	$E_x = E_1$		$E_x = E_2$	
				γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
M_0	1	0,375	0,33	1	1	1	1
M_1	0,082	0,081	0,45	3,2033	1,0902	0,9173	0,3122
M_2	0,074	0,041	0,31	4,8240	0,7642	1,3085	0,2076
M_3	0,284	0,110	0,29	2,8355	0,6623	1,5099	0,3527

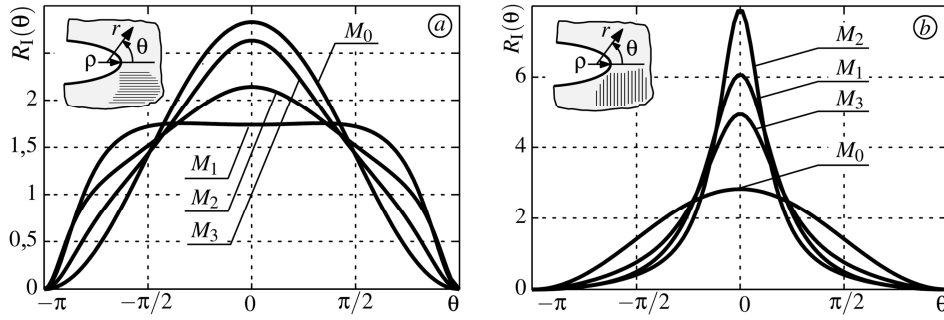


Рис. 2. Розподіл відносного нормального напруження $R_1(\theta)$ на контурі параболічного вирізу, орієнтованого вздовж волокон ($E_x = E_1$) (a) або перпендикулярно ($E_x = E_2$) (b) до них, для різних матеріалів.

Fig. 2. Distribution of the relative normal stress $R_1(\theta)$ at the boundary of a parabolic notch, directed along the fibers ($E_x = E_1$) (a) or perpendicular to them ($E_x = E_2$) (b), for different materials.

Коли виріз розташований перпендикулярно до волокон (рис. 2b), то максимальні напруження, які досягаються у вершині вирізу, значно більші, ніж за розташування вирізу вздовж волокон (рис. 2a) для всіх розглянутих ортотропних матеріалів.

Формули (9), (10) і (13) можна застосовувати для оцінювання максимальних напружень у вершинах вузьких вирізів в анізотропних та ортотропних пластинах за симетричного напруженого стану, коли відомий КІН для відповідних тріщин.

Відомі також інші розподіли напружень біля параболічного вирізу, зокрема, для напруження σ_y маємо [10]:

$$\sigma_y \approx \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)} \left[\left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) + \frac{\rho}{4r} \left(\frac{\mu_1(1 + \mu_2^2)}{(\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{3/2}} - \frac{\mu_2(1 + \mu_1^2)}{(\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{3/2}} \right) \right] \right\}, \quad (15)$$

де r, θ – полярні координати з полюсом у фокусі параболі. Тоді для нормального напруження у вершині вирізу ($r = \rho/2, \theta = 0$) отримали залежність [10]

$$\sigma_y(\rho/2, 0) \approx K_I / (2\sqrt{\pi\rho}) [3 - \operatorname{Re}(\mu_1\mu_2)]. \quad (16)$$

Зазначимо, що співвідношення (15) впливає із загальніших виразів (8), якщо розвинути їх у ряд Маклорена за параметром ρ та обмежитись лише двома членами ряду [3]. Формули (15) і (16) призводять до значних похибок під час оцінювання концентрації напружень біля вузьких вирізів, у чому легко переконатися, порівнявши їх з відомим точним розв'язком для еліптичного отвору в нескінченній анізотропній площині.

