

АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД У ТЕОРІЇ ЗБУДЖЕННЯ НЕОДНОРІДНИХ ДІАФРАГМОВАНИХ ХВИЛЕВОДІВ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ РОЗМІРАМИ

А.М. Опанасенко

Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут», Харків, Україна

E- mail: opanasenko@kipt.kharkov.ua

Застосовуючи метод послідовних наближень та теорію збудження однорідних хвильоводів, побудовано схему знаходження електромагнітного поля в неоднорідних діафрагмових хвильоводах з повільно змінними розмірами.

ВСТУП

З часу винайдення та розробки хвильоводу, навантаженого дисками (ХНД), з постійним градієнтом на типі коливання $2\pi/3$ для Стенфордського лінійного електрон-позитронного ВЧ-прискорювача S-діапазону (2856 МГц) [1] діафрагмові хвильоводи з повільно змінною геометрією знайшли широке застосування в резонансних прискорювачах електронів різноманітного призначення [2, 3]. Як виявилось, вони зручні для ВЧ-налаштування [4, 5] та ВЧ-тренування. У порівнянні з однорідними (з постійним імпедансом) ці структури забезпечують більшу ефективність прискорення та завдяки деструктивній інтерференції дипольних паразитних хвиль, довжина яких міняється зі зміною геометрії хвильоводу, мають значно вищі порогові струми виникнення поперечної нестійкості пучка. Нова хвиля інтересу до таких структур, але в X-діапазоні частот (11,4; 12; 30 ГГц), обумовлена розробкою проектів лінійних електрон-позитронних резонансних колайдерів наступного покоління – тераелектронвольтного діапазону енергій [6]. У зв'язку з цим отримали подальший розвиток аналітичних методів розрахунку перехідних процесів у прискорюючих структурах з довільним профілем неоднорідності [7], методи компенсації енергетичного розкиду, зумовленого ефектом навантаження структури пучком [8 - 10], та методи ВЧ-налаштування [11 - 13].

Загальними для цих підходів є такі припущення:

i) в основній смузі неоднорідної структури поле може бути представлено у вигляді суперпозиції прямої та зворотної хвиль, що біжать;

ii) у межах поточної чарунки структура поля в неоднорідному хвильоводі відповідає структурі поля в однорідному періодичному, що має розміри цієї поточної чарунки;

iii) уздовж узгодженої з ВЧ-джерелом неоднорідної структури потік ВЧ-енергії змінюється за рахунок поглинання її в стінках хвильоводу та обміну з пучком.

Проте, якщо для структур з постійним градієнтом, де геометричні розміри дисків повільно змінюються (у порівнянні з довжиною окремої чарунки) уздовж секції, такий підхід є досить очевидним, то для хвильоводів зі зростаючим градієнтом (наприклад, майже в 1,6 рази) [12] потребує обґрунтування. Виникає питання – до якого мінімального рівня локальних коефіцієнтів відбиття можна узгодити ХНД

з довільною неоднорідністю [14]. У роботах [15] був започаткований новий підхід для розрахунку електродинамічних характеристик ХНД на основі моделі зв'язаних резонаторів, що дало можливість подивитися на властивості неоднорідних ХНД більш глибоко [16, 17]. Проте такий підхід потребує чисельного моделювання конкретної неоднорідної структури для знаходження коефіцієнтів зв'язку між сусідніми чарунками-резонаторами [18].

Спроба відмовитися від феноменологічного підходу шляхом розширення теорії збудження періодичних хвильоводів [19] на неперіодичні – з повільно змінною геометрією, була зроблена в [20]. Припускалось, що поле в слабо неоднорідному хвильоводі можна представити у вигляді розкладу по власним хвилям, структура поля яких визначається поточними розмірами хвильоводу і співпадає зі структурою власних хвиль періодичного хвильоводу з геометрією, що відповідає цим поточним розмірам. Як результат, було виведено рівняння для амплітуди поля в основній частотній смузі, яке співпадає з раніше одержаними на основі закону зберігання потоку ВЧ-енергії. Попри це, недоліком такого підходу є невизначеність меж неоднорідності, за якими таке приближення перестає бути достовірним.

Мета цієї статті полягає у визначенні малого параметра для діафрагмового хвильоводу з повільно змінними розмірами і застосуванні методу послідовних наближень при розв'язанні неоднорідних рівнянь Максвелла, для того щоб мати кількісний критерій точності знайденого приближення.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Хай напівнескінчений періодичний ХНД з геометричними розмірами чарунки, позначених вектором $\vec{q}_0 = \vec{q}(0)$, переходить, повільно змінюючи геометричні розміри уздовж осі z $\vec{q}(z)$ на відрізок довжиною L , у періодичний напівнескінчений хвильовід з розмірами $\vec{q}_L = \vec{q}(L)$, як показано на Рис. 1. Як приклад, на Рис. 2 і 3 показано сімейство повільно змінних розмірів $\vec{q}(n) = (a, b, D)$ та їх відносних різниць $\Delta\vec{q}(n) = (\Delta a/a, \Delta b/b, \Delta D/D)$ на періоді в залежності від номера чарунки секції прискорювача, що проєктується в ННЦ ХФТІ [21].

