УДК 539.377

ПРОГИН КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА, РОЗПОДІЛЕНИМИ ПО КРИВІЙ

Б. С. ХАПКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

На основі методу кінцевих інтегральних перетворень з використанням теорії узагальнених функцій запропоновано спосіб розв'язання задачі термопружності для круглої пластини, яка нагрівається джерелами тепла, розподіленими вздовж кривої лінії. Проаналізовано числові результати.

Ключові слова: *температурний момент, джерела тепла, функція Дірака, кінцеве інтегральне перетворення, прогин, згинні моменти.*

Під час виготовлення і експлуатації вузли виробів та елементи конструкцій пластинчатої форми часто піддаються дії концентрованих потоків теплової енергії. Тому необхідно визначити температурні поля і напруження у таких елементах за дії локалізованих джерел тепла, які можуть істотно впливати на деформативність і міцність тонкостінних елементів конструкцій.

Теплові напруження в круглій пружній пластині, які зумовлені джерелами тепла, рівномірно розподіленими на дузі кола чи вздовж радіуса, досліджено раніше [1]. Отримано [2] замкнуті формули, які характеризують розподіл напружень у круглій пластині, лицеві поверхні якої теплоізольовані, і на їх основі встановлено закон зміни напружень на межі пластини під дією джерел тепла, розподілених вздовж координатних ліній. За нагріву джерелом тепла по кільцю теплові напруження розглядали в праці [3]. Розв'язано [4] задачі теплопровідності за дії миттєвих та неперервних точкових джерел тепла, які записані в бесселевих функціях. Треба відзначити, що в цих працях розглядали плосконапружений стан пластин.

У квазістатичній поставі досліджували [5–7] прогини тонких пружних пластин, спричинені нерівномірним температурним полем. Вплив конвективного теплообміну на осесиметричний прогин круглої пластини проаналізовано в праці [8]. Вивчали [9–11] розтяг і згин тонких круглих пластин, які обумовлені нестаціонарним температурним полем. Однак задача про визначення прогину в круглій пластині, яка нагрівається джерелами тепла, довільно розподіленими на кривій лінії або на довільній обмеженій області, досліджена ще недостатньо.

Нижче запропоновано поставу та аналітичний розв'язок квазістатичної крайової задачі термопружності для круглої пластини, що перебуває під дією зосереджених джерел тепла на довільній кривій лінії, з розробкою алгоритму попереднього визначення температурного моменту T_2 [11], який спричиняє прогин та згинні моменти в пластині.

Визначення температурного моменту. Розглянемо тонку круглу пластину радіуса R, товщини $2h$, яка знаходиться під дією джерел тепла, довільно розподілених та зосереджених на кривій лінії $C = \{(\rho, \varphi),\ \rho = f(\varphi),\ 0 \le f'(\varphi) < \infty\}$, що не збігається з координатними лініями ρ, φ (рис. 1). Між боковою ($\rho = R$) і лицевими ($z = \pm h$) поверхнями пластини та довкіллям відбувається теплообмін за законом Ньютона [11]. Відносні коефіцієнти теплообміну з лицевих ($z = \pm h$) однакові $\mu^+ = \mu^-$.

Контактна особа: Б. С. ХАПКО, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Рівняння для визначення нестаціонарного температурного моменту в безрозмірних координатах $rh=\rho,\ \ \tau h^2 = at$, $\varphi=\varphi$ має вигляд

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_2(r,\varphi,\tau)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_2(r,\varphi,\tau)}{\partial\varphi^2}-\kappa T_2(r,\varphi,\tau)-$$
$$-\frac{\partial T_2(r,\varphi,\tau)}{\partial\tau}=-\kappa_1 t_2(r,\varphi,\tau)\Bigg)-\varepsilon W_2(r,\varphi,\tau) \qquad (1)$$

за крайових умов

$T_2(r,\varphi,\tau)<\infty$, якщо $r=0$;