Ортотропну пластину, для якої модулі пружності $E_1 = E_2 = E$, модуль зсуву G і коефіцієнт Пуассона ν є тими самими у всіх напрямках і не залежать один від одного, називають псевдо-ізотропною [11]. Тоді розв'язки характеристичного рівняння (4) матимуть вигляд

$$\mu_{1,2} = i\gamma_{1,2}, \quad \gamma_1 = (1/2) \left[(E/G - 2\nu + 2)^{1/2} + (E/G - 2\nu - 2)^{1/2} \right], \quad \gamma_2 = 1/\gamma_1.$$

Для псевдо-ізотропної пластини отримано розподіл відносного нормального напруження $R_I(\theta)$ (12) на контурі параболічного вирізу за симетричного навантаження (рис. 3а). У цьому разі нормальні напруження максимальні у вершині вирізу, причому зі збільшенням параметра γ_1 цей максимум зростає. Найменшого значення він досягає в ізотропній пластині ($\gamma_1 = 1$).

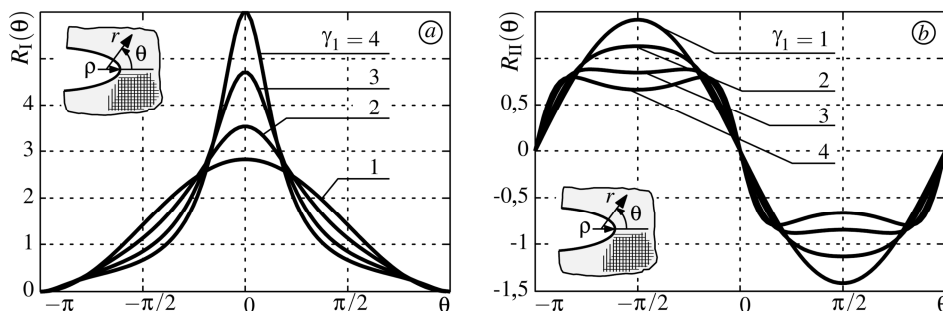


Рис. 3. Розподіл відносних нормальних напружень $R_I(\theta)$ (а) і $R_{II}(\theta)$ (б) на контурі параболічного вирізу в псевдо-ізотропній пластині для різних значень параметра γ_1 .

Fig. 3. Distribution of relative normal stresses $R_I(\theta)$ (a) and $R_{II}(\theta)$ (b) at the boundary of a parabolic notch in a pseudo-isotropic plate for different values of parameter γ_1 .

Антисиметричне навантаження. Розглянемо анізотропну площину з еліптичним отвором, край якого вільний від навантаження, а на нескінченності задані поперечні зсувні напруження $\tau_{xy}^\infty = q$ (див. рис. 1а). Відомий аналітичний розв'язок задачі [4]:

$$\begin{aligned}\Phi_1(z_1) &= \Phi_1^0(z_1) + \frac{q}{2} \frac{(a - \mu_2 ib)(a - \mu_1 ib)}{\mu_1 - \mu_2} \frac{1}{a^2 + \mu_1^2 b^2} \left(1 - \frac{z_1}{R(z_1)}\right), \\ \Phi_2(z_2) &= \Phi_2^0(z_2) - \frac{q}{2} \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \frac{(a - \mu_1 ib)(a - \mu_2 ib)}{(a^2 + \mu_2^2 b^2)} \left(1 - \frac{z_2}{R(z_2)}\right),\end{aligned}\quad (17)$$

де функції $\Phi_1^0(z_1)$ і $\Phi_2^0(z_2)$ – сталі величини, які описують однорідний напружений стан за відсутності отвору [4].

