

УДК 539.3

ВПЛИВ ФОРМИ КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРІЩИНИ НА ДИНАМІЧНІ КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ

В. С. КРАВЕЦЬ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Досліджено вплив форм гладких криволінійних тріщин у нескінченних двовимірних пружних областях на зміну в часі коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) за різного роду динамічних навантажень на берегах тріщин. За модифікованим методом скінченних різниць за часом динамічну задачу зведено до розв'язування системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибків переміщень за переходу контуру тріщини у кожний розглядуваний момент часу. Числові розв'язки інтегральних рівнянь отримано методом механічних квадратур. Проаналізовано залежності динамічних КІН від часу у вершинах криволінійної тріщини по дузі кола, параболи або півеліпса за різних ударних та імпульсних навантажень на берегах тріщини.

Ключові слова: плоска динамічна задача, криволінійна тріщина, коефіцієнти інтенсивності напружень, сингулярні інтегро-диференціальні рівняння, скінченні різниці, ударне та імпульсне навантаження.

Плоскі задачі теорії пружності для ізотропних тіл з тріщинами за динамічних навантажень на їх берегах в основному розв'язували для прямолінійних тріщин [1–4]. Поєднуючи модифікований методи скінченних різниць за часом [5] та сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь за просторовими змінними [6–9], нижче розв'язали плоску динамічну задачу теорії пружності для нескінченного пружного тіла з гладкою криволінійною тріщиною довільної форми, на берегах якої задані різного роду ударні та імпульсні навантаження. Числові розрахунки динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) виконали для криволінійних тріщин по дугах кола, параболи та півеліпса.

Формулювання задачі. У межах лінійної теорії пружності розглянемо плоску динамічну задачу для нескінченної ізотропної двовимірної області S (віднесеної до декартової системи координат Oxy) з гладкою криволінійною тріщиною L , на берегах якої діють залежні від часу t нормальні та дотичні самозрівноважені напруження [10–12]:

$$\{N(\zeta, t) + iT(\zeta, t)\}^{\pm} = f(\zeta, t); \quad \zeta \in L. \quad (1)$$

Тут $f(\zeta, t)$ – задана комплексна функція; верхні індекси “+”, “–” вказують на граничні значення ($z = x + iy \rightarrow \zeta \in L$) відповідних величин на лівому та правому берегах тріщини.

Початкові напруження та їхні похідні за часом в області S вважатимемо нульовими:

$$\begin{aligned} \sigma_x(z, t)|_{t=0} = \sigma_y(z, t)|_{t=0} = \tau_{xy}(z, t)|_{t=0} = 0; \quad z = x + iy \in S, \\ \partial \sigma_x(z, t) / \partial t|_{t=0} = \partial \sigma_y(z, t) / \partial t|_{t=0} = \partial \tau_{xy}(z, t) / \partial t|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для плоскої динамічної задачі лінійної теорії пружності компоненти переміщень та напружень в ізотропній області S виражені через два хвильові потенціала-

ли $\Phi_1(x, y, t)$, $\Phi_2(x, y, t)$ – дійсні функції двох просторових координат (x, y) і часу t [1, 3, 4, 10]. Використовуючи рівняння руху тіла у переміщеннях, задачу зводимо до розв’язування двох хвильових рівнянь [1]:

$$\nabla^2 \Phi_m(x, y, t) - \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 \Phi_m(x, y, t)}{\partial t^2} = 0, \quad m = 1; 2, \quad (3)$$

де $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ – швидкості поширення поздовжніх та поперечних пружних хвиль у пружному ізотропному тілі з коефіцієнтами Ламе λ , μ та густиною ρ .

Для хвильових потенціалів Φ_1 , Φ_2 початкові умови (2) матимуть вигляд [10, 12]

$$\Phi_m(x, y, t)|_{t=0} = 0; \quad \partial \Phi_m(x, y, t)/\partial t|_{t=0} = 0; \quad m = 1; 2. \quad (4)$$

Метод розв’язування. Для розв’язування плоскої динамічної задачі теорії пружності (1), (3), (4) застосували модифікований метод скінченних різниць за часом [5], у якому довільний момент часу $t = t_j$ подали як суму скінченних різниць

$$t_j = \sum_{k=1}^j \Delta t_k, \quad \Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad t_0 = 0; \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

причому, вважали, що часові різниці $\Delta t_k \neq \Delta t_i$ ($k, i = \overline{1, j}; k \neq i$).

Загальні розв’язки хвильових рівнянь (3) у кожний момент часу $t = t_j$ шукаємо у вигляді сум [10–12]:

$$\Phi_m^j \equiv \Phi_m(x, y, t_j) = \sum_{k=1}^j \omega_{jk} \widehat{\Phi}_m^k(x, y); \quad m = 1; 2; \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

де ω_{jk} – відомі коефіцієнти [5]. За нульових початкових умов (4) зводимо їх до розв’язування двох однорідних систем диференційних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \widehat{\Phi}_m^k(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{\Phi}_m^k(x, y)}{\partial y^2} - \chi_{mk}^2 \widehat{\Phi}_m^k(x, y) = 0; \quad m = 1; 2; \quad k = \overline{1, j}; \quad \chi_{mk} = 1/(c_m \Delta t_k), \quad (7)$$

розв’язки яких повинні задовольняти крайові умови [10, 12]

$$\widehat{N}^k(\zeta) + i\widehat{T}^k(\zeta) = \widehat{f}^k(\zeta) \equiv f^k(\zeta) - \sum_{l=1}^{k-1} \omega_{kl} \widehat{f}^l(\zeta); \quad k = \overline{1, j}; \quad \zeta \in L, \quad (8)$$

де $f^k(\zeta) = f(\zeta, t_k)$; $\widehat{f}^1(\zeta) = f^1(\zeta)$; $\widehat{f}^k(\zeta)$ – значення в момент часу $t = t_k$ крайових напружень (1), які відповідають хвильовим потенціалам $\widehat{\Phi}_1^k(\zeta)$, $\widehat{\Phi}_2^k(\zeta)$ на контурі тріщини.