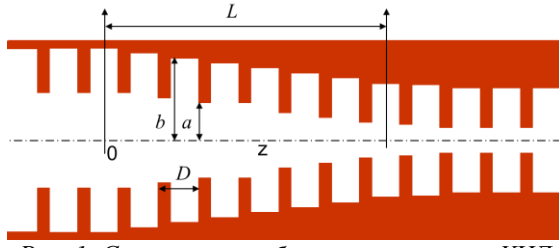


Рис. 1. Схематичне зображення круглого ХНД з повільно змінними розмірами $\vec{q}(z) = (a, b, D)$ на відрізьку довжиною L

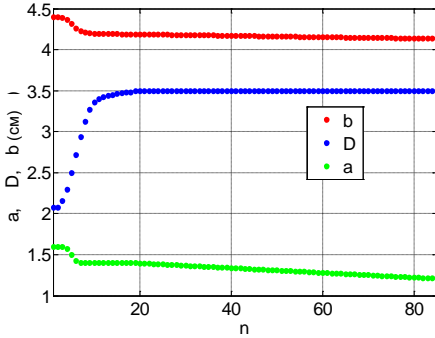


Рис. 2. Залежності геометричних розмірів $\vec{q}(n) = (a, b, D)$ від номера чарунки n

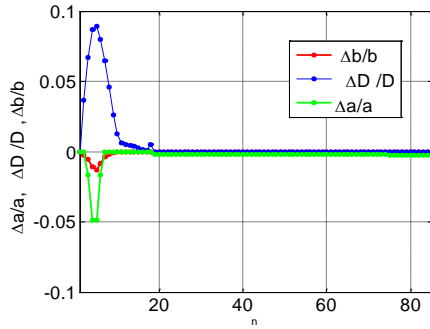


Рис. 3. Залежності відносних різниць геометричних розмірів $\Delta\vec{q}(n) = (\Delta a/a, \Delta b/b, \Delta D/D)$ від номера чарунки n

Тут означено: $\Delta a/a = (a_{n+1} - a_n)/a_n$; $\Delta b/b = (b_{n+1} - b_n)/b_n$; $\Delta D/D = (D_{n+1} - D_n)/D_n$.

Під повільно змінними геометричними розмірами $\vec{q}(z)$ будемо розуміти такі розміри, що мало змінюються на довжині чарунки D :

$$\left| \frac{\Delta q_k}{q_k} \right| = \left| \frac{D(z)}{q_k} \frac{dq_k}{dz} \right| = \varepsilon_k \ll 1, \quad (1)$$

де q_k – один із розмірів, що міняється (компонента вектора \vec{q}).

Хай зліва направо по однорідній частині структури ($z < 0$) біжить власна електромагнітна хвиля із заданою амплітудою $C_0^{(0)}$ і частотою ω , що лежить у найнижчій (основній) смузі з індексом 0:

$$\begin{aligned} C_0^{(0)} \vec{E}_0(\vec{q}_0, \vec{r}) e^{i h_s(\vec{q}_0) z}, \\ C_0^{(0)} \vec{H}_0(\vec{q}_0, \vec{r}) e^{i h_s(\vec{q}_0) z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Відмітимо, що власні хвилі в однорідних частинах ХНД ($z < 0$ і $z > L$) задовольняють наступним умовам ортогональності [19]:

$$\int_{S'(\vec{q}_0)} \{ \vec{E}_s \times \vec{H}_r - \vec{E}_r \times \vec{H}_s \} \vec{e}_z dS = N_s \delta_{r,-s}. \quad (3)$$

Необхідно знайти поля \vec{E}, \vec{H} у неоднорідному відрізьку хвильоводу для $0 < z < L$.

2. МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Будемо шукати поля в неоднорідному відрізьку хвильоводу в наступному вигляді: $\vec{E}(\vec{q}(z), \vec{r}), \vec{H}(\vec{q}(z), \vec{r})$. Підставивши їх у рівняння Максвелла (без джерела струму), можна переписати останні, на відрізьку хвильоводу $0 < z < L$, у формі неоднорідних укорочених рівнянь Максвелла:

$$\text{rot}^{(\vec{q})} \vec{E}(\vec{q}, \vec{r}) = i\omega\mu \vec{H}(\vec{q}, \vec{r}) + \vec{J}_{H,\perp}, \quad (4)$$

$$\text{rot}^{(\vec{q})} \vec{H}(\vec{q}, \vec{r}) = -i\omega\varepsilon \vec{E}(\vec{q}, \vec{r}) + \vec{J}_{E,\perp},$$

де $\vec{J}_{H,\perp}$ та $\vec{J}_{E,\perp}$ – поперечні компоненти еквівалентної щільності магнітного та електричного струмів, відповідно, що виникають внаслідок наявності неоднорідності структури, є джерелами вторинних хвиль і мають вид:

$$\vec{J}_{H,\perp} = -\frac{d\vec{q}}{dz} \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \vec{E}_\perp \times \vec{e}_z, \quad (5)$$

$$\vec{J}_{E,\perp} = \frac{d\vec{q}}{dz} \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \vec{H}_\perp \times \vec{e}_z.$$

Відмітимо, що в (4) диференційний укорочений оператор діє тільки на явну залежність поля від координат $\text{rot}^{(\vec{q})} \vec{E}(\vec{q}, \vec{r}) \equiv \text{rot} \vec{E}(\vec{q}, \vec{r}) \Big|_{\vec{q}=\text{const}}$.

