

УДК 539.3

## ПРОСТОРОВА ДЕФОРМАЦІЯ БАГАТОШАРОВОЇ ПЛИТИ З ПРУЖНИМИ ЗВ'ЯЗКАМИ МІЖ ШАРАМИ

Н. М. АНТОНЕНКО

*Запорізький національний технічний університет*

Запропоновано спосіб розв'язання задачі про визначення напружено-деформованого стану багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами за умов просторової деформації. Розв'язок задачі базується на методі функцій податливості з використанням двовимірного інтегрального перетворення Фур'є. Побудовано рекурентні формули для розрахунку матриць податливості. Для двошарової плити, яка знаходиться під дією нормальних зосереджених навантажень, проаналізовано вплив коефіцієнтів пружних зв'язків на розподіл напружень та переміщень в її шарах.

**Ключові слова:** багатошарова плита, пружні зв'язки, матриці податливості, інтегральне перетворення Фур'є, напруження.

Через широке застосування шаруватих плит у техніці та будівництві зростає інтерес до побудови точних розв'язків задачі про визначення їх напружено-деформованого стану (НДС). Адекватна модель пружних шаруватих конструкцій може бути побудована на базі тривимірних рівнянь теорії пружності. Тому доцільно використовувати отримані на її основі розв'язки як еталонні, з якими можна порівнювати розв'язки, побудовані за допомогою числових методів та на базі інженерних підходів, які використовують спрощувальні гіпотези.

На основі моделі, яка враховує пружний проміжний прошарок між шарами [1], запропоновано спосіб визначення НДС багатошарових плит з пружними зв'язками між шарами. З фізичної точки зору пружними зв'язками можна моделювати пружний проміжний прошарок між шарами, який утворюється, наприклад, під час склеювання елементів шаруватих конструкцій. Вважатимемо, що між двома сусідніми шарами існують дотичні (нормальні) пружні зв'язки, якщо різниці горизонтальних (вертикальних) переміщень точок верхньої межі нижнього шару та відповідних точок нижньої межі верхнього шару пропорційні дотичним (нормальним) напруженням на поверхнях меж. Запропонований спосіб є узагальненням методу функцій податливості на випадок просторової деформації багатошарових плит з пружними зв'язками між шарами. Раніше цей метод ефективно застосовувався для визначення НДС шаруватих плит та основ з повним та гладким типами контактів між шарами [2–5]. У [6, 7] його розповсюджено на багатошарові основи (пакет пружних шарів, зчеплений з півпростором) з пружними зв'язками між шарами. Асимптотичними методами деформацію шаруватих тіл з пружними зв'язками між шарами дослідили раніше [8, 9].

**Формулювання задачі.** Розглянемо багатошарову плиту, яка складається зі скінченної кількості  $n$  невагомих однорідних ізотропних пружних шарів. Між сусідніми шарами діють пружні зв'язки. Кожен шар характеризуємо товщиною  $h_k$ , модулем зсуву  $\mu_k$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu_k$ . Плита знаходиться в рівновазі

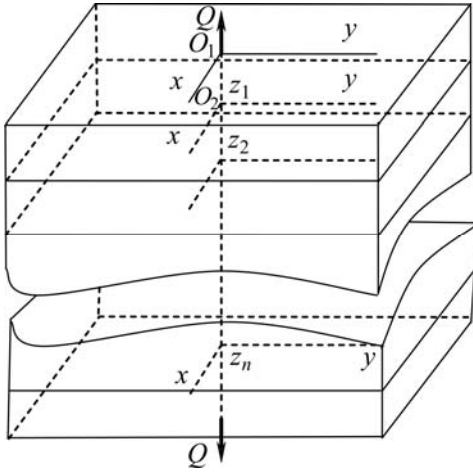


Рис. 1. Багатошарова плита.

Fig. 1. Multilayer plate.

під дією навантажень, прикладених до її верхньої та нижньої межі. Необхідно визначити переміщення та напруження в шарах плити.

Пронумеруємо шари зверху донизу, починаючи з одиниці. Усі величини, які відносяться до  $k$ -го шару, позначатимемо нижнім індексом  $k$ . У кожному шарі введемо локальні декартові системи координат  $O_k x y z_k$  з початком на верхній межі шару так, щоб усі осі  $O_k z_k$  лежали на одній прямій та були напрямлені вглиб шару (рис. 1).

