

## Размерный эффект в газе примесонов сверхтекучего раствора $^3\text{He}-^4\text{He}$

И. Н. Адаменко, Л. Н. Бортник, А. И. Черванев

*Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4*  
E-mail: alex@viola.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 10 ноября 1998 г.

Рассмотрено течение газа квазичастиц под воздействием градиентов термодинамических величин в объеме, заполненном порошком. Найдено точное решение кинетического уравнения, выраженное через матричные элементы оператора столкновений квазичастиц и парциальные сечения рассеяния квазичастиц на частицах порошка. Определено условие, описывающее стационарное неравновесное состояние газа квазичастиц, помещенного в объем, занятый пористым материалом. Полученные результаты справедливы для произвольных соотношений между частотами столкновений квазичастиц между собой и с частицами порошка. Изучен эффект Кнудсена в вырожденном квантовом газе. Исследован переход от кнудсеновского к гидродинамическому режиму течения газа квазичастиц. Исследовано стационарное неравновесное состояние газа примесонов сверхтекучего раствора  $^3\text{He}-^4\text{He}$  в ограниченной геометрии.

Розглянуто течію газу квазічастинок під дією градієнтів термодинамічних величин в об'ємі, заповненому порошком. Знайдено точне рішення кінетичного рівняння, виражене через матричні елементи оператора зіткнень квазічастинок та парціальні перерізи розсіювання квазічастинок на частинках порошку. Визначено умову, що описує стаціонарний нерівноважний стан газу квазічастинок, розташованому в об'ємі, заповненому пористим матеріалом. Отримані результати справедливі для довільних співвідношень між частотами зіткнень квазічастинок між собою та з частинками порошку. Вивчено ефект Кнудсена у виродженому квантовому газі. Досліджено перехід від кнудсенівського до гідродинамічного режиму течії газу квазічастинок. Досліджено стаціонарний нерівноважний стан газу примесонів надплинної розчину  $^3\text{He}-^4\text{He}$  в обмеженій геометрії.

PACS: 51.20.+d, 67.80.Mg

### Введение

Изучение процесса переноса газов в пористой среде под воздействием градиентов термодинамических величин можно отнести к классическим задачам кинетической теории [1,2]. Исследования различных режимов течения газа через тонкие трубки и пористый материал ведут отсчет с пионерских работ Грэма [3], Лошмидта [4,5] и Максвелла [6], увидевших свет еще в середине прошлого столетия. Уже тогда было обнаружено, что ограничение длины свободного пробега частиц, сталкивающихся в основном со стенками содержащей газ емкости, приводит к изменениям в привычной картине диффузии того же газа в неограниченной среде. Позднее Грэмом [7] были установлены основные закономерности свободно-молекулярного течения газа, получившего название эффузии. Теоретическое обоснование закона

эффузии Грэма нашло свое продолжение в работах Максвелла, впервые предложившего в 1860 г. модель «запыленного» газа [6]. Суть этой полу-эмпирической модели заключается в том, что пористая среда рассматривается как один из компонентов газовой смеси, состоящий из тяжелых неподвижных частиц. Сам Максвелл не получил из своей модели конкретных результатов, ограничившись ее описанием в работе, посвященной теории переноса молекулярных признаков в газах. Модель «запыленного» газа оставалась долгое время забытой и была вновь изобретена независимо Дерягиным и Бакановым [8,9] в 50-х годах нашего столетия. Она применялась этими авторами для изучения режима течения газа, близкого к свободномолекулярному. Изучение целого круга вопросов, связанных с процессом переноса частиц через разного рода мембраны, привело к дальней-

шему развитию полуэмпирических моделей, эксплуатирующих те же идеи [10–13].

Несмотря на значительный прогресс, достигнутый в этой области, ряд вопросов, поставленных экспериментом, не получил должного теоретического анализа. Так, во всех известных нам теоретических исследованиях [14, 15] фактически независимо рассматриваются только два предельных режима течения газа в ограниченной геометрии: свободномолекулярный (кнудсеновский) и гидродинамический. Такая идеализация не отражает адекватно экспериментальную ситуацию, реализующуюся, когда частоты столкновений частиц газа между собой и со стенками содержащей газ емкости сравнимы между собой.

В настоящей работе предложен подход, позволяющий восполнить этот пробел. Задача о стационарном течении газа квазичастиц через пористую среду под воздействием градиентов термодинамических величин решена нами точно, в рамках строгого кинетического подхода. Развитая в работе методика позволила избежать традиционного моделирования интеграла столкновений, что обеспечивает общность результатов.

Все полученные результаты справедливы для любого, квантового или классического, газа частиц и применены нами для исследования стационарного неравновесного состояния конкретной физической системы — сверхтекучего раствора  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ .

### Решение кинетического уравнения

Для описания стационарного неравновесного состояния газа примесей сверхтекучего раствора  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$  в отсутствие тепловых возмущений воспользуемся линеаризованным кинетическим уравнением

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} = (\hat{I} + \hat{L})g, \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость примесей;  $f_0$  — локально-равновесная функция распределения;  $f_0'g \equiv f - f_0$  — малая добавка к ней, пропорциональная вызвавшим неравновесность градиентам термодинамических величин;  $\hat{I}$  и  $\hat{L}$  — операторы столкновений примесь–примесь и примесь–порошок соответственно; штрих обозначает дифференцирование по аргументу.

Процедура решения уравнения (1) состоит в выделении собственного нуль-пространства оператора столкновений и последующем его обращении [16, 17]. Для этой цели рассмотрим гильбертово пространство суммируемых функций

импульса с введенным в нем скалярным произведением:

$$\langle h(\mathbf{p}) | g(\mathbf{p}) \rangle = \int f_0' h g^* d\Gamma, \quad (2)$$

где  $d\Gamma$  — элемент объема фазового пространства импульсов,  $\mathbf{p}$  — импульс примесей. Введем также оператор-проектор  $\hat{P}_c$  векторов гильбертового пространства на ядро оператора столкновений. Базис последнего составляют линейно независимые векторы — элементы собственного подпространства оператора  $\hat{I} + \hat{L}$ , соответствующие нулевому собственному значению.

Для однозначной обратимости оператора столкновений в уравнении (1) необходимо спроектировать все входящие в него векторы на подпространство ортогональное ядру. Для этой цели воспользуемся оператором проектирования  $\hat{P}_n$ , определенным равенством  $\hat{P}_n = \hat{E} - \hat{P}_c$ , где  $\hat{E}$  — тождественный оператор. В итоге получаем решение кинетического уравнения (1) в операторной форме:

$$g = \left( \hat{P}(\hat{I} + \hat{L})\hat{P}_n \right)^{-1} \hat{P}_n \left( \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} \right). \quad (3)$$

Стационарная ситуация в рассматриваемой системе реализуется при отсутствии тока газа примесей вдоль направления градиентов. В наших обозначениях такое условие представится в виде

$$\langle v_z | g \rangle = 0, \quad (4)$$

индекс  $z$  здесь и далее обозначает проекцию соответствующих векторов на направление градиентов.

Воспользовавшись выражением (3) и считая, что градиенты термодинамических величин направлены вдоль оси  $0z$ , представим условие (4) в виде

$$\begin{aligned} & 2 \frac{F_{1/2}}{F_{-1/2}} \frac{\nabla n}{n} \langle v_z | \left( \hat{P}_n(\hat{I} + \hat{L})\hat{P}_n \right)^{-1} \hat{P}_n | v_z \rangle + \\ & + \frac{\nabla T}{T} \left\{ \langle v_z | \left( \hat{P}_n(\hat{I} + \hat{L})\hat{P}_n \right)^{-1} \hat{P}_n \left| \frac{\varepsilon_3}{T} v_z \right\rangle - \right. \\ & \left. - 3 \frac{F_{1/2}}{F_{-1/2}} \langle v_z | \left( \hat{P}_n(\hat{I} + \hat{L})\hat{P}_n \right)^{-1} \hat{P}_n | v_z \rangle \right\} = 0, \quad (5) \end{aligned}$$

где  $n$  — число примесонов в единице объема;  $T$  — температура раствора;  $H_3 = \epsilon_0 + \epsilon_3$  — гамильтониан примесонов;  $\epsilon_3 = p^2/2m^*$ ;

$$F_v \left( \frac{\mu_3}{T} \right) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1 + \exp(x - \mu_3/T)} \quad (6)$$

— ферми-функция;  $\mu_3$  — химический потенциал примесона в растворе.