Використовуючи відомий фундаментальний розв’язок [7–9] рівнянь Гельмгольца (7), побудували інтегральні зображення хвильових потенціалів $\widehat{\Phi}_m^k(x, y)$ [12], в які входить одна невідома комплексна функція стрибка переміщень за переходу через контур тріщини $[\widehat{u}(\zeta) + i\widehat{v}(\zeta)] \equiv (\widehat{u}(\zeta) + i\widehat{v}(\zeta))^+ - (\widehat{u}(\zeta) + i\widehat{v}(\zeta))^-$ та її похідна $d[\widehat{u}(\zeta) + i\widehat{v}(\zeta)]/d\zeta$.

Задовольнивши за допомогою потенціалів $\widehat{\Phi}_m^k(x, y)$ крайові умови (8), отримали систему сингулярних інтегро-диференційних рівнянь для кожного часового вузла $t = t_k, k = \overline{1, j}$:

$$\int_L \left\{ L_{11}(\zeta, \zeta_0) \widehat{g}(\zeta) d\zeta + L_{12}(\zeta, \zeta_0) \overline{\widehat{g}(\zeta)} d\zeta \right\} + \int_L \left\{ L_{21}(\zeta, \zeta_0) \widehat{g}'(\zeta) d\zeta + L_{22}(\zeta, \zeta_0) \overline{\widehat{g}'(\zeta)} d\zeta \right\} = \pi \widehat{f}(\zeta_0); \quad \zeta_0 \in L, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
L_{11}(\varsigma, \varsigma_0) &= \frac{\chi_1^2}{4} \left\{ -\frac{1}{d^2} K_0(\chi_1 r_0) + (2-2\nu) \frac{d\bar{\varsigma}_0}{d\varsigma_0} \frac{\varsigma - \varsigma_0}{\varsigma - \varsigma_0} \left\langle K_2^0(\chi_1 r_0) + \frac{1}{d^2} K_2^0(\chi_2 r_0) \right\rangle \right\} \frac{d\bar{\varsigma}}{d\varsigma}; \\
L_{12}(\varsigma, \varsigma_0) &= \frac{\chi_1^2}{4} \left\{ -\frac{1}{d^2} K_0(\chi_1 r_0) + (2-2\nu) \frac{d\bar{\varsigma}_0}{d\varsigma_0} \frac{\varsigma - \varsigma_0}{\varsigma - \varsigma_0} \left\langle K_2^0(\chi_1 r_0) - \frac{1}{d^2} K_2^0(\chi_2 r_0) \right\rangle \right\} \frac{d\bar{\varsigma}}{d\varsigma}; \\
L_{21}(\varsigma, \varsigma_0) &= \\
&= \frac{\chi_1}{2} \left\{ K_1(\chi_1 r_0) + (2-2\nu) \frac{\varsigma - \varsigma_0}{\varsigma - \varsigma_0} \frac{d\bar{\varsigma}_0}{d\varsigma_0} \left\langle \frac{2/\chi_1}{|\varsigma - \varsigma_0|} - d^2 K_1(\chi_1 r_0) - \frac{1}{d} K_1(\chi_2 r_0) \right\rangle \right\} \frac{|\varsigma - \varsigma_0|}{\varsigma - \varsigma_0}; \\
L_{22}(\varsigma, \varsigma_0) &= \\
&= \frac{\chi_1}{2} \left\{ K_1(\chi_1 r_0) + (2-2\nu) \frac{\varsigma - \varsigma_0}{\varsigma - \varsigma_0} \frac{d\bar{\varsigma}_0}{d\varsigma_0} \left\langle -d^2 K_3^0(\chi_1 r_0) + \frac{1}{d} K_3^0(\chi_2 r_0) \right\rangle \right\} \frac{|\varsigma - \varsigma_0|}{\varsigma - \varsigma_0}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Тут $\chi_1 = 1/(c_1 \Delta t_k)$, $\chi_2 = 1/(c_2 \Delta t_k)$, $d^2 = c_2^2 / c_1^2 = \chi_1^2 / \chi_2^2 = (1-2\nu)/(2-2\nu)$; $\nu = \lambda / \{2(\lambda + \mu)\}$ – коефіцієнт Пуассона; $K_2^0(\chi r) = K_2(\chi r) - 2/(\chi^2 r^2)$, $K_3^0(\chi r) = K_3(\chi r) - 8/(\chi^3 r^3)$, $K_0(\chi r_0)$, $K_1(\chi r_0)$, $K_2(\chi r_0)$, $K_3(\chi r_0)$ – функції Макдональда дійсних аргументів $\chi \in \{\chi_1, \chi_2\}$, $r_0 = |\varsigma - \varsigma_0|$; функція $\hat{f}(\varsigma_0) = \hat{f}^k(\varsigma_0)$ визначена у крайових умовах (8) у кожний момент часу $t = t_k, k = \overline{1, j}$,

$$\bar{g}(\varsigma) \equiv \bar{g}(t_k, \varsigma) = \frac{2\mu}{i(1+\kappa)} [\bar{u}(\varsigma) + i\bar{v}(\varsigma)] \Big|_L; \quad \bar{g}'(\varsigma) = \frac{2\mu}{i(1+\kappa)} \frac{d}{d\varsigma} [\bar{u}(\varsigma) + i\bar{v}(\varsigma)] \Big|_L; \quad \varsigma \in L, \tag{11}$$

де стала $\kappa = 3 - 4\nu$ – для плоскої деформації та $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – для узагальненого плоского напруженого стану тіла. Зауважимо, що ядра L_{11}, L_{12} (10) містять логарифмічну особливість (для $\varsigma \rightarrow \varsigma_0$), ядро L_{21} – сингулярність типу Коші, а ядро L_{22} – регулярне.