Математично задачу зведемо до розв'язання рівнянь Ламе для кожного з шарів плити:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + (1 - \omega_k) \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2} + (1 - \omega_k) \frac{\partial^2 u_k}{\partial z_k^2} + \omega_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial x \partial y} + \omega_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial z_k} = 0, \\ \frac{\partial^2 v_k}{\partial y^2} + (1 - \omega_k) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} + (1 - \omega_k) \frac{\partial^2 v_k}{\partial z_k^2} + \omega_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y} + \omega_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial y \partial z_k} = 0, \\ \frac{\partial^2 w_k}{\partial z_k^2} + (1 - \omega_k) \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + (1 - \omega_k) \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} + \omega_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial z_k} + \omega_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial y \partial z_k} = 0, \end{cases}$$

де  $\omega_k = \frac{1}{2(1 - \nu_k)}$ ,  $\nu_k$  – коефіцієнт Пуассона  $k$ -го шару,  $k = \overline{1, n}$ .

Умови спряження шарів з номерами  $k$  та  $k+1$  такі:

$$\begin{aligned} u_{k+1}(x, y, 0) &= u_k(x, y, h_k) + m_k \tau_{xz, k}(x, y, h_k), \quad \tau_{xz, k+1}(x, y, 0) = \tau_{xz, k}(x, y, h_k), \\ v_{k+1}(x, y, 0) &= v_k(x, y, h_k) + m_k \tau_{yz, k}(x, y, h_k), \quad \tau_{yz, k+1}(x, y, 0) = \tau_{yz, k}(x, y, h_k), \\ w_{k+1}(x, y, 0) &= w_k(x, y, h_k) + r_k \sigma_{z, k}(x, y, h_k), \quad \sigma_{z, k+1}(x, y, 0) = \sigma_{z, k}(x, y, h_k), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $m_k \geq 0$ ,  $r_k \geq 0$  – коефіцієнти дотичних та нормальних пружних зв'язків, відповідно.

Зауважимо, що при  $m_k = r_k = 0$  зі співвідношень (1) отримуємо умови спряження для жорсткого контакту, а при  $m_k \rightarrow \infty$ ,  $r_k = 0$  – для гладкого контакту між  $k$ -им і  $k+1$ -им шарами плити.

Крайові умови такі:

$$\sigma_{z, 1}(x, y, 0) = f(x, y), \quad \tau_{xz, 1}(x, y, 0) = g(x, y), \quad \tau_{yz, 1}(x, y, 0) = q(x, y), \quad (2)$$

$$\sigma_{z, n}(x, y, h_n) = \tilde{f}(x, y), \quad \tau_{xz, n}(x, y, h_n) = \tilde{g}(x, y), \quad \tau_{yz, n}(x, y, h_n) = \tilde{q}(x, y), \quad (3)$$

де  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$ ,  $q(x, y)$ ,  $\tilde{f}(x, y)$ ,  $\tilde{g}(x, y)$ ,  $\tilde{q}(x, y)$  – задані функції, обрані так, щоб плита знаходилась у рівновазі.

Вважатимемо, що напруження та переміщення у внутрішніх точках шарів плити задовольняють умови існування подвійного інтегрального перетворення Фур'є за змінними  $x$  і  $y$ :

$$\bar{\varphi}(\xi, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) e^{i(\xi x + \zeta y)} dx dy, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}(\xi, \zeta) e^{-i(\xi x + \zeta y)} d\xi d\zeta. \quad (4)$$

**Метод розв'язання.** У просторі трансформант напруження та переміщення в точках  $k$ -го шару можна подати у вигляді лінійної комбінації допоміжних функцій  $\alpha_k(\xi, \zeta)$ ,  $\beta_k(\xi, \zeta)$ ,  $\gamma_k(\xi, \zeta)$ ,  $\delta_k(\xi, \zeta)$ ,  $\tilde{\gamma}_k(\xi, \zeta)$ ,  $\tilde{\delta}_k(\xi, \zeta)$  [7]:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \bar{\sigma}_{z,k}(\xi, \zeta, 0), \quad \beta_k = \mu_k W_k(\xi, \zeta, 0), \quad \tilde{\delta}_k = -\frac{1}{p} \tilde{\tau}_k(\xi, \zeta, 0), \\ \tilde{\gamma}_k &= \mu_k T_k(\xi, \zeta, 0), \quad \gamma_k = \mu_k S_k(\xi, \zeta, 0), \quad \delta_k = -\frac{1}{p} \tau_k(\xi, \zeta, 0), \end{aligned} \quad (5)$$