$\dfrac{\partial T_2(r,\varphi,\tau)}{\partial r}+b(T_2(r,\varphi,\tau)-T_c(\varphi,\tau))=0$, якщо $r=l$;

$$T_2(r,\varphi,\tau)=T_2(r,\varphi+2\pi,\tau); \qquad (2)$$

$$T_2(r,\varphi,\tau)=T_0(r,\varphi)\text{ , якщо }\tau=0\,. \qquad (3)$$

Тут узагальнена функція $W_2(r,\varphi,\tau)\in D'(R^2)$ описує довільний розподіл джерел тепла, зосереджених на відрізку кривої $C=\{r,\varphi : r=g(\varphi), 0\le g'(\varphi)<\infty\}$, та має вигляд

$$W_2(r,\varphi,\tau)=\begin{cases}\dfrac{W_0(r,\varphi,\tau)}{r(\varphi_2-\varphi_1)}\delta(r-g(\varphi))[S_-(\varphi-\varphi_1)-S_+(\varphi-\varphi_2)], & \text{якщо } r=g(\varphi),\\ 0, \text{ якщо } r\ne g(\varphi);\end{cases} \qquad (4)$$

$\kappa=3(1+\mu_1)$; $\kappa_1=3\mu_1$; $2\lambda\varepsilon=h$; $2\mu_1=$ $=h(\mu^+ + \mu^-)$; $t_2=(t_c^+ - t_c^-)/2$; $b\lambda=h\mu_l$; $lh=R$; μ_l – коефіцієнт теплообміну з бокової поверхні $r=l$; t – час; λ, a – коефіцієнти тепло- та температуропровідності; t_c^+ , t_c^- – значення температури зовнішнього середовища на лицевих поверхнях $z=\pm h$ відповідно; $S_-(\varphi-\varphi_1)$ і $S_+(\varphi-\varphi_2)$ – асиметричні функції Гевісайда [5]; $\delta(r)$ – функція Дірака; $D'(R^2)$ – простір узагальнених функцій [12, 13]; $t_2(r,\varphi,\tau)=t_{20}+t_{21}(r,\varphi)+t_{22}(r,\varphi,\tau)$; $W_0(r,\varphi,\tau)=W_{00}+W_{01}(r,\varphi)+W_{02}(r,\varphi,\tau)$ – задана функція розподілу густини джерел тепла вздовж кривої C ; $T_c(\varphi,\tau)=T_{c0}+T_{c1}(\varphi)+T_{c2}(\varphi,\tau)$ – задані значення температури довкілля на поверхні $r=l$; $T_0(r,\varphi)$ – невідома функція, яку знаходимо з окремої стаціонарної задачі теплопровідності, сформульованої нижче.

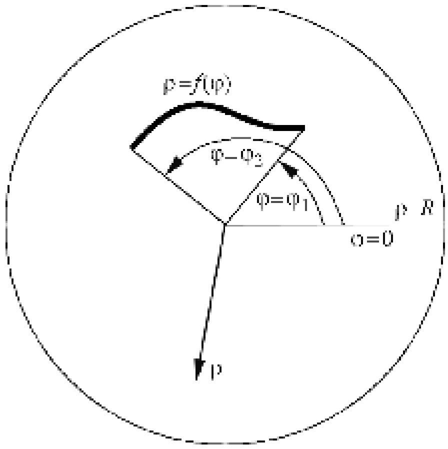

Рис. 1. Схема пластини.

Fig. 1. Scheme of a plate.

Враховуючи подання довільного теплового навантаження $t_2(r,\varphi,\tau)$, $W_0(r,\varphi,\tau)$ і $T_c(\varphi,\tau)$, наведеного вище, розв’язок задачі (1)–(3) шукатимемо у вигляді [14]

$$T_2(r,\varphi,\tau)=T_0(r,\varphi)+\theta(r,\varphi,\tau)\exp(-\kappa\tau)+T_c(\varphi,\tau)\,, \qquad (5)$$

де $\theta(r,\varphi,\tau)$ – невідома функція. Підставляючи подання функції $T_2(r,\varphi,\tau)$ у рівняння (1) і крайові умови (2), (3), одержуємо для визначення стаціонарної її компоненти $T_0(r,\varphi)$ крайову задачу

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_0(r,\varphi)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_0(r,\varphi)}{\partial\varphi^2}-\kappa T_0(r,\varphi)=-\kappa_1\left(t_{20}+t_{20}(r,\varphi)\right)+\kappa\left(T_{c0}+T_{c1}(\varphi)\right)-$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_{c1}(\varphi)}{\partial\varphi^2}-\varepsilon\frac{W_{00}+W_{01}(r,\varphi)}{r(\varphi_2-\varphi_1)}\delta(r-g(\varphi))[S_-(\varphi-\varphi_1)-S_+(\varphi-\varphi_2)]\,; \qquad (6)$$