Обмежимося класом структур, для яких $D(z)/q_k(z) \sim 1$, $|dq_k/dz| \sim \varepsilon_k \ll 1$. За цих обставин, щоб розв'язати Рів. (4), скористаємося методом послідовних наближень. Шукатимемо поле у вигляді розкладу в ряд по ступенях малого параметра:

$$\vec{E}(\vec{q}, \vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \vec{E}^{(m)}(\vec{q}, \vec{r}), \quad (6)$$

$$\vec{H}(\vec{q}, \vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \vec{H}^{(m)}(\vec{q}, \vec{r}),$$

де поля: $\{ \vec{E}^{(m)}(\vec{q}, \vec{r}), \vec{H}^{(m)}(\vec{q}, \vec{r}) \} \sim \varepsilon^m$, задовольняють укороченим рівнянням Максвелла (4):

i) нульовий порядок

$$\text{rot}^{(\vec{q})} \vec{E}^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}) = i\omega\mu \vec{H}^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}), \quad (7)$$

$$\text{rot}^{(\vec{q})} \vec{H}^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}) = -i\omega\varepsilon \vec{E}^{(0)}(\vec{q}, \vec{r});$$

ii) m -ий порядок для $m=1, 2, \dots$

$$\text{rot}^{(\vec{q})} \vec{E}^{(m)}(\vec{q}, \vec{r}) = i\omega\mu \vec{H}^{(m)}(\vec{q}, \vec{r}) + \vec{J}_{H,\perp}^{(m)}, \quad (8)$$

$$\text{rot}^{(\vec{q})} \vec{H}^{(m)}(\vec{q}, \vec{r}) = -i\omega\varepsilon \vec{E}^{(m)}(\vec{q}, \vec{r}) + \vec{J}_{E,\perp}^{(m)};$$

де $\vec{J}_{H,\perp}^{(m)}$ і $\vec{J}_{E,\perp}^{(m)}$ – поперечні компоненти еквівалентної щільності магнітного та електричного струмів m -го порядку:

$$\vec{J}_{H,\perp}^{(m)} = -\frac{d\vec{q}}{dz} \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \vec{E}_\perp^{(m-1)} \times \vec{e}_z, \quad (9)$$

$$\vec{J}_{E,\perp}^{(m)} = \frac{d\vec{q}}{dz} \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \vec{H}_\perp^{(m-1)} \times \vec{e}_z.$$

Так як укорочений оператор $\text{rot}^{(\vec{q})}$ діє тільки на координати, від яких поле залежить явно, то рішення

ням однорідної частини *укорочених* рівнянь Максвелла (7) та (8) може бути повний набір власних хвиль періодичного хвилеводу, взятого з довільною залежністю $\vec{q}(z)$:

$$\vec{E}_{\pm p}(\vec{q}, \vec{r}) e^{\pm i \int_0^z h_p(\vec{q}) dz'}, \vec{H}_{\pm p}(\vec{q}, \vec{r}) e^{\pm i \int_0^z h_p(\vec{q}) dz'}, \quad (10)$$

які, за визначенням, задовольняють умові ортогональності

$$\int_{S[\vec{q}(z)]} \{ \vec{E}_s \times \vec{H}_p - \vec{E}_p \times \vec{H}_s \} \vec{e}_z dS = N_s [\vec{q}(z)] \delta_{p,-s}. \quad (11)$$

Далі використаємо теорію збудження періодичних хвилеводів Вайнштейна [19], згідно якої ми можемо поля m -го порядку, що входять у (8), розкласти в ряд по власних хвилях (10) зі змінними по z коефіцієнтами $C_p^{(m)}$:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(m)} &= \sum_p C_p^{(m)} \vec{E}_p(\vec{q}, \vec{r}) e^{i \int_0^z h_p(\vec{q}) dz'} + C_{-p}^{(m)} \vec{E}_{-p}(\vec{q}, \vec{r}) e^{-i \int_0^z h_p(\vec{q}) dz'}, \\ \vec{H}^{(m)} &= \sum_p C_p^{(m)} \vec{H}_p(\vec{q}, \vec{r}) e^{i \int_0^z h_p(\vec{q}) dz'} + C_{-p}^{(m)} \vec{H}_{-p}(\vec{q}, \vec{r}) e^{-i \int_0^z h_p(\vec{q}) dz'}, \end{aligned} \quad (12)$$

де $C_p^{(m)}$ задовольняють рівнянням:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{\pm p}^{(m)}}{dz} &= \frac{e^{\mp i \int_0^z h_p(\vec{q}) dz'}}{N_{\pm p}(\vec{q})} \int_{S(\vec{q})} \vec{J}_{E,\pm}^{(m)} \vec{E}_{\mp p,\pm}(\vec{q}, \vec{r}) dS \\ &+ \frac{e^{\mp i \int_0^z h_p(\vec{q}) dz'}}{N_{\pm p}(\vec{q})} \int_{S(\vec{q})} \vec{J}_{H,\pm}^{(m)} \vec{H}_{\mp p,\pm}(\vec{q}, \vec{r}) dS. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким чином, побудований вище алгоритм дає можливість знайти поле в неоднорідній частині хвилеводу з будь-якою заданою точністю.