Равенство (5) представляет собой соотношение между градиентами концентрации и температуры, обеспечивающее стационарное состояние газа примесонов. Для его анализа необходимо вычислить соответствующие моменты оператора  $(\hat{P}_n(\hat{I} + \hat{L})\hat{P}_n)^{-1}$ , обратного оператору столкновений. Последние определяются характером взаимодействия. Исследование соотношения (5) существенно упрощается, если воспользоваться лоренцевским приближением для оператора  $\hat{L}$ , описывающего рассеяние «легких» примесонов на «тяжелых» частицах порошка. Как известно [1], частицы «легкого» газа, диффундирующего в «тяжелом», изменяют при столкновениях лишь направление своего движения, так что их энергия остается при этом неизменной. Соответствующий оператор столкновений примесь — порошок действует, таким образом, только на полярную и азимутальную составляющие произвольной функции импульса.

Для обращения полного оператора столкновений  $\hat{I} + \hat{L}$  целесообразно ввести ортонормальную систему функций-векторов гильбертового пространства

$$|\tilde{\Psi}_{nlm}\rangle = |\varphi_n^{(l,m)}(\tilde{p}) Y_{lm}(\theta, \vartheta)\rangle, \quad (7)$$

где  $Y_{lm}(\theta, \vartheta)$  — сферические [18], а  $\varphi_n^{(l,m)}(\tilde{p})$  — соответствующие радиальные функции, которые удобно представить в виде многочленов степеней безразмерного импульса  $\tilde{p} = p/\sqrt{2m^*T}$  в соответствии с определением

$$\varphi_n^{(l,m)}(\tilde{p}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{nj}^{(l,m)} \tilde{p}^j \tilde{p}^{\delta_l^1 \delta_m^0 \delta_n^0}. \quad (8)$$

Коэффициенты  $c_{nj}^{(l,m)}$  однозначно определяются из соотношения ортонормальности

$$\langle \tilde{\Psi}_{nlm} | \tilde{\Psi}_{ijk} \rangle = \delta_n^i \delta_l^j \delta_m^k. \quad (9)$$

Заметим, что функция  $|\tilde{\Psi}_{010}\rangle$ , определенная в соответствии с формулами (7)–(9), имеет вид

$$|\tilde{\Psi}_{010}\rangle = \frac{p_z}{\sqrt{\langle p_z | p_z \rangle}} \quad (10)$$

и представляет собой нормированное значение  $z$ -компоненты импульса, которая сохраняется при столкновениях примесь–примесь. Для того чтобы учесть законы сохранения числа примесонов и энергии при столкновениях примесонов между собой и с частицами порошка, удобно выбрать следующий ортонормированный базис во введенном выше гильбертовом пространстве:

$$\begin{aligned} |\Psi_{nlm}\rangle = & |\tilde{\Psi}_{nlm}\rangle [1 - \delta_m^0 \delta_l^0 (\delta_n^1 + \delta_n^2)] + \\ & + \delta_n^1 \delta_m^0 \delta_l^0 [\alpha |\tilde{\Psi}_{100}\rangle + \beta |\tilde{\Psi}_{200}\rangle] + \\ & + \delta_n^2 \delta_m^0 \delta_l^0 [\beta |\tilde{\Psi}_{200}\rangle - \alpha |\tilde{\Psi}_{100}\rangle], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\alpha = \frac{\langle \varphi_1^{(0,0)} | \tilde{p}^2 \rangle}{\left( 4\pi \langle \tilde{p}^2 | \tilde{p}^2 \rangle - \langle \varphi_1^{(0,0)} | \tilde{p}^2 \rangle^2 \right)^{1/2}};$$

$$\beta = \left( \frac{4\pi \langle \tilde{p}^2 | \tilde{p}^2 \rangle - \langle \varphi_0^{(0,0)} | \tilde{p}^2 \rangle^2 - \langle \varphi_1^{(0,0)} | \tilde{p}^2 \rangle^2}{4\pi \langle \tilde{p}^2 | \tilde{p}^2 \rangle - \langle \varphi_1^{(0,0)} | \tilde{p}^2 \rangle^2} \right)^{1/2},$$

причем

$$|\varphi_0^{(0,0)}\rangle = \sqrt{4\pi} \frac{|1\rangle}{\sqrt{\langle 1 | 1 \rangle}};$$

$$|\varphi_1^{(0,0)}\rangle = \sqrt{4\pi} \frac{|\tilde{p}\rangle \langle 1 | 1 \rangle - |1\rangle \langle 1 | \tilde{p}\rangle}{\sqrt{\langle 1 | 1 \rangle^2 \langle \tilde{p} | \tilde{p} \rangle - \langle 1 | \tilde{p} \rangle^2 \langle 1 | 1 \rangle}}$$

— радиальные функции, построенные в соответствии с определением (8) и условием нормировки (9). Упомянутые выше законы сохранения числа частиц, энергии и  $z$ -компоненты импульса примесонов при столкновениях выражаются равенствами

$$(\hat{I} + \hat{L}) |\Psi_{000}\rangle = (\hat{I} + \hat{L}) |\Psi_{100}\rangle = \hat{I} |\Psi_{010}\rangle = 0. \quad (12)$$

Кроме того, линейное подпространство функций

$\{|\Psi_{n00}\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ , соответствующее нулевой гармонике

$Y_{00}(\theta, \vartheta)$ , образует базис ядра лоренцева оператора столкновений  $\hat{L}$ , так что

$$\hat{L} |\Psi_{n00}\rangle = 0; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Пользуясь введенным ортонормированным базисом (11), можно представить результат действия оператора столкновений на неравновесную добавку  $|g\rangle$  в виде

$$\begin{aligned}
& (f_0')^{-1}(\hat{I} + \hat{L})|g\rangle = \\
& = -vN \sum_{nlm} \sigma_t^{(l,m)}(\theta, \vartheta) |\phi_n^{(l,m)}(\tilde{p})\rangle \langle \psi_{nlm} | g \rangle + \\
& + \sum_{nlm} \sum_{ijk} |\psi_{nlm}\rangle \langle \psi_{nlm} | \hat{I} |\psi_{ijk}\rangle \langle \psi_{ijk} | g \rangle, \quad (14)
\end{aligned}$$

где  $N$  — число частиц порошка в единице объема;

$$\begin{aligned}
\sigma_t^{(l,m)} = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta' \int_0^{\pi} [Y_{lm}(\cos \theta, \vartheta) - Y_{lm}(\cos \alpha \cos \theta + \\
+ \sin \alpha \sin \theta \cos(\vartheta - \vartheta'), \vartheta')] W(p, \alpha) \sin \alpha d\alpha \quad (15)
\end{aligned}$$

— парциальное транспортное сечение рассеяния лоренцевого оператора столкновений  $\hat{L}$ ;  $W(p, \alpha) \sin \alpha d\alpha$  — дифференциальное сечение рассеяния.