де  $p^2 = \xi^2 + \zeta^2$ ,  $W_k(\xi, \zeta, z) = p\bar{w}_k$ ,  $S_k(\xi, \zeta, z) = -i\xi\bar{u}_k - i\zeta\bar{v}_k$ ,

$$T_k(\xi, \zeta, z) = -i\zeta\bar{u}_k + i\xi\bar{v}_k, \quad \tau_k(\xi, \zeta, z) = -\frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{xz,k} - \frac{i\zeta}{p} \bar{\tau}_{yz,k},$$

$$\tilde{\tau}_k(\xi, \zeta, z) = -\frac{i\zeta}{p} \bar{\tau}_{xz,k} + \frac{i\xi}{p} \bar{\tau}_{yz,k}.$$

Задачу зведемо до знаходження цих шести допоміжних функцій для кожного з шарів плити. Побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують допоміжні функції сусідніх шарів. Застосуємо до умов спряження шарів (1) пряме інтегральне перетворення Фур'є та запишемо їх у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{z,k+1}(\xi, \zeta, 0) &= \bar{\sigma}_{z,k}(\xi, \zeta, h_k), \\ \mu_{k+1} W_{k+1}(\xi, \zeta, 0) &= \mu_{k+1} W_k(\xi, \zeta, h_k) + r_k p \mu_{k+1} \bar{\sigma}_{z,k}(\xi, \zeta, h_k), \\ \mu_{k+1} S_{k+1}(\xi, \zeta, 0) &= \mu_{k+1} S_k(\xi, \zeta, h_k) + m_k p \mu_{k+1} \tau_k(\xi, \zeta, h_k), \\ \mu_{k+1} T_{k+1}(\xi, \zeta, 0) &= \mu_{k+1} T_k(\xi, \zeta, h_k) + m_k p \mu_{k+1} \tilde{\tau}_k(\xi, \zeta, h_k), \\ \tau_{k+1}(\xi, \zeta, 0) &= \tau_k(\xi, \zeta, h_k), \\ \tilde{\tau}_{k+1}(\xi, \zeta, 0) &= \tilde{\tau}_k(\xi, \zeta, h_k). \end{aligned}$$

Застосуємо формули (5) до лівих частин останніх співвідношень та подамо їх праві частини у вигляді лінійних комбінацій допоміжних функцій [7]. Отримані залежності запишемо у матричному вигляді

$$\bar{\alpha}_{k+1} = M_{11k} \bar{\alpha}_k + M_{12k} \bar{\beta}_k, \quad (6)$$

$$\bar{\beta}_{k+1} = (M_{21k} + NM_{11k}) \bar{\alpha}_k + (M_{22k} + NM_{12k}) \bar{\beta}_k, \quad (7)$$

де 
$$N = \begin{pmatrix} r_k p \mu_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & m_k p \mu_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & m_k p \mu_{k+1} \end{pmatrix},$$

$$M_{11k} = \begin{pmatrix} C_k - \omega_k p_k S_k & -(1 - \omega_k) S_k - \omega_k p_k C_k & 0 \\ -(1 - \omega_k) S_k + \omega_k p_k C_k & C_k + \omega_k p_k S_k & 0 \\ 0 & 0 & C_k \end{pmatrix},$$

$$M_{12k} = \begin{pmatrix} 2\omega_k (S_k - p_k C_k) & -2\omega_k p_k S_k & 0 \\ 2\omega_k p_k S_k & 2\omega_k (S_k + p_k C_k) & 0 \\ 0 & 0 & S_k \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$M_{21k} = \frac{1}{2\Delta_k} \begin{pmatrix} (2 - \omega_k)S_k - \omega_k p_k C_k & -\omega_k p_k S_k & 0 \\ \omega_k p_k S_k & (2 - \omega_k)S_k + \omega_k p_k C_k & 0 \\ 0 & 0 & 2S_k \end{pmatrix},$$