Розв'язки (11) інтегральних рівнянь (8) повинні задовольняти додатку умову

$$\int_L \bar{g}'(\varsigma) d\varsigma = 0, \tag{12}$$

яка забезпечує однозначність переміщень за обходу контуру тріщини L [6].

Отримавши розв'язки інтегральних рівнянь (9) (значення функцій $\bar{g}(\varsigma, t_k)$, $\bar{g}'(\varsigma, t_k)$), згідно з інтегральними зображеннями хвильових потенціалів (6) можна визначити напружено-деформований стан тіла з тріщиною у довільний момент часу $t = t_j, j = 1, 2, \dots$.

Інтегро-диференційні рівняння (9) з умовою (12) розв'язано методом механічних квадратур [6, 11, 12] для гладкої криволінійної тріщини з параметричним рівнянням контуру L :

$$\varsigma = a w(\xi), \quad \xi \in [-1; 1], \tag{13}$$

де $2a$ – віддаль між лівою $A = a w(-1) = (-a; 0)$ та правою $B = a w(+1) = (a; 0)$ вершинами тріщини (див. схему на рис. 1).

Записавши рівняння (9) у безрозмірних змінних, його розв'язування звели до знаходження функції $\bar{g}_0'(\xi) \equiv \bar{g}_0'(\xi, \tau_k) = \bar{g}'(\varsigma) w'(\xi) / p$, а для визначення невідомої функції $\bar{g}_0(\xi) = \bar{g}(\varsigma) / (ap)$ використали інтегрування інтерполяційного полінома функції $\bar{g}_0'(\xi)$ [7]. Тут $\tau_k = c_2 t_k / a$ – безрозмірні часові вузли (5) $k = \overline{1, j}$; p – силовий параметр розмірності напружень. Функцію $\bar{g}_0'(\xi)$ шукали у класі функ-

цій, необмежених на кінцях проміжку інтегрування: $\bar{g}_0'(\xi) = \bar{u}(\xi)/\sqrt{1-\xi^2}$, де функція $\bar{u}(\xi)$ ($\xi \in [-1;1]$) задовольняє умови Гелдера [6].

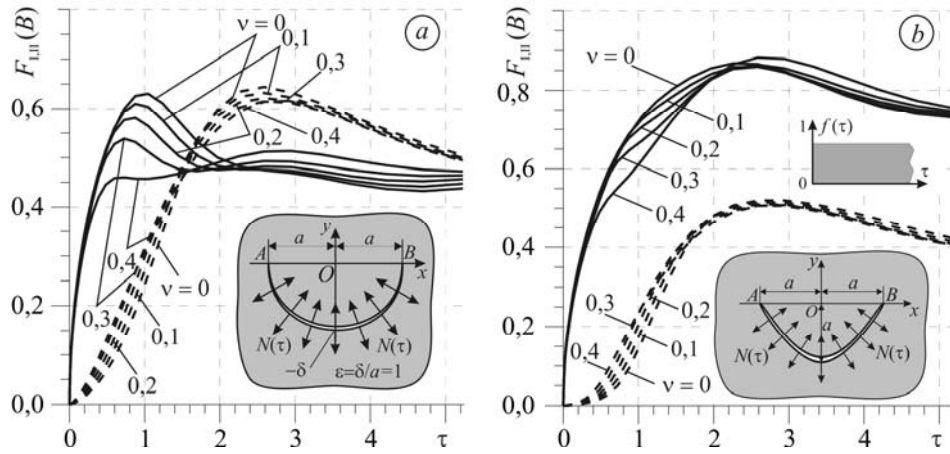


Рис. 1. Вплив коефіцієнта Пуассона ν на зміну КІН у часі за ударних навантажень на берегах півколової (а) та параболічної (б) тріщин ($\varepsilon = 1,0$); суцільні криві – $F_I(B)$; штрихові – $F_{II}(B)$.

Fig. 1. Effect of Poisson's ratio ν on the change in time of the stress intensity factors (SIF) under impact loading at the faces of a half-circle (a) and parabolic (b) cracks ($\varepsilon = 1.0$): solid curves – $F_I(B)$; dashed – $F_{II}(B)$.

У розрахунках застосовували прямий підхід методу механічних квадратур [11, 12], що дало можливість вжити стандартні квадратурні формули (у вузлах Чебишова першого та другого родів) [6] для обчислення інтегралів по розізмкених контурах без виділення сингулярностей у ядрах підінтегральних виразів, що значно спрощує зведення інтегро-диференційних рівнянь до систем лінійних алгебричних відносно значень функції $\bar{u}(\xi_j)$ у n вузлових точках $\xi_j = \cos(\pi(2l-1)/(2n))$, $l = \overline{1, n}$ – коренях поліномів Чебишова першого роду. Використавши інтерполяційний поліном для шуканої функції $\bar{u}(\xi)$, знайшли її значення на кінцях відрізка інтегрування $\bar{u}(\pm 1) \equiv \bar{u}(\pm 1, \tau_k)$ та визначили проміжні значення КІН [6]:

$$\hat{K}_I^\pm(\tau_k) - i\hat{K}_{II}^\pm(\tau_k) = \mp p\sqrt{\pi|aw'(\pm 1)|} \bar{u}(\pm 1, \tau_k) / w'(\pm 1).$$

Реальні динамічні КІН у кожний момент часу $t = t_j, j = 1, 2, \dots$ (5) знаходили за поданнями типу (6) модифікованого методу скінченних різниць за часом, а їхні відносні значення обчислювали за формулами [11, 12]

$$F_I^\pm(\tau_j) - iF_{II}^\pm(\tau_j) \equiv \frac{K_I^\pm(\tau_j) - iK_{II}^\pm(\tau_j)}{p\sqrt{\pi a}} = \mp \frac{\sqrt{|w'(\pm 1)|}}{w'(\pm 1)} \sum_{k=1}^j \omega_{jk} \bar{u}(\pm 1, \tau_k); \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

для лівої $F_{I,II}(A) = F_{I,II}^-(\tau_j)$ та правої $F_{I,II}(B) = F_{I,II}^+(\tau_j)$ вершин тріщини.