Поскольку в рассматриваемой системе существует единственное выделенное градиентами направление, неравновесная добавка  $|g\rangle$  не может зависеть от полярного угла. В этом случае формулы (14), (15) упрощаются и кинетическое уравнение (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
\nabla_3 |v_z\rangle = -\tilde{p} \sum_{nl} v_{\text{Kn}}^l |\psi_{nl0}\rangle \langle \psi_{nl0} | g \rangle + \\
+ \sum_{nl} \sum_{jk} |\psi_{nl0}\rangle \langle \psi_{nl0} | \hat{I} |\psi_{jk0}\rangle \langle \psi_{jk0} | g \rangle, \quad (16)
\end{aligned}$$

где

$$v_{\text{Kn}}^l = N \left( \frac{2T}{m^*} \right)^{1/2} 2\pi \int_0^{\pi} [1 - P_l(\cos \alpha)] W(p, \alpha) \sin \alpha d\alpha, \quad (17)$$

$\nabla_3 = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{H_3 - \mu_3}{T} \right)$ ; а  $P_l(\cos \alpha)$  — полином Лежандра порядка  $l$ .

В случае, если частицы порошка можно рассматривать как твердые сферы радиусом  $a$ , парциальные частоты столкновений примесь — порошок (17) представляются в виде

$$v_{\text{Kn}}^l = N \frac{\pi a^2}{2} \left( \frac{2T}{m^*} \right)^{1/2} \int_0^{\pi} [1 - P_l(\cos \alpha)] \sin \alpha d\alpha. \quad (18)$$

Общее решение уравнения (16) может быть представлено в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения (16).

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (16), образует подпространство, которое представляет собой линейную оболочку векторов, составляющих ядро оператора столкновений  $I + \hat{L}$ :

$$|g^0\rangle = C_1 |\psi_{000}\rangle + C_2 |\psi_{000}\rangle, \quad (19)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

Для того чтобы найти решение неоднородного уравнения (16), последнее удобно представить в виде

$$\begin{aligned}
-i \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} v \nabla_3 |Y_{10}\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} |Y_{l0}\rangle \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{p}^j \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \{ \langle \phi_{jl} | \hat{I} |\psi_{mk0}\rangle [1 - \delta_k^0(\delta_m^0 + \delta_m^1) - \delta_k^1 \delta_m^0] - \\
- \theta(m-j+1)(1 - \delta_j^0)(1 - \delta_l^0) \delta_l^k v_{\text{Kn}}^k [(1 - \delta_m^0 \delta_k^1 \delta_j^1) c_{mj-1}^{(k,0)} + \delta_m^0 \delta_k^1 \delta_j^2 c_{mj-2}^{(k,0)}] \} \langle \psi_{mk0} | g \rangle, \quad (20)
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases} \\
|\phi_{jl}\rangle = \sum_{n=j}^{\infty} c_{nj}^{(1,0)} |\psi_{nl0}\rangle [1 - \delta_l^0(\delta_n^0 + \delta_n^1 + \delta_n^2) - \delta_l^1 \delta_n^0] + \\
+ \delta_l^0 \delta_n^2 [\delta_j^0 (\beta c_{10}^{(0,0)} - \alpha c_{20}^{(0,0)}) + \delta_j^1 (\beta c_{11}^{(0,0)} - \alpha c_{21}^{(0,0)}) - \delta_j^2 \alpha c_{22}^{(0,0)}] |\psi_{200}\rangle. \quad (21)
\end{aligned}$$

Отметим, что при преобразовании уравнения (16) к виду (20) учтены свойства ядра оператора  $\hat{I}$ , которые выражаются равенствами, аналогичными (12):

$$\hat{I} |\Psi_{000}\rangle = \hat{I} |\Psi_{100}\rangle = \hat{I} |\Psi_{010}\rangle = 0. \quad (22)$$

Поскольку система сферических функций  $\{|Y_{l0}\rangle\}_{l=0}^{\infty}$  является ортонормированной, а множество векторов-одночленов  $\{|\tilde{p}^n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$  — линейно независимым, равенство (20) достигается лишь при

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \langle \phi_{jl} | \hat{I} |\Psi_{mk0}\rangle [1 - \delta_k^0(\delta_m^0 + \delta_m^1) - \delta_k^1 \delta_m^0] - \theta(m-j+1)(1 - \delta_j^0)(1 - \delta_l^0) \delta_l^k v_{\text{Kn}}^k \times \right. \\ \left. \times [(1 - \delta_m^0 \delta_k^1 \delta_j^1) c_{mj-1}^{(k,0)} + \delta_m^0 \delta_k^1 \delta_j^2 c_{mj-2}^{(k,0)}] \right\} \langle \Psi_{mk0} | g \rangle = i \delta_l^1 \left( \frac{4\pi}{3} \frac{2T}{m^*} \right)^{1/2} \left[ \delta_j^1 \nabla \left( \frac{\mu_3}{T} \right) + \delta_j^3 \frac{\nabla T}{T} \right]. \quad (23)$$

Отметим, что система (23) удовлетворяется при любых значениях моментов  $\langle \Psi_{000} | g \rangle$ ,  $\langle \Psi_{100} | g \rangle$ , что является естественным следствием соотношений (12), выражающих законы сохранения числа частиц и энергии при столкновениях примесонов друг с другом и с частицами порошка. Величины  $\langle \Psi_{000} | g \rangle$ ,  $\langle \Psi_{100} | g \rangle$  представляют собой коэффициенты разложения общего решения кинетического уравнения по базису ядра оператора столкновений  $\{|\Psi_{000}\rangle, |\Psi_{100}\rangle\}$ .

Таким образом, система (23) имеет общее решение, которое может быть представлено в виде прямой суммы подпространства — линейной оболочки базиса ядра (19) и вектора-решения системы (23), из которой исключены моменты  $\langle \Psi_{000} | g \rangle$  и  $\langle \Psi_{100} | g \rangle$ . Такое решение единственно в силу теоремы Кронекера—Капелли. Действительно, вследствие тех же законов сохранения набор функций  $\{|\phi_{j0}\rangle\}_{j=0}^{\infty}$  (21) является линейно

совпадении всех коэффициентов при произведениях вида  $\tilde{p}^j |Y_{l0}\rangle$  в его левой и правой частях. Такое условие может быть представлено в виде неоднородной системы линейных уравнений относительно моментов  $\{\langle \Psi_{nl0} | g \rangle\}_{l,n=0}^{\infty}$ :

зависимым, что приводит к зависимости уравнений системы (23), соответствующих  $l=0$ . Как легко показать с помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы системы, любые два уравнения из указанной совокупности являются следствием остальных. Таким образом, в системе (23) исключаются не только два неизвестных ( $\langle \Psi_{000} | g \rangle$  и  $\langle \Psi_{100} | g \rangle$ ), но и два уравнения: ранги матрицы коэффициентов и расширенной матрицы системы (23) совпадают, что и является условием ее совместности.

После исключения указанных уравнений систему (23) с невырожденной матрицей коэффициентов удобнее всего решать методом Крамера. Главный определитель системы представим в виде

$$\det A = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \det A_{NL}, \quad (24)$$

где  $A_{NL} \equiv (a_{nl})_{NL}$  — квадратная матрица порядка  $L \times (N-2)$ , общий элемент которой дается выражением

$$a_{nf} = \langle \phi_{jl} | \hat{I} |\Psi_{mk0}\rangle [1 - \delta_k^0(\delta_m^0 + \delta_m^1) - \delta_k^1 \delta_m^0] - \\ - \theta(m-j+1)(1 - \delta_j^0)(1 - \delta_l^0) \delta_l^k v_{\text{Kn}}^k [(1 - \delta_m^0 \delta_k^1 \delta_j^1) c_{mj-1}^{(k,0)} + \delta_m^0 \delta_k^1 \delta_j^2 c_{mj-2}^{(k,0)}], \quad (25)$$

причем индексы  $n, f$  и  $m, l, j, k$  связаны между собой соотношениями

$$n = j - 1 + (N+1)l; \quad l = \left[ \frac{n+2}{N+1} \right], \quad j = n + 1 - (N+1) \left[ \frac{n+2}{N+1} \right]; \quad 0 \leq l \leq L; \quad 2\delta_l^0 \leq j \leq N; \\ f = m - 1 + (N+1)k; \quad k = \left[ \frac{f+2}{N+1} \right], \quad m = f + 1 - (N+1) \left[ \frac{f+2}{N+1} \right]; \quad 0 \leq k \leq L; \quad 2\delta_k^0 \leq m \leq N,$$

а квадратные скобки обозначают целую часть числа.