$$T_0(r,\varphi)<\infty\text{, якщо } r=0\,;$$

$$\frac{\partial T_0(r,\varphi)}{\partial r}+bT_0(r,\varphi)=0\text{, якщо } r=l\,;$$

$$T_0(r,\varphi)=T_0(r,\varphi+2\pi)\,. \qquad (7)$$

Відповідно для знаходження нестаціонарної компоненти $\theta(r,\varphi,\tau)$ в поданні (5) функції $T_2(r,\varphi,\tau)$ одержуємо таку крайову задачу:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta(r,\varphi,\tau)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\theta(r,\varphi,\tau)}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial\theta(r,\varphi,\tau)}{\partial\tau}=\left\{\frac{\partial T_{c2}(r,\varphi,\tau)}{\partial\tau}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T_{c2}(r,\varphi,\tau)}{\partial\varphi^2}-\right.$$

$$-\varepsilon\frac{W_{02}(r,\varphi,\tau)}{r(\varphi_2-\varphi_1)}\delta(r-g(\varphi))[S_-(\varphi-\varphi_1)-S_+(\varphi-\varphi_2)]-\kappa_1 t_{22}(r,\varphi,\tau)+$$

$$\left.+\kappa T_{c2}(\varphi,\tau)\right\}\exp(\kappa\tau)\,; \qquad (8)$$

$$\theta(r,\varphi,\tau)<\infty\text{, якщо } r=0\,;$$

$$\frac{\partial\theta(r,\varphi,\tau)}{\partial r}+b\theta(r,\varphi,\tau)=0\text{, якщо } r=l\,;$$

$$\theta(r,\varphi,\tau)=\theta(r,\varphi+2\pi,\tau)\,;$$

$$\theta(r,\varphi,\tau)=-T_c(\varphi,0)\text{, якщо } \tau=0\,. \qquad (9)$$

Задачі (6)–(9) за координатою φ розв’язуватимемо методом кінцевого інтегрального перетворення [15, 16] з урахуванням періодичності функцій $T_0(r,\varphi)$ та $\theta(r,\varphi,\tau)$ за цією координатою та наперед визначеною функцією ядра перетворення з відповідної задачі Штурма–Ліувілля [16]. Розв’язуючи крайову задачу (6), (7) відносно змінної r з оберненням по координаті φ, одержимо стаціонарну компоненту $T_0(r,\varphi)$ температурного моменту $T_2(r,\varphi,\tau)$ (початковий розподіл температури (3)). У подальшому до задачі (8), (9) застосуємо кінцеве інтегральне перетворення Ганкеля [17] за координатою r і, розв’язавши одержане диференціальне рівняння першого порядку відносно часу τ та виконавши обернені перетворення, знайдемо нестаціонарну компоненту $\theta(r,\varphi,\tau)$ температурного моменту. Підставивши одержані стаціонарну та нестаціонарну компоненти температурного моменту в рівність (5), одержимо розв’язок $T_2(r,\varphi,\tau)$ вихідної крайової задачі (1)–(3):

$$T_2(r,\varphi,\tau)=(1/\pi)\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\left[T_{0,2m}(r)+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\theta}_{2m}(\lambda_{mk},\tau)\left(J_m(\lambda_{mk}r)/c_{mk}\right)\exp(-\kappa\tau)\right]\cos m\varphi+\right.$$

$$\left.+\left[T_{0,2m-1}(r)+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{\theta}_{2m-1}(\lambda_{mk},\tau)\left(J_m(\lambda_{mk}r)/c_{mk}\right)\exp(-\kappa\tau)\right]\sin m\varphi\right\}+T_c(\varphi,\tau)\,. \qquad (10)$$

Тут

$$T_{0,20}=\int_0^{2\pi}\frac{T_0(r,\varphi)}{2}d\varphi\,;\; T_{0,j}(r)=-\frac{b\Phi_j(l)+\partial\Phi_j(r)/\partial r_{|r=l}}{\alpha(I_{m-1}(\alpha l)+I_{m+1}(\alpha l))+bI_m(\alpha l)}I_m(\alpha r)+\Phi_j(r)\,;$$

$$\Phi_j(r)=\int_0^r 2x\,t_j(x)\left[I_m(\alpha x)K_m(\alpha r)-I_m(\alpha r)K_m(\alpha x)\right]dx\,;$$