Як і за симетричного навантаження, у формулах (17) перенесемо початок нової системи координат у фокус еліпса ($x = d$) та перейдемо до границі, коли більша піввісь еліпса прямує до нескінченності ($a \rightarrow \infty$), за умови $\lim_{a \rightarrow \infty} (q\sqrt{\pi a}) = K_{II}$ та формули (5), де K_{II} – КІН у вершині відповідної напівнескінченної тріщини ($\rho = 0$). Використавши формули (6), отримаємо розв'язок плоскої задачі теорії пружності для анізотропної площини з вільним від навантажень параболічним вирізом

$$\Phi_1(z_1) = -K_{II} m_2 / [\sqrt{\pi} \mu_2 L(z_1)], \quad \Phi_2(z_2) = K_{II} m_1 / [\sqrt{\pi} \mu_1 L(z_2)], \quad (18)$$

коли на нескінченності задано асимптотичний розподіл напружень, який визначають потенціали

$$\Phi_1(z_1) = -K_{II} m_2 / (\mu_2 \sqrt{2\pi z_1}), \quad \Phi_2(z_2) = K_{II} m_1 / (\mu_1 \sqrt{2\pi z_2}). \quad (19)$$

Функції (19) описують антисиметричний розподіл сингулярних напружень в анізотропній площині з напівнескінченною тріщиною [1].

За формулами (7), (18) отримаємо розподіл напружень в анізотропній площині з напівнескінченим параболічним вирізом:

$$\sigma_x = \frac{2K_{II}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_2 m_2}{L(z_2)} - \frac{\mu_1 m_1}{L(z_1)} \right], \quad \sigma_y = \frac{2K_{II}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{m_1}{\mu_1} \left(\frac{1}{L(z_2)} - \frac{1}{L(z_1)} \right) \right],$$

$$\tau_{xy} = \frac{2K_{II}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{m_2}{L(z_2)} - \frac{m_1}{L(z_1)} \right].$$

Компоненти напружень на контурі параболічного вирізу в ортотропній площині можна подати у вигляді

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \left(\frac{\gamma_1^2 \sin \alpha_1}{\beta_1} - \frac{\gamma_2^2 \sin \alpha_2}{\beta_2} \right), \quad \sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \left(\frac{\cos \alpha_1}{\beta_1} - \frac{\cos \alpha_2}{\beta_2} \right),$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} \left(\frac{\gamma_1 \cos \alpha_1}{\beta_1} - \frac{\gamma_2 \cos \alpha_2}{\beta_2} \right),$$

де α_j, β_j знаходять з формул (12).

За нормальних напружень $\sigma_s(\theta)$ на контурі вільного вирізу для ортотропного матеріалу маємо

$$\sigma_s(\theta) = \sigma_x(\theta) + \sigma_y(\theta) = K_{II} R_{II}(\theta) \sqrt{2\pi\rho},$$

де

$$R_{II}(\theta) = \sqrt{2} \frac{(\gamma_1^2 - 1) \sin \alpha_1}{\beta_1(\theta)(\gamma_1 - \gamma_2)} - \frac{(\gamma_2^2 - 1) \sin \alpha_2}{\beta_2(\theta)(\gamma_1 - \gamma_2)}. \quad (20)$$

Для різних ортотропних матеріалів (див. таблицю) отримано залежності відносного нормального напруження $R_{II}(\theta)$ (20) від полярного кута θ (рис. 4). У вершині вирізу ($\theta = 0$) ці напруження за антисиметричного навантаження рівні нулю. Екстремальні значення функції (20) досягаються на деякій віддалі від вершини параболічного вирізу і є найбільшими для ізотропного (M_0) та найменшими для ортотропного матеріалу (M_2), для якого E_2/E_1 є найменше (рис. 4a). За $E_x = E_2$ $R_{II}(\theta)$ приймає найменше значення для ізотропного, а найбільше для ортотропного матеріалу (M_1) (рис. 4b).