Аналіз числових результатів. Числові розрахунки відносних динамічних КІН (14) залежно від безрозмірного часу $\tau = c_2 t/a$ виконали за плоскої деформації ($\kappa = 3-4\nu$) нескінченної пружної області з криволінійною тріщиною (13) по дузі

кола $w(\xi) = (\xi - i\varepsilon)/(1 - i\varepsilon\xi), \quad (15)$

параболи $w(\xi) = \xi + i\varepsilon(\xi^2 - 1), \quad (16)$

та півеліпса $w(\xi) = [2\xi - i\varepsilon(1 - \xi^2)]/(1 + \xi^2) \quad (17)$

за дії на берегах тріщини напружень $N(\xi, \tau) + iT(\xi, \tau) = \{-p(\xi) + iq(\xi)\}f(\tau)$. Тут $\xi \in [-1; 1]$, $\varepsilon = \delta/a$ – відносний центральний прогин контуру тріщини, $a = |AB|/2$ (див. схеми на рис. 1 і 2).

Коефіцієнт Пуассона ν пружної області S суттєво впливає на зміну в часі КІН у вершинах криволінійних тріщин (рис. 1), особливо для відносних часів $\tau = c_2 t/a \in [0, 4; 2, 0]$. Цей вплив відчутніший на КІН нормального відриву $F_I(\tau)$ для тріщин по дугах півеліпсів, зокрема, для півкругової тріщини (рис. 1а). Зміна поведінки динамічних КІН за різних коефіцієнтів Пуассона для параболічної тріщини ($\varepsilon = \delta/a = 1$) менш виражена (рис. 1б). Тут на берегах криволінійних тріщин діють ударні нормальні ($q = 0$) напруження $N(\tau) = -pH(\tau)$, де $H(\tau) = \{0, \tau \leq 0; 1, \tau > 0\}$ – функція Гевісайда. Для прямолінійних тріщин (на відміну від криволінійних) вплив коефіцієнта Пуассона суттєвіший для КІН $F_{II}(\tau)$ [10]. Обчислені значення відносних КІН $F_I(\tau)$, $F_{II}(\tau)$ за дії рівномірно розподілених уздовж берегів прямолінійної тріщини ударних нормальних або дотичних напружень збігаються з відомими [1], отриманими для $\nu = 0,29$.

Зауважимо, що для симетричних (відносно параметра ξ) контурів тріщин (15)–(17), симетричних нормальних $N(\xi, \tau)$ та антисиметричних дотичних $T(\xi, \tau)$ навантажень відносні КІН нормального відриву та поперечного зсуву (14) задовольняють вирази $F_I(B) = F_I(A)$, $F_{II}(B) = -F_{II}(A)$.

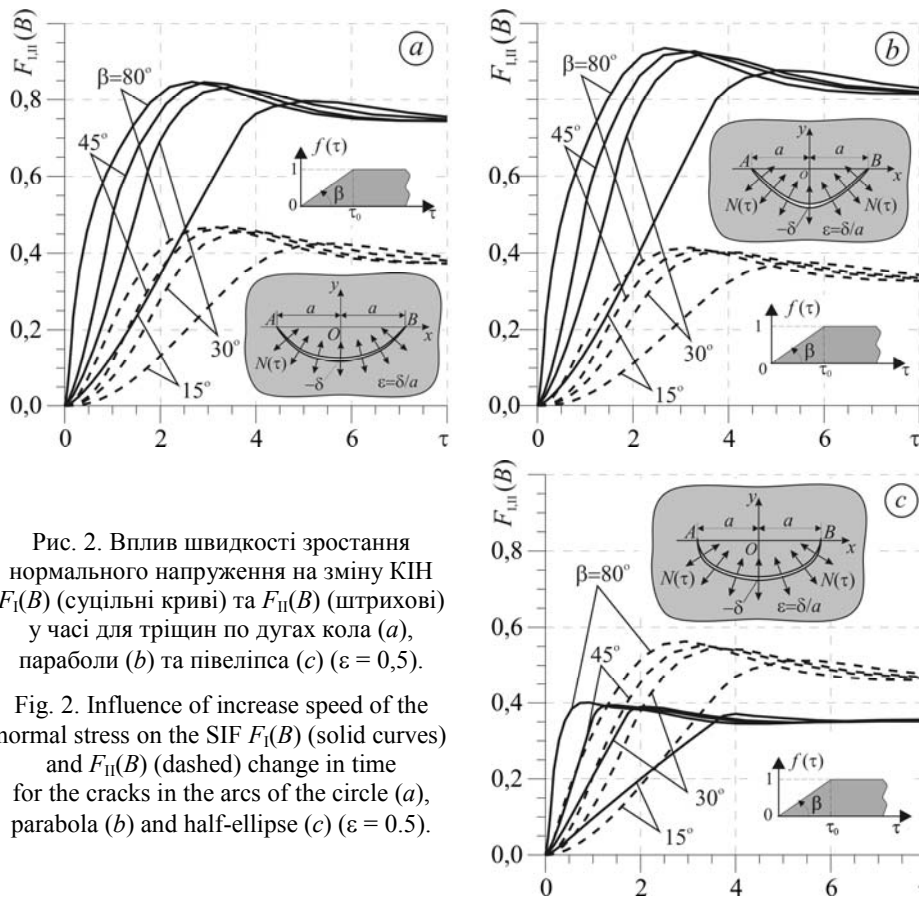


Рис. 2. Вплив швидкості зростання нормального напруження на зміну КІН $F_I(B)$ (суцільні криві) та $F_{II}(B)$ (штрихові) у часі для тріщин по дугах кола (а), параболі (б) та півеліпса (с) ($\varepsilon = 0,5$).

Fig. 2. Influence of increase speed of the normal stress on the SIF $F_I(B)$ (solid curves) and $F_{II}(B)$ (dashed) change in time for the cracks in the arcs of the circle (a), parabola (b) and half-ellipse (c) ($\varepsilon = 0.5$).