$$t_j(r)=-\kappa_1(2\pi t_{20}+t_{21,j}(r))-$$

$$-\varepsilon\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{W_{00}+W_{00}(r,\varphi)}{r(\varphi_2-\varphi_1)}\delta\left(r-g(\varphi)\right)\Pi_j\left(m,\varphi\right)d\varphi+\left(m^2/r^2+\kappa\right)T_{c1,j}\,;\; \sigma_{mk}=\lambda_{mk}^2+\kappa\,;$$

$$\bar\theta_j(\lambda_{mk},\tau)=\exp\left(-\lambda_{mk}^2\tau\right)\left[-\bar T_{c,j}(0)-\int_0^\tau\int_0^l t_j^*(r,\xi)rJ_m(\lambda_{mk}r)dr\exp\left(\sigma_{mk}\xi\right)d\xi\Big/c_{mk}\right];$$

$$\left\{T_{0,j}(r);t_{21,j}(r);T_{c1,j}(r)\right\}=\int_0^{2\pi}\left\{T_0(r,\varphi);t_{21}(r,\varphi);T_{c1}(r,\varphi)\right\}\Pi_j\,d\varphi\,;$$

$$t_j^*(r,\tau)=-\kappa_1 t_{22,j}(r,\tau)-$$

$$-\varepsilon\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{W_{02}\left(r,\varphi,\tau\right)}{r\left(\varphi_2-\varphi_1\right)}\delta\left(r-g\left(\varphi\right)\right)\Pi_j d\varphi-\frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 T_{c2}(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^2}\Pi_j d\varphi+\frac{\partial T_{c2,j}(\tau)}{\partial\tau}+\kappa T_{c2,j}(\tau)\,;$$

$$\left\{\theta_j(r,\tau);t_{22,j}(r,\tau);T_{c2,j}(\tau);T_{c,j}(0)\right\}=\int_0^{2\pi}\left\{\theta_j(r,\varphi,\tau),t_{22}(r,\varphi,\tau);T_{c2}(\varphi,\tau);T_c(\varphi,0)\right\}\Pi_j d\varphi\,;$$

$$\left\{\bar\theta_j(\lambda_{mk},\tau),\bar T_{c,j}(0)\right\}=\frac{1}{c_{mk}}\int_0^l\left\{\theta_j(r,\tau),T_{c,j}(0)\right\}rJ_m\left(\lambda_{mk}r\right)dr\,;\quad j=\begin{cases}2m,\\2m-1;\end{cases},\quad c_{mk}=$$

$$=J_m\left(\lambda_{mk}l\right)\sqrt{l^2b^2/\lambda_{mk}^2+l^2-m^2/\lambda_{mk}^2}\Big/\sqrt2\,;\qquad c_{0k}=l\sqrt2 J_0\left(\lambda_{0k}l\right)\sqrt{b^2/\lambda_{0k}^2+1}\,;$$

$\alpha=\sqrt\kappa$; $\Pi_j=\begin{cases}\cos m\varphi, & \text{якщо } j=2m,\\ \sin m\varphi, & \text{якщо } j=2m-1;\end{cases}$ $m=0,1,2,\ldots$; $J_m(\lambda_{mk}r)$ – функція Бесселя першого роду; $I_m(\alpha r)$ і $K_m(\alpha r)$ – модифіковані функції Бесселя; λ_{mk} – додатні корені трансцендентного рівняння $(b+m/l)J_m(\lambda_{mk}l)-\lambda_{mk}J_{m+1}(\lambda_{mk}l)=0$.

Якщо початковий розподіл температури $T_0(r,\varphi)$ та довкілля t_c^+, t_c^-, $T_c(\varphi,\tau)$ нульові, то температурний момент, спричинений джерелами тепла, що рівномірно розподілені зі сталою інтенсивністю $W_0=qS_-(\tau)$ (q = const) та зосереджені на половині дуги кола $r=2R_0\cos\varphi$ $\left(\varphi_1=0,\ \varphi_2=\pi/2\right)$ з центром у точці $M(R_0,0)$ (рис. 2), знайдемо з виразу (10):

$$T_2=\varepsilon q\pi^{-2}S_-(\tau)\sum_{k=1}^{\infty}c_{0k}^{-1}\sigma_{0k}^{-1}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}J_0(\lambda_{0k}2R_0\cos\xi)\times$$

$$\times\sqrt{1+4R_0^2\sin^2\varphi}\,d\xi\,J_0(\lambda_{0k}r)[-1+\exp(-\sigma_{0k}\tau)]+$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}c_{mk}^{-1}\sigma_{mk}^{-1}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}J_m(\lambda_{mk}2R_0\cos\xi)\sqrt{1+4R_0^2\sin^2\varphi}\times$$

$$\times\cos m(\varphi-\xi)\,d\xi[-1+\exp(-\sigma_{mk}\tau)]]\,J_m(\lambda_{mk}r)\,.$$