$$M_{22k} = \frac{1}{\Delta_k} \begin{pmatrix} -\omega_k p_k S_k + C_k & (1 - \omega_k)S_k - \omega_k p_k C_k & 0 \\ (1 - \omega_k)S_k + \omega_k p_k C_k & \omega_k p_k S_k + C_k & 0 \\ 0 & 0 & C_k \end{pmatrix},$$

$$\Delta_k = \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}, \quad S_k = \text{sh } p_k, \quad C_k = \text{ch } p_k, \quad p_k = ph_k, \quad \bar{\alpha}_k = (\alpha_k, \delta_k, \tilde{\delta}_k)^T, \quad \bar{\beta}_k = (\beta_k, \gamma_k, \tilde{\gamma}_k)^T.$$

Розглянемо фіктивний шар з номером  $n+1$ . Вважатимемо, що контакт між  $n$ -им та  $n+1$ -им шарами повний. Запишемо умови на межі  $n$ -го та  $n+1$ -го шарів:

$$\sigma_{z,n+1}(x, y, 0) = \sigma_{z,n}(x, y, h_n), \quad \tau_{xz,n+1}(x, y, 0) = \tau_{xz,n}(x, y, h_n),$$

$$\tau_{yz,n+1}(x, y, 0) = \tau_{yz,n}(x, y, h_n).$$

Виразимо вектор  $\bar{\alpha}_{n+1}$  через вектори  $\bar{\alpha}_n$  та  $\bar{\beta}_n$ , потім через вектори  $\bar{\alpha}_{n-1}$  та  $\bar{\beta}_{n-1}$  і так далі до  $\bar{\alpha}_1$  та  $\bar{\beta}_1$ :

$$\bar{\alpha}_{n+1} = M_{11n}\bar{\alpha}_n + M_{12n}\bar{\beta}_n = [M_{11n}M_{11n-1} + M_{12n}(M_{21n-1} + N M_{11n-1})]\bar{\alpha}_{n-1} + [M_{11n}M_{12n-1} + M_{12n}(M_{22n-1} + N M_{12n-1})]\bar{\beta}_{n-1} = \dots$$

Із вищенаведеного випливає, що вектор  $\bar{\alpha}_{n+1}$  є лінійною комбінацією векторів  $\bar{\alpha}_k$  та  $\bar{\beta}_k$ , а отже, вектор  $\bar{\beta}_k$  можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів  $\bar{\alpha}_k$  та  $\bar{\alpha}_{n+1}$ :

$$\bar{\beta}_k = A_k \bar{\alpha}_k + B_k \bar{\alpha}_{n+1}, \quad (9)$$

де  $A_k$  та  $B_k$  – матриці податливості багатошарової плити [4].

Побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують матриці податливості сусідніх шарів плити. Із формул (6), (9) при  $k = n$  отримуємо:

$$\bar{\beta}_n = A_n \bar{\alpha}_n + B_n \bar{\alpha}_{n+1}, \quad \bar{\beta}_n = -M_{12n}^{-1} M_{11n} \bar{\alpha}_n + M_{12n}^{-1} \bar{\alpha}_{n+1},$$

де

$$A_n = -M_{12n}^{-1} M_{11n}, \quad B_n = M_{12n}^{-1}. \quad (10)$$

Зі співвідношень (7) та (9) одержуємо:

$$\bar{\beta}_{k+1} = (M_{21k} + N M_{11k})\bar{\alpha}_k + (M_{22k} + N M_{12k})(A_k \bar{\alpha}_k + B_k \bar{\alpha}_{n+1}) = (M_{21k} + N M_{11k} + (M_{22k} + N M_{12k})A_k)\bar{\alpha}_k + (M_{22k} + N M_{12k})B_k \bar{\alpha}_{n+1}. \quad (11)$$

З іншого боку, зі співвідношення (9) одержуємо:

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_{k+1} &= A_{k+1}(M_{11k}\bar{\alpha}_k + M_{12k}\bar{\beta}_k) + B_{k+1}\bar{\alpha}_{n+1} = \\ &= A_{k+1}(M_{11k}\bar{\alpha}_k + M_{12k}(A_k \bar{\alpha}_k + B_k \bar{\alpha}_{n+1})) + B_{k+1}\bar{\alpha}_{n+1} = \\ &= A_{k+1}(M_{11k} + M_{12k}A_k)\bar{\alpha}_k + (A_{k+1}M_{12k}B_k + B_{k+1})\bar{\alpha}_{n+1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Порівнявши вирази (11) та (12), отримуємо рекурентні співвідношення для обчислення матриць податливості:

$$A_k = (M_{22k} + NM_{12k} - A_{k+1}M_{12k})^{-1} (A_{k+1}M_{11k} - M_{21k} - NM_{11k}), \quad (13)$$

$$B_k = (M_{22k} + NM_{12k} - A_{k+1}M_{12k})^{-1} B_{k+1}, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (14)$$

Якщо у формулах (13) та (14) коефіцієнти пружних зв'язків  $m_k$ ,  $r_k$  покласти рівними нулю, то отримуємо відомі формули [4] для багатошарових плит з жорстко зчепленими шарами. Якщо матриця  $B_n$  нульова, то рекурентні співвідношення збігаються із виразами, побудованими раніше [7] для багатошарових основ з пружними зв'язками між шарами. Таким чином, одержані результати можна вважати узагальненням праць [4, 7].

Із крайових умов знаходимо компоненти векторів  $\bar{\alpha}_1$  та  $\bar{\alpha}_{n+1}$ . Щоб визначити компоненти НДС у  $k$ -му шарі плити, знайдені за формулами (6) та (9), допоміжні функції підставляємо у вирази для трансформант напружень і переміщень та застосовуємо до них обернене перетворення Фур'є.

**Результати числових досліджень.** Числові розрахунки нормальних напружень та вертикальних переміщень на стиках шарів здійснено для двошарової плити з такими характеристиками:  $\mu_2/\mu_1 = 2$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ,  $h_2/h_1 = 1$ . До обох поверхонь плити прикладені нормальні зосереджені сили (див. рис. 1).

Крайові умови (2) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_{z,1}(x, y, 0) &= Q\delta(x, y), \quad \tau_{xz,1}(x, y, 0) = 0, \quad \tau_{yz,1}(x, y, 0) = 0, \\ \sigma_{z,2}(x, y, h_2) &= Q\delta(x, y), \quad \tau_{xz,2}(x, y, h_2) = 0, \quad \tau_{yz,2}(x, y, h_2) = 0, \end{aligned}$$

де  $\delta(x, y)$  – двовимірна функція Дірака.

Для заданого навантаження задача має вісь симетрії  $O_1z_1$ , тому НДС плити залежить лише від радіальної координати  $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$ .

Для розрахунків уведено безрозмірні величини  $\tilde{x} = x/h_1$ ,  $\tilde{y} = y/h_1$ ,  $\tilde{z} = z/h_1$ ,  $\tilde{\rho} = \rho/h_1$ ,  $\tilde{\sigma}_{z,k}(\tilde{\rho}, \tilde{z}) = h_1^2 \sigma_{z,k}(\rho, z)/Q$ ,  $\tilde{w}_k(\tilde{\rho}, \tilde{z}) = w_k(\rho, z)/h_1$ ,  $\tilde{m}_1 = m_1 Q/h_1^3$ ,  $\tilde{r}_1 = r_1 Q/h_1^3$ .

Зображено графіки нормальних напружень  $\tilde{\sigma}_{z,1}(\tilde{\rho}, 1)$  (рис. 2a) і вертикальних переміщень  $\tilde{w}_1(\tilde{\rho}, 1)$  (рис. 2b) та  $\tilde{w}_2(\tilde{\rho}, 0)$  (рис. 2c) точок двошарової плити, які ілюструють вплив пружних зв'язків на їх розподіл. Криві відповідають коефіцієнтам пружних зв'язків, які наведено в таблиці.