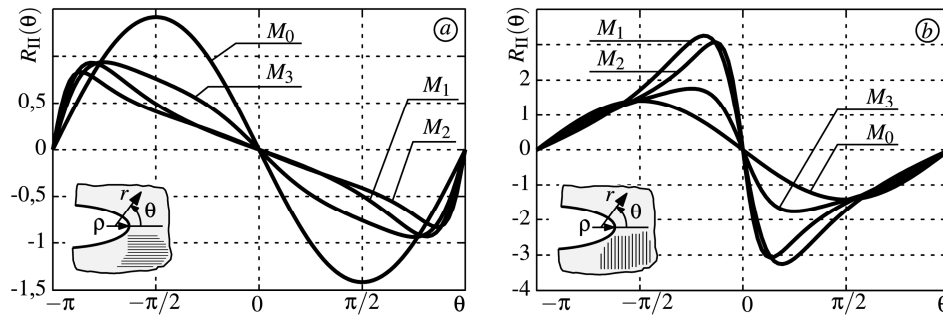


Рис. 4. Розподіл відносного нормального напруження $R_{II}(\theta)$ на контурі параболічного вирізу, орієнтованого вздовж волокон ($E_x = E_1$) (a) або перпендикулярно до них ($E_x = E_2$) (b), для різних матеріалів.

Fig. 4. Distribution of the relative normal stress $R_{II}(\theta)$ at the boundary of a parabolic notch, directed along the fibers ($E_x = E_1$) (a) or perpendicular to them ($E_x = E_2$) (b), for different materials.

Як і за симетричного навантаження, отримано також розподіл відносного напруження $R_{II}(\theta)$ (рис. 3b) на контурі параболічного вирізу в псевдо-ізотропній пластині ($\gamma_2 = 1/\gamma_1$) за антисиметричного навантаження. У вершині вирізу ($\theta = 0$) ці напруження рівні нулю. Їх екстремальні значення досягаються в точці $\theta = \pm\pi/2$ для $\gamma_1 < 2$, а для параметра $\gamma_1 > 2$ екстремуми спостерігають не лише в точці $\theta = \pm\pi/2$, але й ще у двох, симетрично розташованих на деякій віддалі від неї.

Антиплоска деформація. Розглянемо поздовжній зсув анізотропного тіла з еліптичним отвором. Край отвору вільний від навантаження, а на нескінченності задані зсувні напруження $\tau_{yz}^\infty = \tau$ (див. рис. 1a). Розв'язок антиплоскої задачі теорії пружності визначає комплексний потенціал [12]

$$\Phi_3(z_3) = \tau R(z_3), \quad (21)$$

де $R(z_3)$ знаходять зі співвідношень (2) ($j = 3$), $z_3 = x + \mu_3 y$, $\mu_3 = \left[a_{45} + i\sqrt{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \right] / a_{55}$.

Тут величини μ_3 і $\bar{\mu}_3$ – корені характеристичного рівняння

$$a_{55}\mu_3^2 - 2a_{45}\mu_3 + a_{44} = 0,$$

де a_{ik} ($i, k = 4, 5$) – пружні характеристики анізотропного матеріалу.

Скориставшись залежностями $\tau_{xz} = -\text{Re}[\mu_3\phi_3'(z_3)]$, $\tau_{yz} = \text{Re}[\phi_3'(z_3)]$ [12], знайдемо компоненти напружень у вигляді

$$\tau_{xz} = -\tau \text{Re}[z_3\mu_3/R(z_3)], \quad \tau_{yz} = \tau \text{Re}[z_3/R(z_3)]. \quad (22)$$

У формулах (22) перенесемо початок системи координат у фокус еліпса ($x = d$) та перейдемо до границі, коли більша піввісь еліпса прямує до нескінченності ($a \rightarrow \infty$), за умови $\lim_{a \rightarrow \infty} (\tau\sqrt{\pi a}) = K_{III}$ та співвідношення (5), де K_{III} – КІН у вершині відповідної напівнескінченної тріщини ($\rho = 0$). Таким чином, отримаємо розподіл напружень у нескінченній анізотропній площині з напівнескінченим параболічним вирізом за антиплоскої деформації

$$\tau_{xz} = -\left(K_{III}/\sqrt{\pi}\right) \text{Re}[\mu_3/L(z_3)], \quad \tau_{yz} = \left(K_{III}/\sqrt{\pi}\right) \text{Re}[1/L(z_3)], \quad (23)$$

де $L(z_3)$ визначають з формул (6).