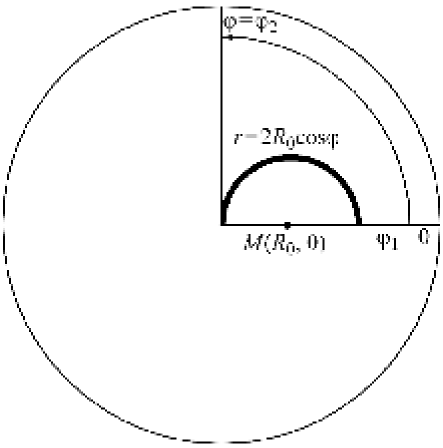

Рис. 2. Схема нагріву пластини джерелами тепла по половині дуги кола $r = 2R_0\cos\varphi$ ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$) з центром у точці $M(R_0, 0)$.

Fig. 2. Scheme to the plate heating by heat sources distributed over the half-circle, $r = 2R_0\cos\varphi$ ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$) with a centre at the point $M(R_0, 0)$.

Прогин пластини, зумовлений температурним моментом (10), знаходимо з рівняння [7, 11]

$$\Delta\Delta w = -\alpha_t h\left(1+\nu\right)\Delta T_2\,, \tag{11}$$

де α_t, ν – коефіцієнти теплового лінійного розширення та Пуассона. Загальний розв'язок рівняння (11) подаємо у вигляді $w = w_0 + w_1$. Тут функція $w_0 = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\left(C_{2m}r^m + C_{3m}r^{m+2}\right)\cos m\varphi + \left(C'_{2m}r^m + C'_{3m}r^{m+2}\right)\sin m\varphi\right]$ задовольняє бігармонічне рівняння $\Delta\Delta w_0 = 0$.

Функція

$$w_1 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_t h(1+\nu)}{\lambda_{mk}^2\pi c_{mk}}\left(\bar\theta_{2m}(\lambda_{mk},\tau)\cos m\varphi + \bar\theta_{2m-1}(\lambda_{mk},\tau)\sin m\varphi\right)\exp(-\kappa\tau)J_m(\lambda_{mk}r)$$

– частковий розв'язок рівняння $\Delta w_1 = -\alpha_t(1+\nu)T_2$ за нульових початкового розподілу температури та температури довкілля.

Відповідно прогин у круглій пластині за наведеного нагріву за формулою (10) знаходимо у вигляді

$$w = \sum_{m=0}^{\infty}\left[\left(C_{2m}r^m + C_{3m}r^{m+2} + \frac{\alpha_t(1+\nu)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar\theta_{2m}(\lambda_{mk},\tau)}{\lambda_{mk}^2 c_{mk}}\exp(-\kappa\tau)J_m(\lambda_{mk}r)\right)\cos m\varphi +\right.$$

$$\left.+\left(C'_{2m}r^m + C'_{3m}r^{m+2} + \frac{\alpha_t(1+\nu)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar\theta_{2m-1}(\lambda_{mk},\tau)}{\lambda_{mk}^2 c_{mk}}\exp(-\kappa\tau)J_m(\lambda_{mk}r)\right)\sin m\varphi\right],$$

де невідомі сталі величини $C_{2m}, C_{3m}, C'_{2m}, C'_{3m}$ визначимо з механічних крайових умов для пластини.

Для жорсткого закріплення краю пластини ($w = dw/dr = 0$, коли $r = 1$) маємо:

$$w = \frac{\alpha_t(1+\nu)}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\bar\theta_{2m}(\lambda_{mk},\tau)}{c_{mk}}\cos m\varphi + \frac{\bar\theta_{2m-1}(\lambda_{mk},\tau)}{c_{mk}}\sin m\varphi\right)\left[\frac{J_m(\lambda_{mk}r)}{\lambda_{mk}^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{J_m(\lambda_{mk})r^m}{\lambda_{mk}^2} + \frac{J_{m+1}(\lambda_{mk})r^{m+2} - J_{m+1}(\lambda_{mk})r^m}{2\lambda_{mk}}\right]\exp(-\kappa\tau)\,.$$