3. ПОЛЕ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

Поле нульового порядку малості, що задовольняє рівнянню (7), може бути представлено лінійною комбінацією власних хвиль (10) з постійними амплітудами. Задовольнивши граничні умові при $z=0$, одержимо поле нульового порядку малості в області $0 < z < L$:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}) &= C_0^{(0)} \vec{E}_0(\vec{q}, \vec{r}) e^{i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'}, \\ \vec{H}^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}) &= C_0^{(0)} \vec{H}_0(\vec{q}, \vec{r}) e^{i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'}. \end{aligned} \quad (14)$$

У цьому наближенні в однорідній структурі ліворуч ($z < 0$) зворотна хвиля відсутня – $C_{-0}^{(0)} = 0$, а праворуч ($z > L$) амплітуда хвилі, що пройшла, становить $C_0^{(L)} = C_0^{(0)} e^{i \int_0^L h_0(\vec{q}) dz'}$.

4. ПОЛЕ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Підставимо поле нульового порядку (14) у вирази для еквівалентної щільності магнітного та електричного струмів (9)

$$\vec{J}_{H,\pm}^{(1)} = -C_0^{(0)} e^{i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'} \frac{d\vec{q}}{dz} \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \vec{E}_{0,\pm}(\vec{q}, \vec{r}) \times \vec{e}_z, \quad (15)$$

$$\vec{J}_{E,\pm}^{(1)} = C_0^{(0)} e^{i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'} \frac{d\vec{q}}{dz} \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \vec{H}_{0,\pm}(\vec{q}, \vec{r}) \times \vec{e}_z.$$

Можна бачити, що величини $\vec{J}_{H,\pm}^{(1)}$ і $\vec{J}_{E,\pm}^{(1)}$ являють собою хвилі, що біжать уздовж неоднорідної частини хвилеводу синхронно з полем прямої хвилі з індексом 0 (14). Підставивши (15) у (13) та виконавши інтегрування, одержимо коефіцієнти розкладу $C_p^{(1)}(z)$ для поля першого порядку малості при $0 < z < L$:

$$C_p^{(1)} = C_0^{(0)} \int_0^z dz' \frac{e^{i \int_0^{z'} [h_0(\vec{q}) - h_p(\vec{q})] dz'}}{N_p(\vec{q})} \frac{d\vec{q}}{dz'} \vec{f}_{-p,0}(z), \quad (16)$$

$$C_{-p}^{(1)} = C_0^{(0)} \int_z^L dz' \frac{e^{i \int_0^{z'} [h_0(\vec{q}) + h_p(\vec{q})] dz'}}{N_p(\vec{q})} \frac{d\vec{q}}{dz'} \vec{f}_{p,0}(z).$$

де $\vec{f}_{\pm p,0}(z)$ – коефіцієнти *чутливості* поля до зміни геометрії структури:

$$\vec{f}_{\pm p,0}(z) = \int_{S(\vec{q})} \left(\vec{E}_{\pm p} \times \frac{\partial \vec{H}_0}{\partial \vec{q}} - \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial \vec{q}} \times \vec{H}_{\pm p} \right) \vec{e}_z dS. \quad (17)$$

Таким чином, підставивши (16) в (12) для $m=1$, одержимо добавку першого порядку малості до поля в неоднорідній частині хвилеводу:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(1)}(\vec{q}, \vec{r}) &= C_s^{(0)} \left\{ \mathcal{G}_{-0,0}(z) \vec{E}_0(\vec{q}, \vec{r}) e^{i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'} \right. \\ &+ \mathcal{G}_{0,0}(z) \vec{E}_{-0}(\vec{q}, \vec{r}) e^{-i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'} + \\ &\left. \sum_{p \neq s} \mathcal{G}_{-p,0}(z) \vec{E}_p(\vec{q}, \vec{r}) e^{-i \int_0^z \alpha_p(\vec{q}) dz'} + \mathcal{G}_{p,0}(z) \vec{E}_{-p}(\vec{q}, \vec{r}) e^{i \int_0^z \alpha_p(\vec{q}) dz'} \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