Однчасне пропорційне збільшення коефіцієнтів пружних зв'язків призводить до зменшення нормальних напружень  $\tilde{\sigma}_{z,1}(\tilde{\rho}, 1)$  (рис. 2a, криві 1–5) на нижній межі верхнього шару. Для цього типу навантаження плити вплив дотичних пружних зв'язків на розподіл нормальних напружень та вертикальних переміщень менш суттєвий (криві 10–13), ніж нормальних пружних зв'язків (криві 6–9). Порівняно зі жорстким контактом дотичні пружні зв'язки між шарами плити за відсутності нормальних пружних зв'язків для розглянутих випадків призводять до збільшення максимальних нормальних напружень не більше, ніж на 1,3%. Для максимальних вертикальних переміщень точок нижньої межі верхнього та верхньої межі нижнього шарів спостерігаємо їх зменшення не більше, ніж на 30%, порівняно з жорстким контактом.

Отримані механічні ефекти узгоджуються з одержаними за плоскої деформації двошарової плити з пружними зв'язками між шарами, яка знаходиться під дією нормальних навантажень [10], та не суперечать результатам праці [7].

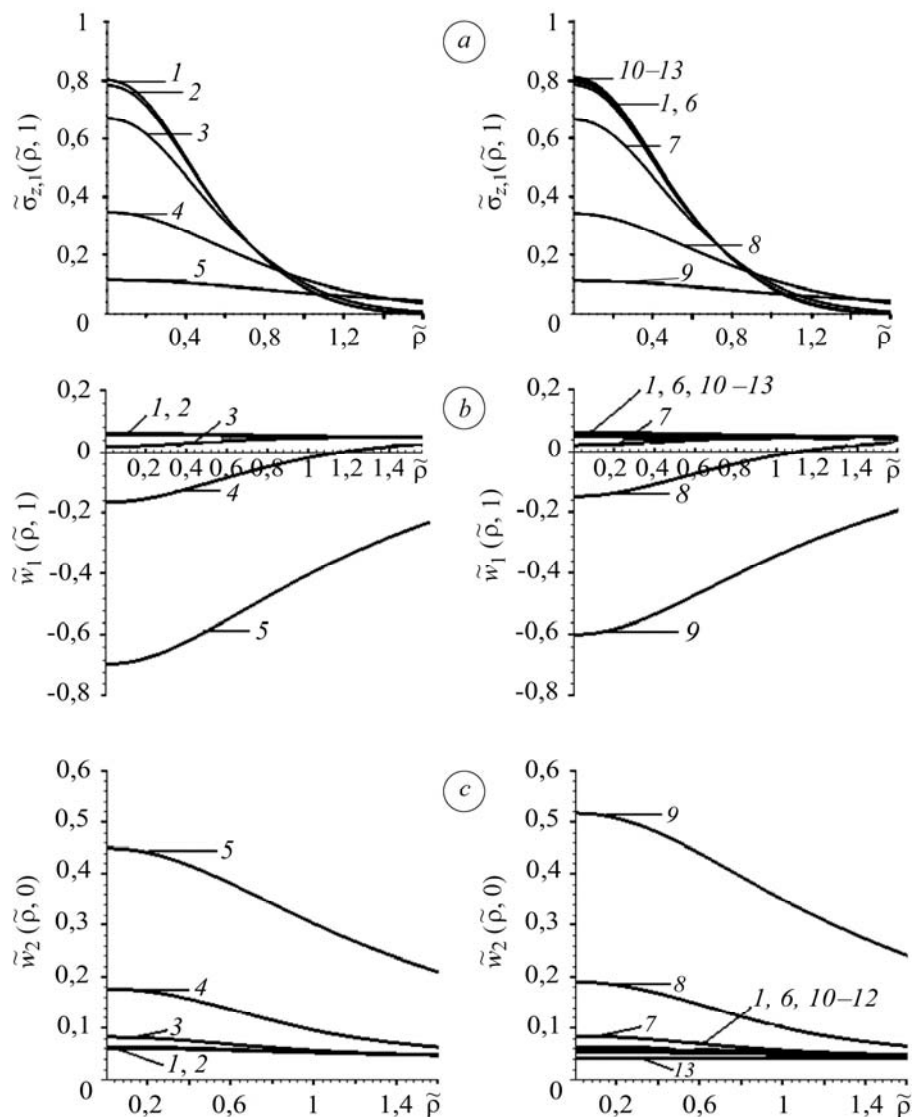


Рис. 2. Вплив пружних зв'язків на розподіл нормальних напружень на нижній межі верхнього шару (а), вертикальних переміщень точок нижньої межі верхнього (b) та верхньої межі нижнього (с) шару двошарової плити:  
1-13 – коефіцієнти пружних зв'язків.