Відповідно для опертого краю ($w=0,\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\dfrac{\nu}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{\nu}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}=-2\alpha_t(1+\nu)T_2$, якщо r = 1) прогин пластини описує функція

$$w=\frac{\alpha_t(1+\nu)}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\overline{\theta}_{2m}(\lambda_{mk},\tau)}{c_{mk}}\cos m\varphi+\frac{\overline{\theta}_{2m-1}(\lambda_{mk},\tau)}{c_{mk}}\sin m\varphi\right)\left[\frac{J_m(\lambda_{mk}r)}{\lambda_{mk}^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{J_m(\lambda_{mk})r^m}{\lambda_{mk}^2}+\frac{(1-\nu)J_{m+1}(\lambda_{mk})(r^m+r^{m+2})}{2\lambda_{mk}(2m+\nu+1)}+\frac{J_m(\lambda_{mk})(r^m-r^{m+2})}{2(2m+\nu+1)}\right]\exp(-\kappa\tau)\,.$$

Числовий приклад. Розглянемо круглу пластину, що перебуває під дією миттєвого джерела тепла інтенсивності q, зосередженого на відрізку дуги $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$ радіуса r = r_1, яке одержимо, поклавши в формулі (4) $W_0=q\delta_-(\tau)$, $g(\varphi)$ = r_1. На контурі пластини r =1 відбувається конвективний теплообмін з довкіллям нульової температури. Початковий розподіл температури нульовий. Пластина вільно оперта і вільна від зовнішнього силового навантаження. Температурний момент $T_2(r,\varphi,\tau)$ у ній описує, згідно з поданням (10), формула

$$T_2=\varepsilon q\pi^{-1}S_-(\tau)\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\lambda_{0k}^2 J_0(\lambda_{0k}r_1)J_0(\lambda_{0k}r)\exp(-\sigma_{0k}\tau)[\lambda_{0k}^2+b^2]^{-1}J_0^{-2}(\lambda_{0k})+$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\{\sin[m(\varphi-\varphi_1)]-\sin[m(\varphi-\varphi_2)]\}\frac{2\lambda_{mk}^2 J_m(\lambda_{mk}r_1)\,J_m(\lambda_{mk}r)\exp(-\sigma_{mk}\tau)}{m(\varphi_2-\varphi_1)[\lambda_{mk}^2+b^2-m^2]J_m^2(\lambda_{mk})}\right\},$$

а для прогину

$$w=\frac{\varepsilon q\alpha_t h(1+\nu)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{J_0(\lambda_{0k}r_1)S_-(\tau)\exp(-\sigma_{0k}\tau)}{[\lambda_{0k}^2+b^2]J_0^2(\lambda_{0k})}\left[J_0(\lambda_{0k}r)+\frac{\lambda_{0k}^2 J_0(\lambda_{0k})}{2(1+\nu)}(1-r^2)-\right.\right.$$

$$\left.-J_0(\lambda_{0k})+\frac{(1-\nu)}{2(1+\nu)}\lambda_{0k}J_1(\lambda_{0k})(r^2+1)\right]+\sum_{m=1}^{\infty}\Big[2J_m(\lambda_{mk}r)-2J_m(\lambda_{mk}l)r^m+$$

$$\left.+\frac{(1-\nu)\lambda_{mk}J_{m+1}(\lambda_{mk})}{2m+1+\nu}(r^{m+2}+r^m)+\frac{\lambda_{mk}^2 J_m(\lambda_{mk})}{2m+1+\nu}(r^m-r^{m+2})\right]\{\sin[m(\varphi-\varphi_1)]-$$

$$\left.-\sin[m(\varphi-\varphi_2)]\}\frac{J_m(\lambda_{mk}r_1)S_-(\tau)\exp(-\sigma_{mk}\tau)}{m(\varphi_2-\varphi_1)\,[\lambda_{mk}^2+b^2-m^2]J_m^2(\lambda_{mk})}\right\}.$$