Для ортотропного тіла, яке має у кожній точці три взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії і осі x, y є головними осями ортотропії, маємо: $a_{44} = 1/G_{23}$, $a_{45} = 0$, $a_{55} = 1/G_{13}$, де G_{13}, G_{23} – модулі зсуву, що характеризують зміну кутів між відповідними головними осями за антиплоскої деформації.

Розподіл напружень для ортотропної пластини матиме вигляд (23), де $\mu_3 = i\gamma_3$, $\gamma_3 = \sqrt{G_{13}/G_{23}}$.

На контурі параболічного вирізу ці компоненти напружень набувають значень

$$\tau_{xz} = -\left(K_{III}/\sqrt{\pi\rho}\right)(\gamma_3/\beta_3)\sin\alpha_3, \quad \tau_{yz} = \left(K_{III}/\sqrt{\pi\rho}\right)(1/\beta_3)\cos\alpha_3, \quad (24)$$

де величини α_3, β_3 знаходять з формул (11).

Зі співвідношення

$$\tau_{sz} = -\tau_{xz} \sin(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, x) = \operatorname{Re} \left[\phi'_3(t_3) \left(\frac{dy}{ds} - \mu_3 \frac{dx}{ds} \right) \right], t = x + iy \in \Gamma$$

визначимо дотичні напруження

$$\tau_{sz}(\theta) = K_{III} R_{III}(\theta) / \sqrt{2\pi\rho}, \quad R_{III}(\theta) = [\gamma_3 \sin(\theta/2) \sin \alpha_3 + \cos(\theta/2) \cos \alpha_3] / \beta_3 \quad (25)$$

вздовж контуру вирізу Γ зі зовнішньою нормаллю n , які у вершині параболічного вирізу ($\alpha_3(0) = 0$, $\beta_3(0) = \gamma_3$) рівні

$$\tau_{sz}(\theta)|_{\theta=0} = K_{III} / (\gamma_3 \sqrt{\pi\rho}). \quad (26)$$

Напруження (26) максимальні, коли параметр $\gamma_3 < \sqrt{2}$. Якщо $\gamma_3 > \sqrt{2}$, то у вершині маємо локальний мінімум напружень, а їх максимальні значення досягаються на певній віддалі від вершини, що впливає з виконання умови $\tau'_{sz}(0) = 0$ та співвідношення

$$\left. \frac{d^2 \tau_{sz}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = \frac{\gamma_3^2 - 2}{4\gamma_3^3} \frac{K_{III}}{\sqrt{\pi\rho}}.$$

Поклавши у залежностях (24), (25) параметр $\gamma_3 = 1$ ($\alpha_3(\theta) = \theta/2$, $\beta_3(\theta) = 1/\cos(\theta/2)$), отримаємо компоненти напружень

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{2\sqrt{\pi\rho}} \sin \theta, \quad \tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{\pi\rho}} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad \tau_{sz}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} \frac{K_{III}}{2\sqrt{\pi\rho}}$$

на контурі параболічного вирізу для ізотропної площини за антиплоскої деформації.

Зміну функції $R_{III}(\theta)$ (25) на контурі параболічного вирізу наведено на рис. 5.

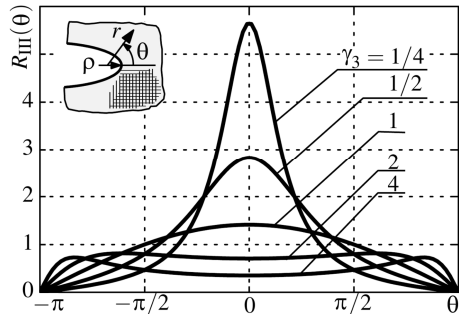


Рис. 5. Розподіл відносних дотичних напружень $R_{III}(\theta)$ на контурі параболічного вирізу для різних матеріалів.