С помощью определителя (24) общее решение системы (23) может быть представлено в виде

$$|g^H\rangle = C_1|\psi_{000}\rangle + C_2|\psi_{100}\rangle + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |\psi_{nl0}\rangle \Delta^{(n,l)} [1 - \delta_l^0 (\delta_n^0 + \delta_n^1)]}{\det A}, \quad (26)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные;

$$\Delta^{(n,l)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \det A_{NL}^{(n,l)} \quad (27)$$

— определители матриц, которые получаются из матрицы  $A_{NL}$  заменой ее  $n-1 + (N+1)l$  столбца столбцом свободных членов  $(d_{nl})_{NL}$  с общим элементом

$$(d_{nl})_{NL} = i \left( \frac{4\pi}{3} \frac{2T}{m^*} \right)^{1/2} \left[ \delta_n^{N+1} \nabla \left( \frac{\mu_3}{T} \right) + \delta_n^{N+3} \frac{\nabla T}{T} \right]. \quad (28)$$

Результат (26) удобно представить в более компактной форме

$$|g^H\rangle = |\psi_{000}\rangle \langle \psi_{000} | g^H \rangle + |\psi_{100}\rangle \langle \psi_{100} | g^H \rangle - \left\langle \frac{\det B}{\det A} \right\rangle, \quad (29)$$

где  $\det B$  представляет собой определитель бесконечномерной матрицы, элементы первой строки которой, начиная со второго, совпадают с функциями  $|\psi_{nl0}\rangle$ , входящими в третье слагаемое суммы (26) и упорядоченными по возрастанию индекса  $n$  при фиксированном значении индекса  $l$ , когда последний изменяется от нуля до бесконечности; элементы первого столбца определяются согласно правилу

$$b_{nl} = i \left( \frac{4\pi}{3} \frac{2T}{m^*} \right)^{1/2} \left[ \delta_n^{N+2} \nabla \left( \frac{\mu_3}{T} \right) + \delta_n^{N+4} \frac{\nabla T}{T} \right], \quad (30)$$

а остальные элементы, остающиеся после удаления из матрицы  $B$  первой строки и первого столбца, образуют матрицу, тождественную матрице  $A$  (т.е. матрице  $A_{NL}$  при  $N \rightarrow \infty$  и  $L \rightarrow \infty$ ).

В предельных случаях, когда всю кинетику газа фактически определяет только один тип столкновений, формула (29) требует уточнения. Так, если вкладом столкновений примесь — порошок можно пренебречь (гидродинамический предел), то  $v_{\text{Кн}}^l = 0$  и решение кинетического уравнения (16) определено с точностью до линейной

комбинации инвариантов столкновений оператора  $I$ , включая  $|\psi_{010}\rangle$ . По этой причине коэффициент при  $|\psi_{010}\rangle$  в разложении (26) остается неопределенным, что соответствует вырождению  $N$ -го столбца матрицы  $A_{NL}$  (25). Формально в решении (26) изменяется при этом лишь алгебраическое дополнение к элементу первой строки  $|\psi_{010}\rangle$ , которое следует теперь записать в общем виде:  $\langle \psi_{010} | g \rangle$ .

В обратном предельном случае, когда отсутствуют столкновения примесь — примесь (лоренцев предел), в матрице  $A_{NL}$  вырождается  $N$ -я строка — условие равенства членов уравнения (23), соответствующих гармонике  $|Y_{10}\rangle$  и не содержащих  $\vec{p}$ , обращается в тождество. Решение системы (23) методом Крамера приводит в рассматриваемом пределе к тривиальному результату:

$$|g\rangle = -i \left( \frac{4\pi}{3} \frac{2T}{m^*} \right)^{1/2} \frac{1}{v_{\text{Кн}}^1} \nabla_3 |Y_{10}\rangle. \quad (31)$$

Отметим также, что результат (29) в сочетании с общей формулой (5) позволяет получить явные выражения для средних от оператора  $(\hat{P}_n(\hat{I} + \hat{L})\hat{P}_n)^{-1}$ , обратного оператору столкновений. В частности, для моментов, входящих в формулу (5):

$$\langle v_z | (\hat{P}_n(\hat{I} + \hat{L})\hat{P}_n)^{-1} \hat{P}_n | v_z \rangle = -i \left( \frac{4\pi}{3} \frac{2T}{m^*} \right)^{1/2} \frac{\Delta_1^{(0,1)}}{\det A}, \quad (32)$$

$$\langle v_z | (\hat{P}_n(\hat{I} + \hat{L})\hat{P}_n)^{-1} \hat{P}_n \frac{\epsilon_3}{T} | v_z \rangle = -i \left( \frac{4\pi}{3} \frac{2T}{m^*} \right)^{1/2} \frac{\Delta_2^{(0,1)}}{\det A}, \quad (33)$$

где

$$\Delta_1^{(0,1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} (A_{2N}^{(0,1)})_{NL}, \quad (34)$$

$$\Delta_2^{(0,1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} (A_{4N}^{(0,1)})_{NL} \quad (35)$$

— алгебраические дополнения к ненулевым элементам столбца свободных членов определителя  $\Delta^{(0,1)}$ .

Суммируя общее решение однородного уравнения (19) и решение неоднородного уравнения (29), получаем общее решение исходного кинетического уравнения (1), выраженное через матричные элементы оператора столкновений примесь — примесь и лоренцевы парциальные частоты столкновений  $v_{\text{Кн}}^l$  (18):

$$|g\rangle = C_1|\Psi_{000}\rangle + C_2|\Psi_{100}\rangle - \left| \frac{\det B}{\det A} \right\rangle, \quad (36)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные.

Полученное решение кинетической задачи является точным и в сочетании с условием (4) позволяет проанализировать соотношение между градиентами (5), обеспечивающее стационарное состояние газа квазичастиц с произвольным характером взаимодействия.

Сравнивая формулы (10), (11), (26), (29), (36), получаем выражение для средней скорости примесонов в направлении  $\nabla T$ :

$$V \equiv \frac{\langle v_z | g \rangle}{n} = \frac{\sqrt{\langle v_z | v_z \rangle}}{n} \frac{\Delta^{(0,1)}}{\det A}. \quad (37)$$

Как видно, средняя скорость (37) совпадает, с точностью до нигде не обращающегося в нуль множителя, с алгебраическим дополнением к элементу  $|\Psi_{010}\rangle$  определителя  $\det B$  (ср. с (26)). Следовательно, условие стационарности (4) может быть выражено равенством

$$\Delta^{(0,1)} = 0. \quad (38)$$

Полученное соотношение может быть проанализировано с любой степенью точности путем расчета соответствующих матричных элементов оператора столкновений.