Fig. 2. Influence of elastic connections on the distribution of normal stresses at the lower boundary of the upper layer (a), vertical displacements of the points of lower boundary of the upper (b) and upper boundary of the lower (c) layer of a two-layer plate:  
1-13 – coefficients of elastic connections.

#### Коефіцієнти пружних зв'язків

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\tilde{m}_1$	0	0,01	0,1	1	10	0	0	0	0	0,01	0,1	1	10
$\tilde{r}_1$	0	0,01	0,1	1	10	0,01	0,1	1	10	0	0	0	0

## ВИСНОВКИ

Метод функцій податливості застосовано до задач про визначення напружено-деформованого стану багат шарової плити з пружними зв'язками між шарами. В просторі трансформант отримано рекурентні співвідношення, які пов'язують матриці податливості сусідніх шарів. Для двошарової плити, яка знаходиться під дією нормальних навантажень, прикладених до верхньої та нижньої меж плити, проаналізовано вплив коефіцієнтів пружних зв'язків на розподіл напружень та переміщень в її шарах.

*РЕЗЮМЕ.* Предложен способ решения задачи об определении напряженно-деформированного состояния многослойной плиты с упругими связями между слоями при пространственной деформации. Решение задачи основано на методе функций податливости с использованием двумерного интегрального преобразования Фурье. Построены рекуррентные формулы для вычисления матриц податливости. Для двухслойной плиты, которая находится под действием нормальных сосредоточенных нагрузок, проанализировано влияние коэффициентов упругих связей на распределение нормальных напряжений и перемещений в ее слоях.

*SUMMARY.* The method of determination of the stress-strain state of a multilayer plate with elastic connections between layers in the case of the spatial deformation is proposed. The technique is based on the compliance functions method. The method uses a two-dimensional Fourier integral transformation. Recurrence formulas for the calculation of compliance matrices are built. For a two-layer plate, which is under the action of normal concentrated loads, the influence of coefficients of elastic connections on the distribution of normal stresses and displacements in its layers is analyzed.

1. Jones J. P. and Whitter J. S. Waves at a flexibly bonded interface // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1967. – 34, № 4. – P. 178–183.
2. Приварников А. К. Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований. – Днепропетровск: ДГУ, 1976. – 60 с.
3. Вольский С. Л., Приварников А. К. К расчету слоистых плит // Вопросы прочности и пластичности: сб. научн. тр. – Днепропетровск: ДГУ, 1974. – С. 58–66.
4. Величко И. Г., Приварников А. К., Спица О. Г. Матричный алгоритм аналитического определения напряженно-деформированного состояния упругой многослойной плиты // Теор. и прикл. мех. – 2001. – Вып. 34. – С. 38–43.
5. Величко О. В. Плоска деформація пружної багат шарової плити під дією періодичної системи навантажень // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2004. – 1, № 6. – С. 162–170.
6. Годес Ю. Я. Функции податливости многослойного основания с упругими связями между слоями // Нелинейные задачи гидроаэромеханики и теории упругости: межвуз. сб. научн. тр. – Днепропетровск: ДГУ, 1987. – С. 92–97.
7. Антоненко Н. Н., Величко И. Г. Пространственная деформация многослойного основания с упругими связями между слоями // Вісник Донецького нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2011. – № 1. – С. 27–31.
8. Агаловян Л. А., Хачатрян А. М. О двух задачах анизотропной двухслойной полосы при неполном контакте между слоями // Изв. НАН Армении. Механика. – 1997. – 50, № 3–4. – С. 34–41.
9. Барсегян В. М., Хачатрян А. М. Об асимптотическом решении смешанной краевой задачи для трехслойной полосы при различных условиях контакта слоев // Там же. – 2001. – 54, № 1. – С. 17–25.
10. Антоненко Н. М. Плоска деформація двошарової плити з пружними зв'язками між шарами // Матер. XXIII Відкритої наук.-техн. конф. молодих науковців і спеціалістів Фіз.-мех. ін-ту ім. Г. В. Карпенка НАН України “Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи” (Львів, 23–25 жовтня 2013 р.). – Львів, 2013. – С. 10–13.

Одержано 23.12.2013