Відповідно моменти згину круглої пластини набувають вигляду, як у праці [11]. Числові розрахунки (рис. 3–6) виконували за таких загальних значень параметрів: r_1 = 0,5; μ_1 = 0,5; b = 1. Розподіл нормованого температурного моменту $\tilde{T}_2=T_2/\varepsilon q$ для різних довжин дуги нагріву (φ_0 = φ_2 – φ_1 = 195° – 165° = 30°, φ_0 = = 270° – 90° = 180°, φ_0 = 330° – 30° = 300°) за однакової тепловіддачі з поверхонь пластини (μ^+ = μ^-) для часу τ = 0,1 ілюструє рис. 3. Розрахунки на рис. 4–6 здійснювали за дуги нагріву $\varphi_0=270°-90°=180°$. На рис. 4 зображено розподіл температурного моменту $\tilde{T}_2$, прогину $\tilde{w}=w/\alpha_t\varepsilon q$, моментів $\tilde{M}_r=M_r/D_2$ і $\tilde{M}_\varphi=M_\varphi/D_2$ вздовж діаметра пластини для часу τ = 0,1. На рис. 5 – прогин вздовж радіуса пластини в різні моменти часу, а на рис. 6 побудовано графіки поведінки температурного моменту $\tilde{T}_2$, прогину $\tilde{w}$ та згинних моментів $\tilde{M}_r$ і $\tilde{M}_\varphi$ залежно від часу.

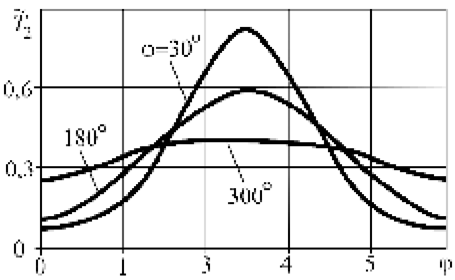

Рис. 3. Fig. 3.

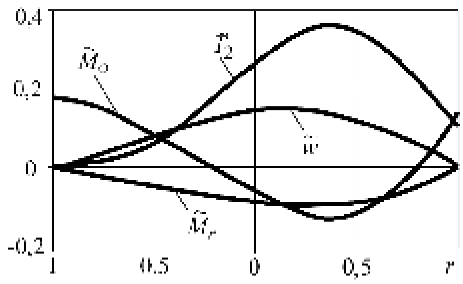

Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 3. Розподіл нормованого температурного моменту $\tilde{T}_2$ для таких довжин лінії нагріву: φ_0 = 195° – 165° = 30°; 270° – 90° = 180°; 330° – 30° = 300°, якщо r_1 = 0,5; b = 1; μ_1 = 0,5; τ = 0,1.

Fig. 3. Normalized temperature moment, $\tilde{T}_2$, distribution for such lengths of heating lines φ_0 = 195° – 165° = 30°; 270° – 90° = 180°; 330° – 30° = 300°, when r_1 = 0.5; b = 1; μ_1 = 0.5; τ = 0.1.

Рис. 4. Розподіл нормованих температурного моменту $\tilde{T}_2$, моментів $\tilde{M}_r$ і $\tilde{M}_\varphi$ та прогину $\tilde{w}$ вздовж діаметра φ = 0° за μ_1 = 0,5; b = 1; τ = 0,1; r_1 = 0,5; φ_0 = 270° – 90° = 180°.

Fig. 4. Distributions of normalized temperature moment, $\tilde{T}_2$, stress couples, $\tilde{M}_r$, $\tilde{M}_\varphi$, and deflection, $\tilde{w}$, along diameter φ = 0° when μ_1 = 0.5; b = 1; τ = 0.1; r_1 = 0.5; φ_0 = 270° – 90° = 180°.

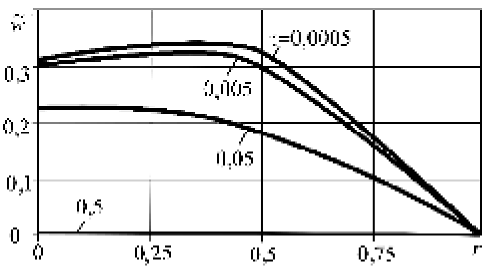

Рис. 5. Fig. 5.

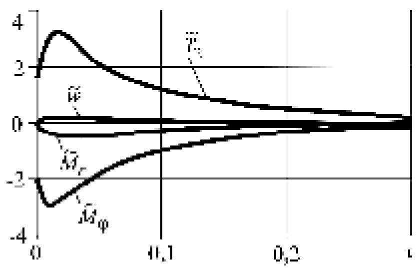

Рис. 6. Fig. 6.

Рис. 5. Розподіл нормованого прогину $\tilde{w}$ по радіусу r за часом τ = 0,5; 0,05; 0,005; 0,0005, якщо μ_1 = 0,5; φ_0 = 270° – 90° = 180°; r_1 = 0,5; b = 1.