### Модельное представление оператора столкновений примесь—примесь и дальнейший анализ стационарного неравновесного состояния газа примесонов

Точное решение кинетического уравнения (36) позволяет строить различные приближения, учитывая те или иные свойства оператора столкновений, характерные для данной физической системы. В частности, для анализа условия стационарности (4) можно ограничиться простейшим модельным представлением оператора столкновений примесь—примесь, считая, что его спектр состоит всего из двух собственных значений:  $\lambda_1 = 0$  с принадлежащим ему ядром истинного оператора  $I$  и  $\lambda_2 = -v$  с принадлежащим ему ортогональным ядру подпространством собственных векторов. Такой подход позволяет существенно упростить выражение для матричных элементов оператора столкновений примесь—примесь, воздействие которого на любой вектор, не принадлежащий ядру, сводится теперь к умножению на частоту столкновений  $-v$ :

$$\langle \Psi_{mk0} | \hat{I} | \Psi_{nl0} \rangle = -v \delta_n^m \delta_l^k (1 - \delta_n^0 (\delta_l^0 + \delta_l^1) - \delta_l^0 \delta_n^1). \quad (39)$$

Матрица коэффициентов системы (23) также существенно упрощается после подстановки выражения (39) в определение матричного элемента (25):

$$a_{nf} = -\delta_k^l \left\{ v \left( \theta(m-j) c_{mj}^{(l,0)} (1 - \delta_k^1 \delta_m^0 - \delta_k^0 \delta_m^2) + \delta_k^0 \delta_m^2 [\delta_j^0 (\beta c_{10}^{(0,0)} - \alpha c_{20}^{(0,0)}) + \delta_j^1 (\beta c_{11}^{(0,0)} - \alpha c_{21}^{(0,0)}) - \alpha \delta_j^2 c_{22}^{(0,0)}] \right) + v_{\text{Kn}}^k \theta(m-j+1) (1 - \delta_l^0) (1 - \delta_j^0) [(1 - \delta_m^0 \delta_k^1 \delta_j^1) c_{mj-1}^{(k,0)} + \delta_m^0 \delta_k^1 \delta_j^2 c_{mj-2}^{(k,0)}] \right\}, \quad (40)$$

где принята та же система обозначений, что и в формуле (25). Как видно из формулы (40), матрица  $A_{NL}$  имеет теперь блочно-диагональный вид. Ее ненулевые элементы образуют квадратные подматрицы-блоки размерностями  $N-1$  для  $l=0$  и  $N+1$  для  $l \neq 0$ , расположенные по главной диагонали  $A_{NL}$ . Это соответствует расщеплению системы (23) на независимые подсистемы, каждая из которых соответствует своему значению индекса  $l$ . Все подсистемы, за исключением соответствующей значению  $l=1$ , представляют собой однородные системы линейных уравнений с невырожденной матрицей коэффициентов, а значит, имеют только тривиальное решение:

$$\langle \Psi_{mk0} | g \rangle = 0 \quad \text{для } k \neq 1. \quad (41)$$

Нетривиальное решение имеет лишь неоднородная система уравнений с невырожденной матрицей коэффициентов, соответствующая  $l=1$ . С помощью элементарных преобразований эта последняя может быть упрощена и представлена в виде

$$\sum_{f=1}^{\infty} a_{nf}^{(0)} \langle \Psi_{f10} | g \rangle = b_n^{(0)}, \quad (42)$$

где

$$a_{nf}^{(0)} = \delta_f^1 (-1)^{n+1} c_{00} \gamma^{2-n} + \theta(n-f) c_{f-1, n-1}, \quad (43)$$

$$d_{n1}^{(0)} = \frac{(-1)^{n+1} i}{v} \left( \frac{4\pi}{3} \frac{2T}{m^*} \right)^{1/2} \gamma^{2-n} \times \\ \times \left[ \theta(n-2) \nabla \left( \frac{\mu_3}{T} \right) + \gamma^2 \theta(n-4) \frac{\nabla T}{T} \right], \quad (44)$$

$\gamma = v/v_{Kn}$ , а индексы  $l = 1$  и  $m = 0$  у коэффициентов  $c_{ij}^{(l,m)}$  и частоты  $v_{Kn}^l$  для удобства опущены.

Общее решение системы (42) может быть представлено в форме, аналогичной третьему слагаемому в формуле (36):

$$|g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_{n10}\rangle \langle \psi_{n10} | g \rangle = - \left\langle \frac{\det B^{(0)}}{\det A^{(0)}} \right\rangle, \quad (45)$$

где  $\det A^{(0)}$  — определитель матрицы (43), а  $\det B^{(0)}$  — определитель матрицы  $B^{(0)}$ , элементы первой строки которой, начиная со второго, представляют собой функции  $|\psi_{n10}\rangle$ , упорядоченные по возрастанию индекса  $n$ ; элементы первого столбца определяются равенством

$$b_{n1}^{(0)} = (1 - \delta_n^1) d_{(n-1)1}^{(0)}, \quad (46)$$

а остальные элементы, остающиеся после удаления из матрицы  $B^{(0)}$  первой строки и первого столбца, образуют матрицу, тождественную  $A^{(0)}$ . С помощью элементарных преобразований строк определитель  $\det B^{(0)}$  может быть приведен к тождественному определителю, первая строка которого имеет всего два ненулевых элемента:

$$b_{1n}^{(0)} = -\delta_n^1 \frac{\nabla_3 |v_z\rangle}{v + v_{Kn} \tilde{p}} + \delta_n^2 \frac{|\psi_{010}\rangle}{1 + \gamma^{-1} \tilde{p}}, \quad (47)$$

а элементы остальных строк остаются без изменений.

Обращая внимание на то, что алгебраическим дополнением к первому элементу строки (47) является определитель  $\det A^{(0)}$ , а ко второму — величина  $\langle \psi_{010} | g \rangle$  (ср. с (45)), и разлагая  $\det B^{(0)}$  по первой строке, из формулы (45) получаем

$$|g\rangle = - \frac{\nabla_3 |v_z\rangle}{v + v_{Kn} \tilde{p}} + \frac{|\psi_{010}\rangle \langle \psi_{010} | g \rangle}{1 + \gamma^{-1} \tilde{p}}. \quad (48)$$

Отметим, что последовательно полученный из общего решения (36) результат (48) соответствует приближению Бхатнагара–Гросса–Крукса (БГК)[14] с искусственно введенным интегралом столкновений

$$\hat{I}_{BGK} = - (v + v_{Kn} \tilde{p}) + v \frac{|p_z\rangle \langle p_z|}{\langle p_z | p_z \rangle}. \quad (49)$$

Таким образом, приближение (49) можно рассматривать как следствие описанного выше допущения о вырождении спектра оператора столкновений — примесь — примесь до двух собственных значений: 0 и  $-v$ .

В соответствии со структурой общего решения кинетического уравнения (36), к решению (48) следует добавить векторы линейной оболочки базиса ядра оператора столкновений  $I + L$  (19):

$$|g\rangle = |\psi_{000}\rangle \langle \psi_{000} | g \rangle + |\psi_{100}\rangle \langle \psi_{100} | g \rangle + \\ + \frac{|\psi_{010}\rangle \langle \psi_{010} | g \rangle}{1 + \gamma^{-1} \tilde{p}} - \frac{\nabla_3 |v_z\rangle}{v + v_{Kn} \tilde{p}}. \quad (50)$$

Умножая последнее равенство скалярно на вектор  $\langle \psi_{010} |$  и выражая из полученного уравнения  $\langle \psi_{010} | g \rangle$ , получаем

$$\langle \psi_{010} | g \rangle = - \frac{1}{v_{Kn}} \frac{\langle \psi_{010} | \frac{\nabla_3}{\gamma + \tilde{p}} | v_z \rangle}{\langle \psi_{010} | \frac{\tilde{p}}{\gamma + \tilde{p}} | \psi_{010} \rangle}. \quad (51)$$

Выражение (51) является также алгебраическим дополнением ко второму элементу первой строки определителя  $\det B^{(0)}$  и может быть получено независимо путем расчета соответствующего определителя. Оно позволяет найти явное выражение для неравновесной добавки  $|g\rangle$  в рассматриваемом приближении:

$$|g\rangle = C_1 |\psi_{000}\rangle + C_2 |\psi_{100}\rangle - \\ - \frac{|v_z\rangle}{v + v_{Kn} \tilde{p}} \left( \nabla_3 + \frac{\langle p_z | \frac{\nabla_3}{1 + \gamma^{-1} \tilde{p}} | p_z \rangle}{\langle p_z | \frac{\gamma^{-1} \tilde{p}}{1 + \gamma^{-1} \tilde{p}} | p_z \rangle} \right), \quad (52)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные величины, не зависящие от импульса.