Вплив на відносні динамічні КІН $F_I(B)$, $F_{II}(B)$ швидкості зростання (кута β) нормального напруження $N(\tau)$ на берегах тріщини по дузі кола, параболі та півеліпса ілюструє рис. 2 для $\nu = 0,3$ та відносного центрального прогину $\varepsilon = 0,5$. Від-

чутний інерційний ефект (коли форми кривих $F_I(\tau)$, $F_{II}(\tau)$ і навантаження $N(\tau) = -pf(\tau)$ суттєво різняться) спостерігаємо за швидкого зростання напружень ($\beta = 45^\circ; 80^\circ$) для параболічної тріщини (рис. 2b). Інерційний характер поведінки КІН $F_I(B)$ для півеліптичної менш виражений (рис. 2c). За відносно повільного зростання навантажень ($\beta < 15^\circ$) криві для КІН $F_I(\tau)$, $F_{II}(\tau)$ наближаються до вигляду кривих для навантаження $N(\tau)$ і динамічну задачу можна розглядати як статичну, беручи змінне в часі напруження як її параметр. За відносно великих часів ($\tau > 16$) значення $F_I(\tau)$, $F_{II}(\tau)$ наближаються до відомих статичних КІН для відповідних криволінійних тріщин [6].

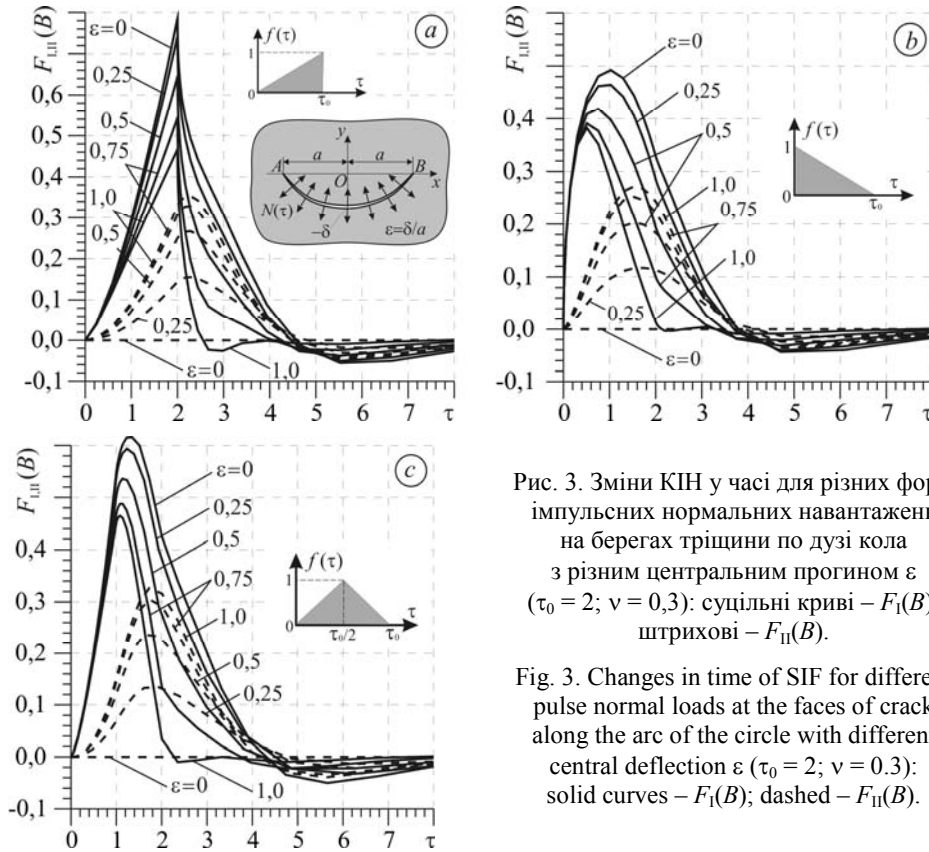


Рис. 3. Зміни КІН у часі для різних форм імпульсних нормальних навантажень на берегах тріщини по дузі кола з різним центральним прогином ε ($\tau_0 = 2$; $\nu = 0,3$): суцільні криві – $F_I(B)$; штрихові – $F_{II}(B)$.

Fig. 3. Changes in time of SIF for different pulse normal loads at the faces of crack along the arc of the circle with different central deflection ε ($\tau_0 = 2$; $\nu = 0.3$): solid curves – $F_I(B)$; dashed – $F_{II}(B)$.

Вплив на динамічні КІН нормальних одноімпульсних у часі навантажень на берегах криволінійних тріщин суттєво залежить від форми та відносної часової тривалості τ_0 заданих імпульсів (рис. 3). Тут характерне різке пониження КІН після дії імпульсу напружень аж до від'ємних значень F_I та зміни знака для F_{II} . Зафіксували різні проміжки часу (залежні від форми імпульсу та відносного прогину тріщини), впродовж яких береги криволінійної тріщини можуть контактувати ($F_I < 0$). Визначили також вплив на відносні КІН $F_I(\tau)$, $F_{II}(\tau)$ різних трикутних у часі імпульсів (рис. 3) нормальних напружень $N(\tau) = -pf(\tau)$ на берегах тріщини по дузі кола для $\nu = 0,3$; $\tau_0 = 2$.

Виявлено суттєвий вплив форми тріщини на поведінку динамічних КІН за триімпульсного (прямокутного у часі з повним періодом $2\tau_0 = 2$) нормального навантаження $N(\tau) = -pf(\tau)$ берегів тріщини (рис. 4). Зауважили якісну відмінність (зі зміною параметра відносного центрального прогину контуру тріщини ε) поведінки КІН $F_I(\tau)$ та $F_{II}(\tau)$ для півеліптичної тріщини (рис. 4c) від аналогічної для тріщин по дузі кола (рис. 4a) та параболи (рис. 4b). Зокрема, максимальні значення

$F_I(\tau)$ у кожному періоді для півеліптичної тріщини досягаються за найбільших значень параметра ε , коли для тріщин по дузі кола та параболи – за найменших ε (рис. 4а, б). Після 3–4 імпульсів зміна відносних КІН $F_I(\tau)$, $F_{II}(\tau)$ стає циклічною.