де введено наступні нормовані амплітуди:

$$\mathcal{G}_{-0,0}(z) = \int_0^z \frac{dz'}{N_0(\vec{q})} \frac{d\vec{q}}{dz'} \vec{f}_{-0,0}(z), \quad (19)$$

$$\mathcal{G}_{0,0}(z) = \int_z^L dz' \frac{e^{2i \int_0^{z'} h_0(\vec{q}) dz'}}{N_0(\vec{q})} \frac{d\vec{q}}{dz'} \vec{f}_{0,0}(z), \quad (20)$$

$$\mathcal{G}_{-p,0}(z) = \int_0^z dz' \frac{e^{i \int_0^{z'} [h_0(\vec{q}) - i\alpha_p(\vec{q})] dz'}}{N_p(\vec{q})} \frac{d\vec{q}}{dz'} \vec{f}_{-p,0}(z), \quad (21)$$

$$\mathcal{G}_{p,0}(z) = \int_z^L dz' \frac{e^{i \int_0^{z'} [h_0(\vec{q}) + i\alpha_p(\vec{q})] dz'}}{N_p(\vec{q})} \frac{d\vec{q}}{dz'} \vec{f}_{p,0}(z). \quad (22)$$

Видно, що в першому порядку малості крім *резонансного* уточнення до поля прямої хвилі, що біжить з індексом 0 (перший доданок у (18)), з'являється *нерезонансний* вклад зворотної хвилі, яка належить цій смузі «0» (другий доданок у рів-

нянні (18)), а також вклад закритичних коливань із вищих смуг з $p \neq 0$, для яких постійна розповсюдження хвилі є уявна: $h_{\pm p} = \pm i\alpha_p$. Аналогічно можна представити добавку до магнітного поля $\vec{H}^{(1)}(\vec{q}, \vec{r})$.

5. ОЦІНКА ВКЛАДУ НЕРЕЗОНАНСНОГО ПОЛЯ

Розглянемо структуру поля в неоднорідній частині хвилеводу. Приймаючи до уваги (14) і (18), обмежимося приближенням з квадратичною точністю по малому параметру:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{q}, \vec{r}) &= \vec{E}^{(0)}(\vec{q}, \vec{r}) + \vec{E}^{(1)}(\vec{q}, \vec{r}) + O(\varepsilon^2) \\ &\approx C_0^{(0)} \left\{ \left[1 + \mathcal{G}_{0,-0}(z) \right] \vec{E}_0(\vec{q}, \vec{r}) e^{i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'} \right. \\ &\quad + \mathcal{G}_{0,0}(z) \vec{E}_{-0}(\vec{q}, \vec{r}) e^{-i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'} + \\ &\quad \left. \sum_{p \neq 0} \mathcal{G}_{0,-p}(z) \vec{E}_p(\vec{q}, \vec{r}) e^{-i \int_0^z \alpha_p(\vec{q}) dz'} + \mathcal{G}_{0,p}(z) \vec{E}_{-p}(\vec{q}, \vec{r}) e^{i \int_0^z \alpha_p(\vec{q}) dz'} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Оцінимо за порядком величини внесок у поле нерезонансних поправок (20-22) відносно резонансної (19). Коефіцієнти чутливості поля (17) можуть бути представлені, як сума повільно та швидко змінних частин. Для оцінки амплітуд (20-22) достатньо обмежитися вкладом повільно змінної частини ($\vec{f}_{\pm p,0}$, $p=0,1,\dots$), оскільки вона вносить основний вклад в інтеграли по z . Застосовуючи асимптотичний метод інтегрування комплексної функції з повільно змінної амплітудою (як показано в Додатку (Д7)), можемо одержати такі оцінки:

$$\mathcal{G}_{0,0}(z) \approx \int_0^z \frac{dz}{N_0(\vec{q})} \frac{d\vec{q}}{dz} \overline{\vec{f}_{-0,0}}, \quad (24)$$

$$\mathcal{G}_{0,0}(z) \approx \frac{ie^{2i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'}}{N_0(\vec{q}) 2h_0(\vec{q})} \frac{d\vec{q}}{dz} \overline{\vec{f}_{0,0}}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}^{ev}(\vec{q}, r) &= \sum_{p \neq 0} \mathcal{G}_{-p,0} \vec{E}_p e^{-i \int_0^z \alpha_p(\vec{q}) dz'} + \mathcal{G}_{p,0} \vec{E}_{-p} e^{i \int_0^z \alpha_p(\vec{q}) dz'} \approx \\ &= -ie^{i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'} \frac{d\vec{q}}{dz} \sum_{p \neq 0} \left[\frac{\overline{\vec{f}_{-p,0}} \vec{E}_p}{[h_0(\vec{q}) - i\alpha_p(\vec{q})]} - \frac{\overline{\vec{f}_{p,0}} \vec{E}_{-p}}{[h_0(\vec{q}) + i\alpha_p(\vec{q})]} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Розділивши (24) на (25), отримаємо відносний вклад зворотної хвилі в порівнянні з резонансною поправкою прямої хвилі

$$\left| \frac{\mathcal{G}_{0,0}}{\mathcal{G}_{-0,0}} \right| \sim \frac{1}{2h_0 L} \approx \frac{1}{2\theta_0 M}, \quad (27)$$

де M – кількість резонаторів-чарунок у секції, θ_0 – зсув фази на періоді. Так, для секції, що складається із більше ніж $M=24$ чарунок з зсувом фази $\theta_0 = 2\pi/3$, модуль *нерезонансної* амплітуди зворот-

ної хвилі становить менше 1% від модуля резонансної поправки (24).