Выражение (37) для средней скорости газа примесонов также существенно упрощается:

$$V = - \frac{\langle v_z | v_z \rangle}{n v_{Kn}} \frac{\langle \psi_{010} | \frac{\nabla_3}{\gamma + \tilde{p}} | \psi_{010} \rangle}{\langle \psi_{010} | \frac{\tilde{p}}{\gamma + \tilde{p}} | \psi_{010} \rangle}. \quad (53)$$



Решение (52) позволяет анализировать различные кинетические свойства газа примесей сверхтекучего раствора  $^3\text{He}$ – $^4\text{He}$  в рассматриваемой физической ситуации, в частности исследовать условие стационарности (4), (38). Описанным выше способом последнее сводится к соотношению

$$\int \frac{\partial f_0}{\partial z} \frac{v_z p_z}{v + v_{\text{Kn}} \tilde{p}} d\Gamma = 0. \quad (54)$$

В гидродинамическом пределе, когда вкладом столкновений примесь–порошок можно пренебречь, соотношение (54) превращается в обычное газокинетическое условие механического равновесия в системе: давление газа примесей во всем объеме раствора должно быть постоянным. В противоположном, кнудсеновском пределе, когда несуществен вклад взаимных столкновений примесей и вся кинетика определяется столкновениями примесь–порошок, в классической области температур соотношение (54) имеет вид известного условия Кнудсена:

$$n \sqrt{T} = \text{const}. \quad (55)$$

В классической области температур  $T \gg T_F$  выражение (53) для средней скорости примесей приобретает вид

$$V = - \frac{T}{v_{\text{Kn}} m^*} \left[ h(\gamma) \frac{\nabla n}{n} + w(\gamma) \frac{\nabla T}{T} \right], \quad (56)$$

где

$$h(\gamma) = \frac{\int_0^\infty \frac{y^{3/2} e^{-y}}{\gamma + \sqrt{y}} dy}{\int_0^\infty \frac{y^2 e^{-y}}{\gamma + \sqrt{y}} dy}, \quad (57)$$

$$w(\gamma) = \frac{\int_0^\infty \frac{y^{5/2} e^{-y}}{\gamma + \sqrt{y}} dy}{\int_0^\infty \frac{y^2 e^{-y}}{\gamma + \sqrt{y}} dy} - \frac{3}{2} h(\gamma). \quad (58)$$

Соотношение (54), представляющее собой требование обращения средней скорости примесей (56) в нуль, удобно представить в виде условия независимости некоторой безразмерной функции

концентрации и температуры от координат. Для этого необходимо проинтегрировать дифференциальный множитель в выражении (56). Результат такого интегрирования определяется конкретным видом зависимости величины  $\gamma$  от концентрации и температуры. Так, например, считая, что  $\gamma \sim n^k T^{(l-1/2)}$ , получаем

$$V = - \frac{T}{v_{\text{Kn}} m^*} \left[ h(\gamma) - \frac{2k}{2l-1} w(\gamma) \right] \nabla(\ln \Psi), \quad (59)$$

где

$$\Psi = x \exp \left[ \int \frac{\gamma}{t} dt \right], \quad (60)$$

$\Phi(\gamma) = 2w(\gamma)/[(2l-1)h(\gamma) - 2kw(\gamma)]$ ;  $x = n/n_{40}$  – отношение числа примесей в единице объема к числу частиц в единице объема чистого гелия при  $T = 0$ .

Соотношение (51), описывающее стационарное состояние газа примесей, соответственно приобретает вид

$$\nabla \Psi = 0. \quad (61)$$

Если столкновения примесь–порошок преобладают по сравнению со взаимными столкновениями примесей, то в рассматриваемой системе реализуется кнудсеновский режим, так что функция  $\Psi$  (60) отличается от  $x\sqrt{T}$  лишь в меру малости отношения  $\gamma \equiv v/v_{\text{Kn}}$ .

Поскольку значения концентрации и температуры оказываются связанными условием, близким к кнудсеновскому, частота столкновений примесь–примесь  $\nu \sim x^k T^m$  различна в разных точках раствора. Это обстоятельство приводит к дополнительной зависимости средней скорости примесей от координат и отражается, в свою очередь, на условии стационарности (61). Таким образом, можно утверждать, что величина соответствующей поправки к чисто кнудсеновскому выражению для функции  $\Psi$  ( $\Psi_{\text{Kn}} = (x\sqrt{T})^{[2l/(2l-k)]}$ ) определяется характером зависимости частоты столкновений примесь–примесь от концентрации и температуры. Исключением является случай  $\nu \sim xT$ , когда величина  $\gamma$  практически одинакова во всех точках раствора, и средняя скорость примесей практически не зависит от координат.

Для количественного анализа отклонения условия стационарности (61) от известного соотношения Кнудсена достаточно воспользоваться разложением функции  $\Psi$  по малому параметру  $\gamma$ . В итоге равенство (61) преобразуется к виду

$$\nabla \left( x \sqrt{T} \left( 1 + \frac{\gamma \sqrt{\pi}}{2(2l - k - 1)} + \dots \right) \right) = 0. \quad (62)$$

Отметим, что формула (62) пригодна лишь при выполнении условия  $\gamma/(2l - k - 1) \ll 1$ , которое нарушается в рассмотренном выше выделенном случае  $l = (k + 1)/2$ , когда реализуется зависимость  $\gamma(n\sqrt{T})$ . Тогда разложение функции  $\Psi$  (60) и подстановка ее в соотношение (62) приводят к условию

$$\nabla \left( x \sqrt{T} \left( 1 + \gamma \left( \frac{4}{\sqrt{\pi}} \ln \gamma - \frac{n \sqrt{\pi}}{2} \ln x \right) \right) \right) = 0. \quad (63)$$

Формулы (62), (63) описывают стационарное состояние газа примесонев в пределе  $\gamma \ll 1$  и представляют собой обычное условие Кнудсена с учетом малой поправки, учитывающей вклад столкновений примесь–примесь. Знак поправки оказывается положительным при условии  $2l - 1 > k$  и отрицательным в случае  $2l - 1 \leq k$ . Такое различие можно объяснить следующим образом. Вследствие того, что в кнудсеновском режиме величина  $x\sqrt{T}$  оказывается практически постоянной во всех точках раствора, параметр  $\gamma(x^k T^{l-1/2}) \equiv \gamma(x \sqrt{T}) T^{(2l-k-1)/2k}$  фактически является функцией температуры: возрастающей при  $2l - 1 > k$ , убывающей при  $2l - 1 < k$  и постоянной при  $2l - 1 = k$ . В итоге, благодаря указанной выше смене знаков, множители в скобках в формулах (62), (63) всегда являются возрастающими функциями координаты  $z$ . Для того чтобы скомпенсировать их рост, множитель  $x\sqrt{T}$  должен, напротив, медленно убывать, обеспечивая тем самым постоянство всего произведения в целом. Таким образом, в растворе реализуется естественная ситуация, когда градиент температуры компенсируется малым, в меру величины  $\gamma$ , противоположно направленным градиентом кнудсеновского параметра  $[\nabla(x \sqrt{T})]/(x \sqrt{T}) \sim -\gamma (\nabla T/T)$ . В выделенном случае  $\gamma \sim x^k T^{k/2}$  последнее соотношение следовало бы переписать в виде  $\nabla \gamma/\gamma^2 \sim -\nabla T/T$ , что и объясняет появление логарифмического члена  $\sim \ln T$  в точном разложении (63). Таким образом, содержащий  $\gamma$  множитель в скобках в формуле (62) изменяется по степенному закону, в то время как аналогичный множитель в формуле (63) возрастает как  $\ln T$ . Такая особенность приводит к несколько отличающимся степеням зависимости кнудсеновского параметра  $x\sqrt{T}$  от координат в случаях  $2l - 1 = k$  (см. (63)) и  $2l - 1 \neq k$  (см. (62)). Это отличие тем более заметно, чем больше величина  $2l - k - 1$  отклоняется от 0. Описанное обстоятельство может быть использовано для экспериментального определения истинной зависи-