Fig. 5. Distribution of the relative tangential stresses $R_{III}(\theta)$ at the boundary of a parabolic notch for different materials.

Видно, що зі зменшенням параметра γ_3 ($\gamma_3 < \sqrt{2}$) максимальні напруження $\tau_{sz}(\theta)$ у вершині вирізу ($\theta = 0$) стрімко зростають. Коли ж параметр $\gamma_3 > \sqrt{2}$, то напруження досягають максимуму на певній віддалі від вершини, а в самій вершині мають локальний мінімум, причому концентрація напружень у цьому разі значно менша, ніж для малих значень параметра γ_3 .

ВИСНОВКИ

На основі знайдених розподілів напружень для нескінченної анізотропної площини з параболічним вирізом досліджено напруження на контурі параболічного вирізу у нескінченній ортотропній площині за трьох видів навантаження (симетричного розтягу, поперечного та поздовжнього зсувів). Виявлено вплив анізотропії та орієнтації вирізу відносно головних осей ортотропії матеріалу на максимальні напруження на контурі параболічного вирізу.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрены задачи о распределении напряжений в бесконечной анизотропной плоскости с параболическим вырезом для трех основных типов деформаций, когда на бесконечности задана асимптотика поля напряжений, в которую входят коэффициенты интенсивности напряжений в вершине соответствующей полубесконечной трещины. Решения задач получено при помощи граничного перехода из известных аналитических решений для эллиптического отверстия в анизотропной плоскости при трех видах нагружений на бесконечности (симметрического растяжения, поперечного и продольного сдвигов). Эти результаты обобщают известные решения о распределении напряжений возле узких закругленных вырезов в изотропной плоскости и отображают влияние анизотропии материала на концентрацию напряжений.

SUMMARY. The problem of stress distribution in the infinite anisotropic plane with a parabolic notch for three main types of deformation, when the stress field asymptotics is set at the infinity, which includes the stress intensity factors at the tip of the corresponding semi-infinite crack, is considered. The problems solutions is received by using the boundary transition from known analytical solutions for an elliptic hole in the anisotropic plane for three types of load at infinity (symmetrical tension, transversal and longitudinal shear). These results generalize the known solutions on the stress distribution near the narrow rounded notches in the isotropic plane and show the influence of the material anisotropy on the stress concentration.

Робота виконана за проектом № 2011/03/B/ST8/06456, що фінансується Національним центром науки (Польща).

1. Sih G. C., Paris P. C., and Irwin G. R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // Int. J. Fract. Mech. – 1965. – 1, № 3. – P. 189–203.
2. Саврук М. П., Казберук А. Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. посіб. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Сполом, 2012. – 14. – 384 с.
3. Саврук М., Онишко Л., Біда Н. Розподіл напружень в анізотропній площині з параболическим вирізом // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: ФМІ НАН України, 2014. – С. 415–418.
4. Лехницький С. Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
5. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
6. Лехницький С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
7. Божидарнік В. В., Максимович О. В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
8. Kretschmann D. E. Mechanical properties of wood // Wood Handbook: Wood as an Engineering Material, USDA – Forest Service, Madison. – 2010. – P. 5.1–5.46.
9. Tan S. C. Stress Concentrations in Laminated Composites. – Lancaster: Technomic, 1994. – 482 p.
10. Chiang C. R. The stress field for a blunt crack in an anizotropic material // Int. J. Fract. – 1994. – 68. – P. 41–46.
11. Hyer M. W. and Riddick J. C. Internal pressure loading of segmented-stiffness composite cylinders // Compos. Struct. – 1999. – 45. – P. 311–320.
12. Ting T. C. T. Anisotropic Elasticity. Theory and Applications. – Oxford: Oxford University Press, 1996. – 588 p.

Одержано 10.07.2015