Для зручності, оцінку вкладу поля закритичних коливань ми проведемо для круглого діафрагмового хвилеводу. Розглянемо збудження аксіально-симетричних хвиль [22]. Тоді із (26) можна одержати повздовжню компоненту електричного поля на осі

$$E_z^{ev}(\vec{q}, z) \approx -2e^{i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'} \frac{c}{\omega} \frac{d\vec{q}}{dz} \frac{\partial H_{\varphi,0}^{(0)}(b)}{\partial \vec{q}} \sum_{p \neq 0} \frac{1}{\alpha_p b J_1(b\alpha_p)}. \quad (28)$$

Розділивши модуль останнього на модуль амплітуди (24), одержимо оцінку за порядком величини вкладу поля закритичних коливань відносно поправки до резонансного поля

$$\left| \frac{E_z^{ev}}{\mathcal{G}_{-0,0}} \right| \sim \frac{a}{2L} \frac{1}{\alpha_1 b J_1(b\alpha_1)} \ll 1. \quad (29)$$

Крім того, розділивши (28) на модуль амплітуди нерезонансного поля зворотної хвилі (25), одержимо відношення

$$\left| \frac{E_z^{ev}}{\mathcal{G}_{0,0}} \right| \sim \frac{h_0 a}{\alpha_1 b J_1(b\alpha_1)} < \sqrt{2} \frac{h_0 a}{\alpha_1 \lambda b} \ll 1, \quad (30)$$

яке показує, що вкладом закритичних коливань у приближенні першого порядку малості можна знехтувати.

6. ХАРАКТЕРИСТИКИ ХВИЛЕВОДУ

Нехтуючи вкладом закритичних коливань у (23), представимо поле як:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{q}, \vec{r}) &\approx C_0^{(0)} \left[T_{+0}(z) \vec{E}_0(\vec{q}, \vec{r}) e^{i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'} + R_{+0}(z) \vec{E}_{-0}(\vec{q}, \vec{r}) e^{-i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'} \right], \\ \vec{H}(\vec{q}, \vec{r}) &\approx C_0^{(0)} \left[T_{+0}(z) \vec{H}_0(\vec{q}, \vec{r}) e^{i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'} + R_{+0}(z) \vec{H}_{-0}(\vec{q}, \vec{r}) e^{-i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Тут введені такі величини:

– коефіцієнт проходження прямої хвилі від $z=0$ до поточної координати z

$$T_{+0}(z) = 1 + \ln \sqrt{N_0(\vec{q}_0)/N_0(\vec{q})} + i \operatorname{Im} \mathcal{G}_{-0,0}(z) \quad (32)$$

(можна показати, що

$$\operatorname{Re} \mathcal{G}_{-0,0}(z) = \ln \sqrt{N_0(\vec{q}_0)/N_0(\vec{q})} -$$

локальний коефіцієнт відбиття $R_{+0}(z) = \mathcal{G}_{0,0}(z)$).

Із визначення (20) слідує, що локальний коефіцієнт відбиття має вид:

$$R_{+0}(z) = \quad (33)$$

$$-\int_z^L \frac{e^{i \int_0^z h_0(\vec{q}) dz'}}{N_s(\vec{q})} \sum_k \frac{dq_k}{dz} \int_{S(q)} \left(\vec{E}_{0,\perp} \times \vec{H}_{0,\perp} \frac{\partial}{\partial q_k} \ln Z_0 \right) \vec{e}_z dS,$$

де $Z_0 = E_{0,\perp}/H_{0,\perp}$ – хвильовий імпеданс. Із останнього випливає, що для узгодження неоднорідної структури важливо мати не менше двох розмірів q_1, q_2 , що змінюються так, що можна було б задовольнити умові компенсації відбивання:

$$\sum_k \frac{dq_k}{dz} \int_{S(q)} \vec{E}_{0,\perp} \times \vec{H}_{0,\perp} \frac{\partial}{\partial q_k} \ln Z_0 d\vec{S} = 0. \quad (34)$$

Із визначень (19) і (20) слідує, що коефіцієнт проходження хвилі в приближенні першого порядку (32) дається формулою

$$T_{+0}(z) \approx \sqrt{\frac{N_0(\vec{q}_0)}{N_0(\vec{q})}} e^{i \operatorname{Im} \mathcal{G}_{-0,0}(z)}, \quad (35)$$