мости частоты столкновений примесь–примесь от плотности примесонев и температуры. Как известно [19], наблюдаемые экспериментально зависимости  $v(n, T)$  хорошо описываются эмпирическим законом  $v \sim nT^l$ , где величина  $l$  в зависимости от рассматриваемой области температур может принимать значения 1 и  $1/2$ . Первый случай с  $l = 1$  в точности соответствует рассмотренной выше выделенной зависимости  $\gamma(x\sqrt{T})$  и может быть определен по характерной логарифмической зависимости величины поправки  $\sim \gamma$  от температуры.

Формулы (62), (63) могут служить основой для обработки результатов исследований стационарного неравновесного состояния сверхтекучего раствора  $^3\text{He}-^4\text{He}$ , заполняющего пористую среду [20]. Традиционная установка, используемая обычно для измерений осмотического давления, представляет собой два сосуда, заполненных сверхтекучим раствором и соединенных сверхщелью, содержащей пористый материал. Контейнеры при этом поддерживаются при постоянных, но отличающихся температурах, так что в системе возникают несбалансированные градиенты термодинамических величин, приводящие к перетеканию раствора через сверхщель. Так, для не испытывающей сопротивления сверхтекучей компоненты раствора быстро (за несколько секунд) устанавливается режим, при котором химический потенциал  $^4\text{He}$  в растворе оказывается постоянным во всех его точках ( $\mu_4(z) = \text{const}$ ). На этом этапе, в отсутствие тепловых возмущений, давления в контейнерах отличаются точно на величину осмотического давления примесонев, помещенных первоначально в один из них [21]. Указанная разница давлений и служит предметом исследования в экспериментах [20]. Устанавливающийся практически мгновенно режим с  $\mu_4(z) = \text{const}$  не является, однако, стационарным. В системе продолжается медленное перетекание примесонев, индуцированное несбалансированными градиентами концентрации и температуры. Истинное стационарное состояние устанавливается лишь тогда, когда градиент концентрации уравнивает градиент температуры таким образом, что полный диффузионный поток примесонев равен нулю. Согласно оценкам, основанным на анализе экспериментов, описанных в [20], время установления такого режима может составлять несколько часов. Заметим, что это время можно изменять варьированием экспериментальных условий. Таким образом, увеличение времени ожидания в экспериментах, аналогичных [20], позволило бы изучить кнудсеновский механизм

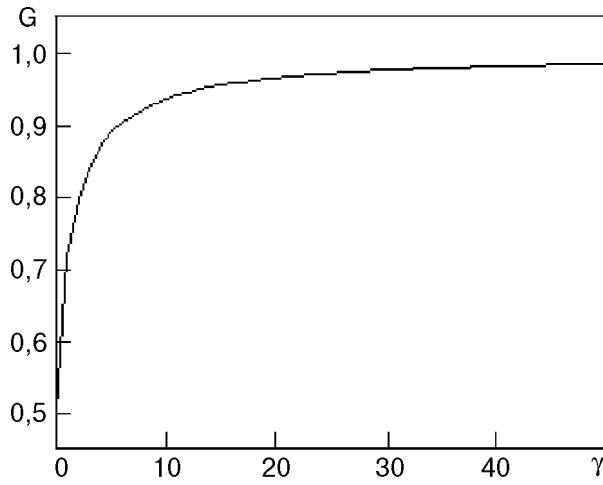


Рис. 1. Зависимость коэффициента пропорциональности  $G$  между градиентами температуры и концентрации от параметра  $\gamma$  в стационарном режиме.

установления стационарного режима в рассматриваемой системе.

В гидродинамическом пределе, когда столкновения примесь–примесь преобладают над столкновениями примесь–порошок, механическое равновесие в системе достигается путем выравнивания давления раствора. Малый вклад

столкновений примесь–порошок в установление стационарного режима в этом пределе можно учесть с помощью разложения функции  $\Psi$  (60) по малому параметру  $\gamma^{-1}$  и подстановки результата в соотношение стационарности (61). В итоге получим

$$\nabla \left( xT \left( 1 + \frac{8}{3\gamma\sqrt{\pi}} \frac{1}{2(l-k)-1} + \dots \right) \right) = 0. \quad (64)$$

Формула (64) аналогична по структуре результату (62), полученному при исследовании кнудсеновского режима. Применимость (64) ограничена неравенством  $2\gamma^{-1}/[2(l-k)-1] \ll 1$ . Роль выделенного случая играет здесь зависимость  $\gamma^{-1}(xT)$ , определяемая равенством  $l - 1/2 = k$ . Поскольку осмотическое давление примесей в гидродинамическом режиме оказывается практически постоянным в каждой точке раствора, величина  $\gamma^{-1}$  в этом случае также фактически не зависит от координат. Не повторяя всех рассуждений, относящихся к сравнению формул (62) и (63), приведем результат, соответствующий пределу  $\gamma^{-1} \ll 1$  в случае  $l - 1/2 = k$ :

$$\nabla \left( xT \left( 1 + \frac{4k}{3\sqrt{\pi}} \gamma^{-1} \ln x - \frac{15\pi - 32}{8\sqrt{\pi}} \gamma^{-1} \ln \gamma^{-1} + \dots \right) \right) = 0. \quad (65)$$

Для более детального анализа условия стационарности (61) в промежуточной области с произвольными значениями  $\gamma$  представим его в виде

$$\frac{\nabla n}{n} + G(\gamma) \frac{\nabla T}{T} = 0, \quad (66)$$

где  $G(\gamma) \equiv w(\gamma)/h(\gamma)$  — монотонно возрастающая функция, принимающая значение  $1/2$  в кнудсеновском пределе  $\gamma = 0$  и значение  $1$  в гидродинамическом пределе  $\gamma \rightarrow \infty$ . Результаты численного анализа поведения функции  $G(\gamma)$  для промежуточных значений  $\gamma$  представлены на рис. 1. Как видно, функция  $G(\gamma)$  экспоненциально быстро достигает значения, соответствующего гидродинамическому пределу. Таким образом, если частота столкновений примесь–примесь всего в несколько раз превышает частоту столкновений примесь–порошок, то в газе примесей фактически реализуется гидродинамическая ситуация.

В области вырождения  $T \ll T_F$  частота столкновений примесь–примесь выражается зависимостью [19]

$$\mathbf{v} = A^{-1}T^2 \left( 1 - B \frac{T^2}{T_F^2} \right), \quad (67)$$

где  $A$  и  $B$  — коэффициенты, зависящие от концентрации примесей. Для дальнейшего анализа формулу (67) удобно представить в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^F \frac{T^2}{T_F^2} f(T_F) \left( 1 - B \frac{T^2}{T_F^2} \right), \quad (68)$$

где  $\mathbf{v}^F$  — постоянная, совпадающая по порядку величины с частотой столкновений  $\mathbf{v}$  и имеющая ту же размерность;  $f(T_F) \equiv (A^{-1}T_F^2)/\mathbf{v}_F$  — безразмерная функция температуры Ферми, отражающая зависимость  $\mathbf{v}$  от концентрации примесей.