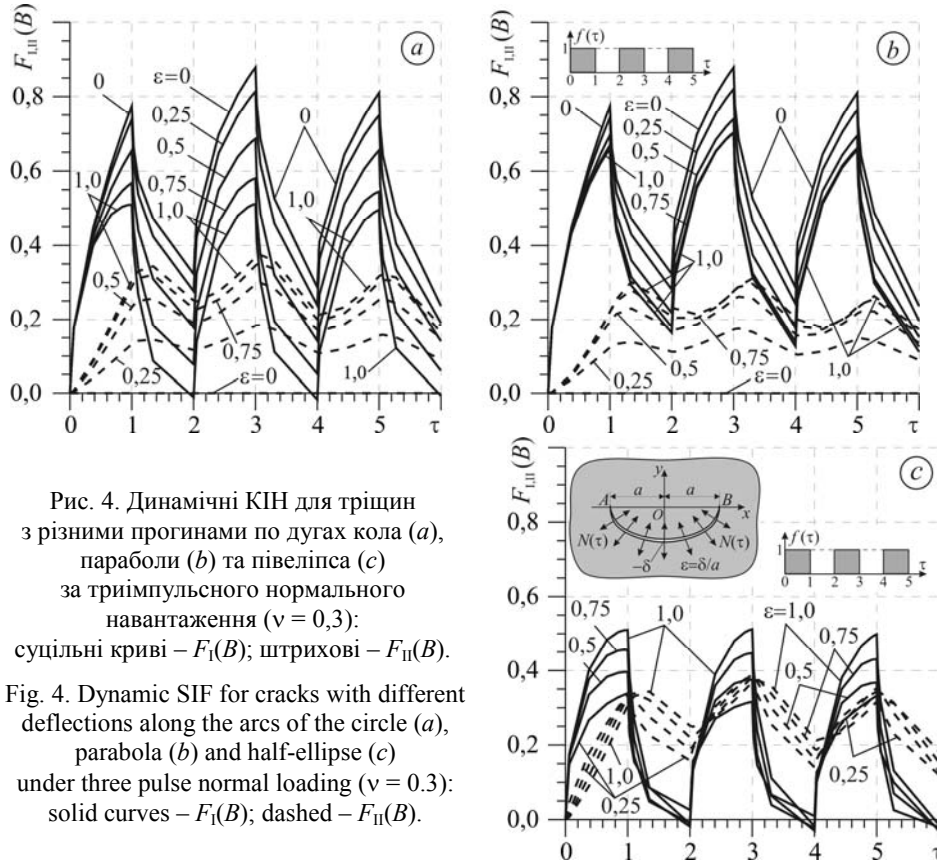


Рис. 4. Динамічні КІН для тріщин з різними прогинами по дугах кола (а), параболи (б) та півеліпса (с) за триімпульсного нормального навантаження ($\nu = 0,3$): суцільні криві – $F_I(B)$; штрихові – $F_{II}(B)$.

Fig. 4. Dynamic SIF for cracks with different deflections along the arcs of the circle (a), parabola (b) and half-ellipse (c) under three pulse normal loading ($\nu = 0.3$): solid curves – $F_I(B)$; dashed – $F_{II}(B)$.

Досліджуючи вплив на напружений стан двовимірних пружних областей нерівномірно розподілених уздовж контуру криволінійної тріщини (13) нормальних та дотичних динамічних навантажень (1), можна змодельовати дію динамічних зосереджених сил $P(t)$ у таких тілах. У першому наближенні (для малих відносних часів $\tau < 4$) ненульовий напружений стан тіла біля тріщини за дії двох динамічних зосереджених сил на деякій відстані b від хорди AB (див. схеми рис. 5) замінили відповідним напруженим станом (зміщеним на час приходу навантаження до берегів тріщини) за дії на берегах тріщини деяких нормальних та дотичних динамічних напружень $N(\zeta, t) + iT(\zeta, t) = f_1(\zeta)f(t)$. Тут $f(t)$ – задана функція часової зміни напружень на берегах тріщини, а початкові значення напружень $f_1(\zeta)$ визначено методом суперпозиції з відповідної статичної задачі ($P(t) = P = \text{const}$). Використовуючи відомі значення комплексних потенціалів напружень за дії статичних зосереджених сил у пружному тілі без тріщини [13], отримали:

$$f_1(\zeta) = \frac{P}{\pi(1+\kappa)} \left\{ \left(\frac{b}{\zeta^2 + b^2} + \frac{b}{\bar{\zeta}^2 + b^2} \right) + \frac{d\bar{\zeta}}{d\zeta} \left[\frac{\kappa b}{\zeta^2 + b^2} + \frac{i}{2} \left(\frac{\zeta + ib}{(\bar{\zeta} - ib)^2} - \frac{-ib}{(\zeta + ib)^2} \right) \right] \right\},$$

$$\zeta = aw(\xi) \in L.$$

Відносні динамічні КІН $F_I(\tau)$ та $F_{II}(\tau)$ розраховали для плоскої деформації ($\kappa = 3-4\nu$) нескінченного пружного тіла з прямолінійною тріщиною або тріщи-

ною вздовж дуги параболи (16) з різним прогином $\varepsilon = \delta/a$ за різних значень коефіцієнта Пуассона $\nu \in \{0,2; 0,3; 0,4; 0,49\}$ (рис. 5). Зі зростанням відносного прогину ε параболічної тріщини за ударних навантажень ($f(\tau) = H(\tau)$) зменшуються динамічні КІН $F_I(B, \tau)$ та збільшуються КІН $F_{II}(B, \tau)$ (рис. 5b, c). Характер їх зміни в часі (особливо, для $F_I(B)$) суттєво відрізняється від залежностей за сталого вздовж контуру тріщини навантаження (див. рис. 1). Розраховували для параметрів $b/a = 1$; $\varepsilon \in \{0; 0,4; 0,8\}$.