яка вірна з квадратичною точністю $(\ln \sqrt{N_0(\vec{q}_0)/N_0(\vec{q})} + |\operatorname{Im} \mathcal{G}_{-0,0}(z)|)^2$, що забезпечує збереження потоку ВЧ-потужності впродовж неоднорідного хвилеводу

$$P = \frac{|C_0^{(0)}|^2 |T_{+0}(z)|^2}{2} \operatorname{Re} \int_{S(\vec{q})} \{ \vec{E}_0(\vec{q}, \vec{r}) \times \vec{H}_0^*(\vec{q}, \vec{r}) \} d\vec{S} \quad (36)$$

$$= |C_0^{(0)}|^2 \frac{N_0(\vec{q}_0)}{4}.$$

Слід зазначити, що поява в коефіцієнті проходження (35) фазового співмножника $\exp[i \operatorname{Im} \mathcal{G}_{-0,0}(z)]$, де

$$\operatorname{Im} \mathcal{G}_{-0,0}(z) = \quad (37)$$

$$\int_0^z \frac{dz}{N_0(\vec{q})} \sum_k \frac{dq_k}{dz} \operatorname{Im} \int_{S(q)} \vec{E}_{0,\perp}^* \times \vec{H}_{0,\perp} \frac{\partial}{\partial q_k} \ln Z_0 d\vec{S},$$

як наслідок неузгодженості хвилеводу, призводить до збурення фазової швидкості прямої хвилі.

ВИСНОВКИ

Методом послідовних наближень у загальному вигляді побудовано асимптотичну теорію збудження хвилеводів з повільно змінними розмірами. Асимптотичний підхід дає можливість знайти з будь-якою заданою точністю поле, що збуджується в основній смузі хвилеводу з повільно змінними розмірами. Показано, що у хвилеводі внаслідок наявності неоднорідності виникають поперечні компоненти еквівалентної щільності магнітного $\vec{J}_{H,\perp}$ та електричного струмів $\vec{J}_{E,\perp}$, які є джерелами вторинних хвиль, починаючи з першого порядку малості. Ці еквівалентні щільності струмів у першому порядку малості являють собою хвилю синхронну з прямою хвилею, що призводить як до резонансної поправки прямої хвилі, так і до появи зворотної хвилі, внаслідок нерезонансної взаємодії еквівалентних струмів зі структурою. Оцінки показали, що вкладом поля закритичних коливань у першому порядку малості можна знехтувати. Крім того, з квадратичною точністю по малому параметру, зберігається потік ВЧ-потужності впродовж неоднорідного хвилеводу.

Автор висловлює подяку О.С. Мазманішвілі, В.Ф. Жиглу та К.В. Ільенку за інтерес до статті і корисні критичні зауваження та поради.

Ця робота частково підтримана Відділенням НАТО «Виникаючих безпекових проблем» у рамках програми «Наука заради миру та безпеки» (грант № G5195).

ДОДАТОК

АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ КОМПЛЕКСНО-ЗНАЧНОЇ ФУНКЦІЇ З ПОВІЛЬНО ЗМІННОЮ АМПЛІТУДОЮ

Хай потрібно знайти інтеграл від комплексно-значної функції виду $G(t)e^{i\varphi(t)}$:

$$I(t) = \int_0^t G(t') e^{i\varphi(t')} dt', \quad (D1)$$

де $G(z)$ – повільно змінна функція, що задовольняє умові

$$G(0) = 0, \quad \left| \frac{1}{G} \frac{d}{dt} \left(\frac{G}{\frac{d\varphi}{dt}} \right) \right| \ll 1. \quad (D2)$$

Проведемо заміну змінних в (D1)

$$I(t) = \int_0^{\varphi(t)} F[t(\varphi')] e^{i\varphi'} d\varphi', \quad (D3)$$

де

$$F[t(\varphi)] \equiv G(t) \left/ \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{t=t(\varphi)}. \quad (D4)$$

Далі візьмемо інтеграл (D4) по частинах

$$I(t) = -F(t) \left[ie^{i\varphi(t)} + \frac{\int_0^{F(t)} e^{i\varphi} dF[t(\varphi)]}{iF(t)} \right]. \quad (D5)$$

Другий доданок у квадратних дужках є не що інше, як середнє значення функції $e^{i\varphi[t(F)]}$ на інтервалі $[0, F(t)]$. Для швидко змінної функції $e^{i\varphi[t(F)]}$ можна одержати хорошу апроксимацію середнього значення, яка не залежить від функції $F(z)$:

$$\frac{\int_0^{F(t)} e^{i\varphi} dF[t(\varphi)]}{F(t)} \approx \frac{e^{i\varphi(t)} - 1}{i\varphi(t)}. \quad (D6)$$

Підставивши останнє в (D5) та враховуючи заміну (D4), знайдемо асимптотичне рішення інтеграла (D1):

$$\int_0^t G(t') e^{i\varphi(t')} dt' \approx -\frac{G(t)}{\frac{d\varphi(t)}{dt}} \left[ie^{i\varphi(t)} + \frac{e^{i\varphi(t)} - 1}{i\varphi(t)} \right]. \quad (D7)$$

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. The Stanford Two-Mile Accelerator, under edition of General Editor, R.B. Neal // W.A. Benjamin, INC., New York, 1968, 1169 p.
2. M.I. Ayzatsky, Yu.I. Akchurin, V.I. Beloglazov, et al. KYT Industrial Technological Accelerator // Proc. XIV Particle Accelerator Workshop. 1994, Protvino, v. 4, p. 259.
3. Н.И. Айзацкий и др. Ускоряющая система технологического ускорителя электронов // ISSN 1562-6016. ВАХТ. 2012, №4(80), p. 24-28.