Fig. 5. Normalized deflection, $\tilde{w}$, distribution along radius, r, with respect to time τ = 0.5; 0.05; 0.005; 0.0005, when μ_1 = 0.5; φ_0 = 270° – 90° = 180°; r_1 = 0.5; b = 1.

Рис. 6. Розподіл нормованих моментів $\tilde{M}_r$, $\tilde{M}_\varphi$, температурного $\tilde{T}_2$ та прогину $\tilde{w}$ за часом τ у точці r = 0,1; φ = 0°, якщо μ_1 = 0,5; b = 1; r_1 = 0,5; φ_0 = 270° – 90° = 180°.

Fig. 6. Distribution of normalized temperature moment, $\tilde{T}_2$, stress couples $\tilde{M}_r$, $\tilde{M}_\varphi$ and deflection, $\tilde{w}$, with respect to time, τ, at the point r = 0.1; φ = 0°, when μ_1 = 0.5; b = 1; r_1 = 0.5; φ_0 = 270° – 90° = 180°.

ВИСНОВКИ

Досліджено прогин і згинні моменти круглої пластини, зумовлені дією зосереджених джерел тепла на довільній кривій лінії. Для цього розроблено алгоритм знаходження температурного моменту з урахуванням наперед визначеного його початкового розподілу. Показано, що значення температурного моменту зменшується зі збільшенням відрізка дуги нагріву, що обумовлено сталою кількістю тепла, яку виділяє миттєве джерело, а максимальне значення прогину вздовж радіуса з часом зміщується до центра пластини внаслідок її прогріву. За миттєвого джерела тепла прогин і згинні моменти досягають спочатку максимальних значень та заникають з часом.

РЕЗЮМЕ. На основании метода конечных интегральных преобразований с использованием теории обобщенных функций предложен способ решения задачи термоупругости для круглой пластины, которая нагревается источниками тепла, распределенными по кривой линии. Дан анализ численных результатов.

SUMMARY. The approach, based on the method of finite integral transforms and generalized functions technique, is proposed for solution of thermoelastic problems for circular plates with heat sources distributed along curve line. The analysis of numerical results is given.

1. *Takeuti B. Y.* Thermal Stresses in Circular Disc due to Instantaneous Line Heat Source // ZAMM. – 1965. – № 4. – С. 177–184.
2. *Уздалев А. И., Брюханова Е. Н.* Распределение напряжений в круглой пластинке, нагреваемой источниками тепла // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1977. – Вып. 6. – С. 86–89.
3. *Семерак Ф. В., Глек Р. Р.* Термонапряженное состояние круглой пластинки, нагреваемой кольцевым источником тепла // Там же. – 1990. – Вып. 31. – С. 58–60.
4. *Коренев Б. Г.* Задачи теории теплопроводности и термоупругости. – М.: Наука, 1980. – 400 с.
5. *Коляно Ю. М., Кулик А. Н.* Температурные напряжения от объемных источников. – К.: Наук. думка, 1983. – 288 с.
6. *Заболотный В. П., Хапко Б. С.* Тепловые напряжения в изгибаемой пластинке, обусловленные источниками тепла в форме линий // Мат. методы в термомеханике. – К.: Наук. думка, 1978. – С. 182–189.
7. *Хапко Б. С.* Решение задачи теплопроводности для круглой пластинки с источниками тепла // Материалы 11-й конф. молодых ученых Ин-та прикл. проблем механики и математики АН УССР. – Львов, 1985. – Ч. 2. – С. 84–87. – Деп. в ВИНИТИ 17.02.87, № 1089-В87.
8. *Khobragade N. L. and Deshmukh K. C.* Thermoelastic problem of a thin circular plate subject to a distributed heat supply // J. Thermal Stresses. – 2005. – **28**, № 2. – P. 171–184.
9. *Boley B. A. and Weiner J. H.* Theory of Thermal Stresses. – New York: Wiley, 1960. – 585 p.
10. *Коваленко А. Д.* Основи термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 304 с.
11. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – К.: Наук. думка, 1978. – 344 с.
12. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
13. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 518 с.
14. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
15. *Кошляков Н. С., Глинер Є. Б., Смирнов М. М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Высш. шк., 1970. – 710 с.
16. *Хапко Б. С.* Про розв'язок крайової задачі для диференціальних рівнянь з частинних похідних з імпульсними коефіцієнтами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 3. – С. 47–55.
17. *Галицин А. С., Жуковський А. Н.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – К.: Наук. думка, 1976. – 282 с.

Одержано 27.03.2009