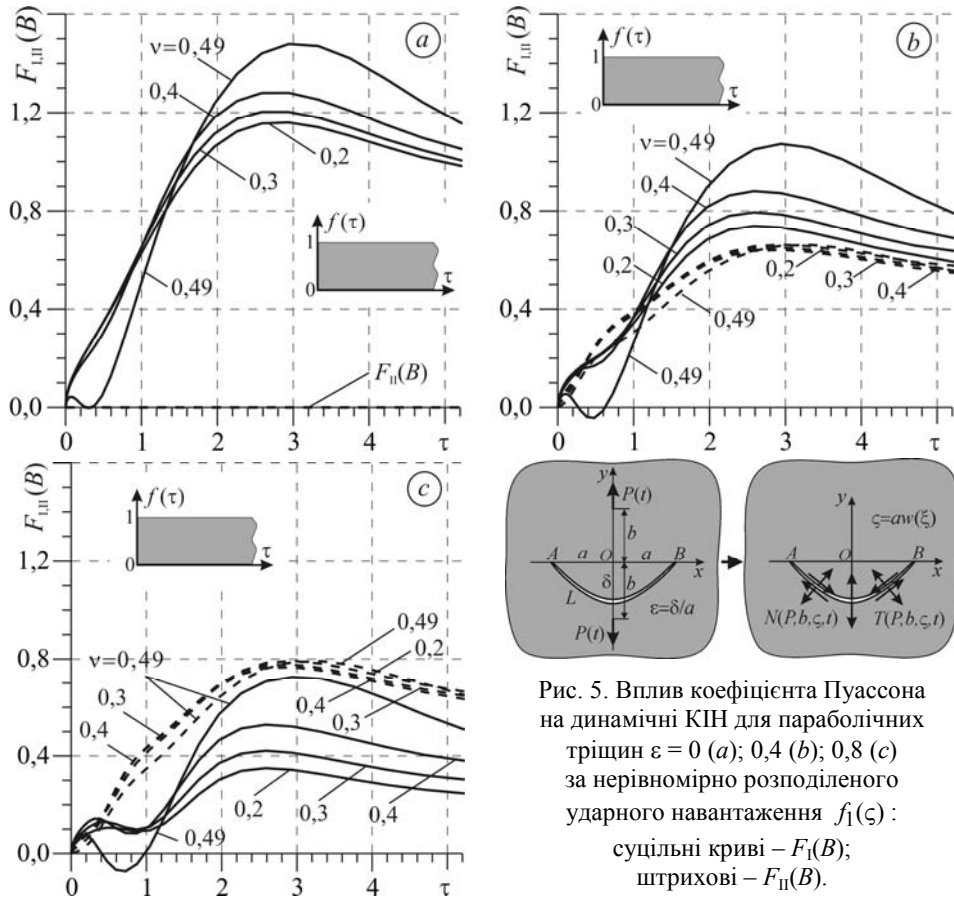


Рис. 5. Вплив коефіцієнта Пуассона на динамічні КІН для параболічних тріщин $\varepsilon = 0$ (a); 0,4 (b); 0,8 (c) за нерівномірно розподіленого ударного навантаження $f_1(\zeta)$: суцільні криві – $F_I(B)$; штрихові – $F_{II}(B)$.

Fig. 5. Influence of Poisson's ratio on the dynamic SIF for the unevenly distributed impact loading $f_1(\zeta)$ for the parabolic cracks: $\varepsilon = 0$ (a); 0.4 (b); 0.8 (c): solid curves – $F_I(B)$; dashed – $F_{II}(B)$.

За великих відносних часів $\tau > 10$ динамічні КІН $F_I(B)$ для прямолінійних тріщин ($\varepsilon = 0$) наближаються до статичних КІН за дії двох зосереджених сил $P = \text{const}$: $F_I(A) = F_I(B) = a(1 + \kappa + 2b^2/(a^2 + b^2))/(1 + \kappa)/\sqrt{a^2 + b^2}$ [13]. Зокрема, для $\nu = 0,3$; $b/a = 1$ отримаємо $F_I(A, B) \rightarrow 0,96$, а у граничному випадку $b/a \rightarrow 0$ – відомий КІН ($F_I(A, B) \rightarrow 1$) за дії зосереджених сил на берегах прямолінійної тріщини.

Аналогічні розрахунки часових залежностей КІН $F_I(\tau)$ та $F_{II}(\tau)$ виконали для змінних по контуру тріщини (13) ударних навантажень $N(\zeta, t) + iT(\zeta, t) = f_2(\zeta)H(t)$, де початкові напруження $f_2(\zeta) = p(1 + \overline{w'(\xi)}/w'(\xi))/2$ визначили методом суперпозиції зі статичної задачі одновісного вертикального розтягу площини напруженнями $p = \text{const}$ (рис. 6). Це наближено моделює (для малих часів τ) ненульовий напружений стан скінченного пружного тіла з криволінійною тріщиною за

дії ударного вертикального розтягу напруженнями $p(t)$. Розглядали тріщини по дузі кола (рис. 6a) та параболи (рис. 6b) з різними прогинами $\varepsilon \in \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\}$ для $\nu = 0,3$. Для великих відносних часів τ отримані динамічні КІН наближаються до відомих статичних для відповідних криволінійних тріщин [6].