4. G. Bienvenu, J.C. Bourdon, P. Brunet, et al. Accelerating Structure Developments for the LEP Injector Linac. Proceedings of the 1984 // *Linear Accelerator Conference*. GSI-84-11. 1984, p. 463-465.
5. M.I. Ayzatsky, E.Z. Biller. Development of inhomogeneous disk-loaded accelerating waveguides and rf-coupling // *Proceedings of LINAC 96*, 26-30 August 1996, Geneva, Switzerland, p. 119-121.
6. M. Tigner. Review of linear collider designs and path to the future // *Proceedings of EPAC*. 2002, Paris, France, p. 54-58.
7. G. Guignard, J. Hagel. Closed analytical expression for the electric field profile in a loaded rf structure with arbitrarily varying v_g and R'/Q // *Phys. Rev. STAB*. 2000, v. 3, 042001.
8. Roger M. Jones, Valery A. Dolgashev, Juwen W. Wang. Dispersion and energy compensation in high-gradient linacs for lepton colliders // *Physical Review STAB*. 2009, v. 12, 051001.
9. Nathan Towne, James Rose. Beam loading compensation of traveling wave linacs through the time dependence of the rf drive // *Physical Review STAB* 2011, v. 14, 090402.
10. A. Lunin and V. Yakovlev, A. Grudiev. Analytical solutions for transient and steady state beam loading in arbitrary traveling wave accelerating structures // *Physical Review STAB*. 2011, v. 14, 052001.
11. N.M. Kroll, C.-K. Ng and D.C. Vier. Applications of time domain simulation to coupler design for periodic structures // *XX International Linac Conference*, Monterey, California 2000.
12. Jiaru Shi, Alexej Grudiev, Walter Wuensch. Tuning of X-band traveling-wave accelerating structures // NIM. 2013, A 704, p. 14-18.
13. GONG Cun-Kui, ZHENG Shu-Xin, JIA Xiao-Yu, SHAO Jia-Hang, CHEN Huai-Bi. A tuning method for non-uniform traveling-wave accelerating structures // *Chinese Physics C*. 2013, v. 37, №. 1, 017003.
14. M.I. Ayzatsky. On the Problem of the Coupled Cavity Chain Characteristic Calculations. <http://xxx.lanl.gov/pdf/acc-phys/9603001.pdf>
15. M.I. Ayzatsky. New Mathematical Model of an Infinite Cavity Chain. Proceedings of the EPAC96, 1996, v. 3, p. 2026-2028.
16. M.I. Ayzatsky, V.V. Mytrochenko. Electromagnetic fields in nonuniform disk-loaded waveguides. <http://lanl.arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1503/1503.05006.pdf>, LANL.arXiv.org e-print archives, 2015.
17. M.I. Ayzatsky, V.V. Mytrochenko. Coupled cavity model for disc-loaded waveguides. <http://lanl.arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1511/1511.03093.pdf>, LANL.arXiv.org e-print archives, 2015.
18. M.I. Ayzatsky, V.V. Mytrochenko. Numerical design of nonuniform disk-loaded waveguides. <http://lanl.arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1604/1604.05511.pdf>, LANL.arXiv.org e-print archives, 2016; M.I. Ayzatsky, V.V. Mytrochenko. Numerical investigation of tuning method for nonuniform disk-loaded waveguides. <http://lanl.arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1606/1606.04292.pdf>, LANL.arXiv.org e-print archives, 2016.
19. L.A. Vainshtein, V.A. Solntsev. Lectures on High Frequency Electronics // *Soviet Radio*, Moscow, USSR, 1973.
20. V.V. Mytrochenko, A. Opanasenko. Study of transient self-consistent beam dynamics in RF linacs using a particle tracing code // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*. 2006, A 558, p. 235-239.
21. M.I. Ayzatsky et al. Accelerating section for technological electron linac // *ISSN 1562-6016. PAST*. 2016, №3(103).
22. O.A. Valdner, A.V. Shalnov, A.N. Didenko. *Accelerating waveguides* // M.: "Atomizdat", 1973, 216 p.

Стаття надійшла в редакцію 09.10.2017

ASYMPTOTIC METHOD IN THE EXCITATION THEORY OF WEAKLY INHOMOGENEOUS DISK LOADED WAVEGUIDES

A.N. Opanasenko

The scheme calculating the electromagnetic field in weakly inhomogeneous waveguides is built up by applying the method of successive approximations and the excitation theory of homogeneous waveguides. This makes enable to generalize Vainshtein's excitation theory onto inhomogeneous waveguides to calculate approximate fields.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ДИАФРАГМИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДОВ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ РАЗМЕРАМИ

A.H. Opanasenko

С помощью метода последовательных приближений и теории возбуждения однородных волноводов построена схема нахождения электромагнитного поля в неоднородных диафрагмированных волноводах с медленно-меняющимися размерами.