Подставляя выражение (68) в соотношение (54) и ограничиваясь членами  $\sim T^2/T_F^2$ , можно представить условие, обеспечивающее стационарное состояние газа примесей, в виде

$$\nabla \left[ \int_0^{T_F} t \exp(-\gamma_F u(t)) dt + \frac{\pi^2}{12} T^2 \exp(-\gamma_F u(T_F)) \right] = 0, \quad (69)$$

где  $\gamma_F = v^F / v_{Kn}^F$ ,  $v_{Kn}^F = N \sigma^{(1,0)} \sqrt{2T_F/m^*}$ ,

$$u(t) \equiv \frac{12}{\pi^2} \int_0^t \frac{f(y)}{y} dy.$$

В кнудсеновском пределе  $\gamma_F \ll 1$  соотношение (69) удобно выразить в виде условия постоянства во всех точках раствора функции температуры и давления газа примесонов:

$$P_F \left[ 1 - \frac{15}{\pi^2} \gamma_F \int_0^1 \frac{f(y T_F)}{y} (1 - y^2) dy - \frac{5\pi^2}{24} \frac{T^2}{T_F^2} \left( 1 + \frac{12}{\pi^2} \gamma_F \int_0^1 \frac{f(y T_F)}{y} dy \right) \right] = \text{const}, \quad (70)$$

где  $P_F = \frac{2}{5} n T_F \left( 1 + \frac{5\pi^2}{12} \frac{T^2}{T_F^2} \right)$  — давление газа примесонов при  $T \ll T_F$ . Как видно из формулы (70), условие механического равновесия газа, справедливое в неограниченной среде ( $P_F = \text{const}$ ), неприменимо, когда основной вклад в его установление вносят столкновения примесь — порошок. Здесь, как и в случае классического эффекта Кнудсена, устанавливается градиент давления, направленный так же, как и градиент температуры.

В заключение отметим, что эффект Кнудсена в вырожденном квантовом газе является уникальным, экспериментально не изученным физическим явлением. Газ примесонов сверхтекучего раствора  $^3\text{He}-^4\text{He}$  — фактически единственная известная физическая система, где этот эффект может быть реализован в чистом виде. Приведенные нами теоретические результаты могут быть использованы для анализа предложенного выше эксперимента по изучению стационарного неравновесного состояния газа примесонов в области низких температур.

### Заключение

Решена задача о течении газа квазичастиц под воздействием градиентов термодинамических величин в объеме, заполненном порошком. Получе-

но точное решение (36) кинетического уравнения (1), выраженное через матричные элементы оператора взаимных столкновений квазичастиц и парциальные сечения рассеяния квазичастиц на частицах порошка. Полученное решение позволяет исследовать процессы переноса газа квазичастиц через пористую среду без привлечения каких-либо модельных представлений о характере взаимодействия квазичастиц между собой. Из точного решения (36) найдено выражение (37) для средней скорости фильтрации газа квазичастиц через пористую среду. Получено условие (4), (5), (38), описывающее стационарное, термодинамически неравновесное состояние газа квазичастиц, помещенного в объем, занятый пористым материалом. Все полученные результаты справедливы как для классического, так и для вырожденного газа квазичастиц.

Показано, что точное выражение (14), представляющее результат воздействия оператора столкновений на произвольную функцию импульса, может быть использовано для построения различных приближений. В частности, исследована модель, в которой действие межчастичного оператора столкновений на любую функцию, не принадлежащую его ядру, сводится к умножению на феноменологический параметр — частоту столкновений. Такой подход позволил последовательно получить выражение (49) для модельного интеграла столкновений, искусственно введенного в теории БГК. Модельное представление интеграла столкновений позволило упростить все полученные в общем виде результаты. Так, в рамках рассматриваемого приближения получено явное выражение для средней скорости фильтрации (53), (56) газа квазичастиц и выведено соотношение (54), обеспечивающее его стационарное состояние. Условие стационарности (38) приведено к виду соотношения между градиентами температуры и плотности газа и детально исследовано в области высоких ( $T \gg T_F$ ) (66) и низких ( $T \ll T_F$ ) (69) температур. Полученные результаты справедливы для произвольных соотношений между частотами столкновений квазичастиц между собой  $\nu$  с частицами порошка  $\nu_{Kn}$ . Соотношение стационарности (54) детально изучено в гидродинамическом ( $\nu \gg \nu_{Kn}$ ) (64), (65) и кнудсеновском ( $\nu \ll \nu_{Kn}$ ) (62), (63) предельных случаях. Для промежуточной области  $\nu \sim \nu_{Kn}$  условие стационарности (66) проанализировано численно. Исследован непрерывный переход от кнудсеновского к гидродинамическому режиму течения газа квазичастиц. Изучен эффект Кнудсена в вырожденном квантовом газе (70).

Полученные результаты применены для исследования стационарного неравновесного состояния газа примесей сверхтекучего раствора  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  в ограниченной геометрии. Обнаружены и исследованы два этапа в установлении такого состояния. Предложены эксперименты по определению температурной и концентрационной зависимостей частоты столкновений примесь – примесь.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов EPSRS №GR/M/22543, МНОП №QSU082002.

1. Л. Д. Ландау, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
2. А. В. Лыков, *Явления переноса в капиллярно-пористых телах*, Наука, Москва (1954).
3. Т. Graham, *Quart. J. Sci.* **2**, 74 (1829).
4. J. Loschmidt, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien.* **61**, 367 (1870).
5. J. Loschmidt, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien.* **62**, 468 (1870).
6. J. C. Maxwell, *Philos. Mag.* **20**, 21 (1860).
7. Т. Graham, *Philos. Trans. Roy. Soc.* **136**, 573 (1846).
8. Б. В. Дерягин, С. П. Баканов, *ДАН СССР* **115**, 267 (1957).
9. Б. В. Дерягин, С. П. Баканов, *ЖТФ* **27**, 2056 (1957).
10. R. H. Agranow, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **50**, 1066 (1963).
11. J. P. Breton and D. Massignon, *J. Chim. Phys.* **60**, 294 (1963).
12. M. M. R. Williams, *J. Phys.* **D6**, 759 (1973).
13. M. S. Mackey, *Biophys. J.* **11**, 75 (1971).
14. К. Черчиньяни, *Теория и приложения уравнения Больцмана*, Мир, Москва (1978).
15. Дж. Ферцигер, Г. Капер, *Математическая теория процессов переноса в газах*, Мир, Москва (1976).
16. И. Н. Адаменко, А. В. Жуков, К. Э. Немченко, *ФНТ* **23**, 574 (1997).

17. И. Н. Адаменко, К. Э. Немченко, *ФНТ* **21**, 498 (1995).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
19. И. Н. Адаменко, Э. Я. Рудаковский, *ФНТ* **13**, 3 (1987).
20. C. Ebner and D. O. Edwards, *Physics Rep.* **2C**, 79 (1971).
21. И. Н. Адаменко, К. Э. Немченко, В. И. Цыганок, А. И. Черванев, *ФНТ* **20**, 636 (1994).

### Dimension effect in impuriton gas of $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ superfluid mixture

I. N. Adamenko, L. N. Bortnik, and  
A. I. Chervanyov

The flow of quasiparticle gas forced by the gradients of thermodynamical values in the volume filled with a powder is considered. The exact solution of the kinetic equation is obtained. It is expressed in terms of matrix elements of the collision integral and partial scattering cross-sections of quasiparticles at the powder. The condition describing the steady non-equilibrium state of the quasiparticles gas in the volume filled with a porous material is obtained. The results obtained are valid for arbitrary relations of frequencies of quasiparticle-quasiparticle and quasiparticle-powder collisions. The transitions from the Knudsen regime of quasiparticle gas flow to the hydrodynamic one is investigated. The Knudsen effect in degenerated quantum gas is studied. The steady non-equilibrium state of  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  superfluid mixture impuriton gas is studied in confined geometry.