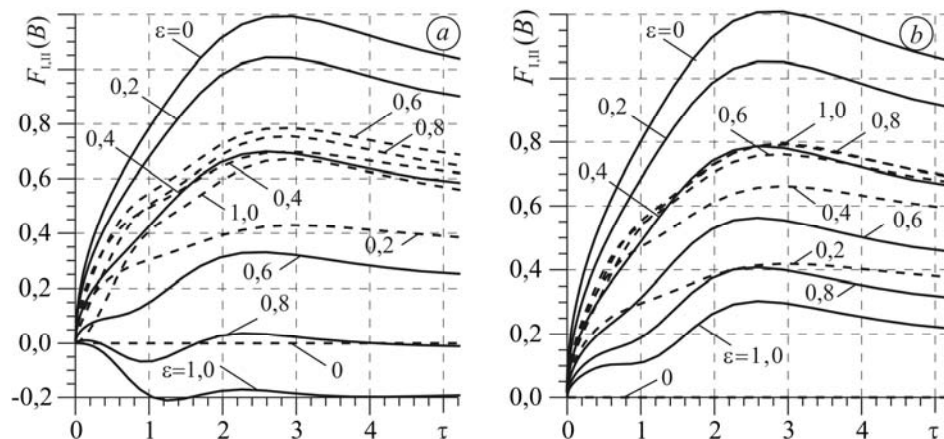


Рис. 6. Вплив відносного прогину тріщини по дузі кола (a) та параболи (b) на зміну КІН у часі за мінливих по контуру тріщини ударних навантажень $f_2(\zeta)$: суцільні криві – $F_I(B)$; штрихові – $F_{II}(B)$.

Fig. 6. Influence of relative crack deflection along the arc of circle (a) and parabola (b) on the SIF change in time under impact loads variable at the crack contour $f_2(\zeta)$: solid curves – $F_I(B)$; dashed – $F_{II}(B)$.

Розв'язки сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (9) описують як плоску деформацію тіла, так і його узагальнений плоский напружений стан, коли у всіх параметрах задачі (10), (11), визначених за умов плоскої деформації, замінити коефіцієнт Пуассона $\nu \in [0; 0,5]$ на $\nu^* = \nu/(1+\nu) \in [0; 1/3]$, що відповідає заміні коефіцієнта Ламе λ на параметр $\lambda^* = 2\lambda\mu/(\lambda+2\mu)$, або заміні швидкості поширення поздовжніх пружних хвиль c_1 на $c_1^p = \sqrt{4\mu(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu)/\rho} = \sqrt{E/(1-\nu^2)}/\rho$, яка відповідає узагальненому плоскому напруженому стану тіла [4]. Тому отримані числові результати для динамічних КІН за плоскої деформації тіла можна використати і для узагальненого плоского напруженого стану (за певних обмежень на довжини хвиль збурення та незначного впливу інерційних ефектів у поперечному напрямі) – тонких пластин з тріщинами, які широко використовують в експериментальних дослідженнях динамічної механіки руйнування [4]. Зокрема, обчислені динамічні КІН для $\nu = 0,3$ за плоскої деформації (рис. 2–4 і 6) відповідають КІН за плоского напруженого стану для $\nu \approx 0,23$.

ВИСНОВКИ

Методами сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь за просторовими змінними та скінченних різниць за часом можна ефективно розв'язувати плоскі динамічні задачі теорії пружності для тіл з криволінійними тріщинами, на берегах яких діють різного роду залежні від часу нормальні та дотичні напруження. Для нескінченної площини з криволінійною тріщиною довільної форми динамічну задачу зведено до послідовного розв'язування систем сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибків переміщень на берегах тріщин у кожний вузловий момент часу. Числові розв'язки цих рівнянь отримано методом механічних квадратур. Визначені динамічні КІН за різних ударних та імпульсних навантажень на берегах криволінійних тріщин (по дугах кола, параболи, півеліпса). Встановлено, що характер їх поведінки в основному залежить від форми трі-

щин біля вершин. Змодельовано дію ударних зосереджених сил у пружній площині з параболічною тріщиною та визначено вплив прогину тріщини на зміну КІН у часі. За ударних навантажень на берегах прямолінійних тріщин порівняно отримані результати з відомими, знайденими іншими методами.

РЕЗЮМЕ. Исследовано влияние форм гладких криволинейных трещин в бесконечных двумерных упругих областях на изменение во времени коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) при разного рода динамических нагрузках на берегах трещин. С помощью модифицированного метода конечных разностей по времени динамическую задачу сведено к решению системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно скачков перемещений при переходе контура трещины в каждый узловой момент времени. Численные решения интегральных уравнений получено методом механических квадратур. Проанализированы зависимости динамических КИН от времени в вершинах криволинейной трещины по дуге окружности, параболы или полуэллипса при различных ударных и импульсных нагрузках на берегах трещины.

SUMMARY. The influence of the shape of smooth curvilinear cracks in infinite two-dimensional elastic domains on the change in time of the stress intensity factors (SIF) for various kinds of dynamic loads at the crack faces is investigated. Using a modified method of finite differences with respect to time the dynamic problem is reduced to solving a system of singular integral-differential equations for displacement jumps during crack contours transition at each nodal time point. Numerical solutions of integral equations are obtained by the quadrature technique method. The time dependences of SIF at the tips of curvilinear cracks in an arc of a circle, parabola or half-ellipse for various impact and pulse loads at the crack faces are analyzed.

1. *Sih G. C.* Mechanics of Fracture. 4: Elastodynamic Crack Problems. – Leyden: Noordhoff International Publishing, 1977. – 352 p.
2. *Борисковский В. Г., Партон В. З.* Динамическая механика разрушения. Итоги науки и техники. – М.: ВИНТИ, 1983. – 16. – 84 с.
3. *Freund L. B.* Dynamic Fracture Mechanics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 564 p.
4. *Ravi-Chandar K.* Dynamic Fracture. – Amsterdam: Elsevier, 2004. – 254 p.
5. *Саврук М. П.* Новый метод розв'язування динамічних задач теорії пружності та механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – 39, № 4. – С. 7–11.
(*Savruk M. P.* New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics // Materials Science.– 2003. – 39, № 4. – P. 465–471.)
6. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
7. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двухмерных задачах дифракции. – К.: Наук. думка, 1984. – 344 с.
8. *Фильштинский Л. А.* Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Механика твердого тела. – 1991. – № 4. – С. 119–127.
9. *Кравець В. С.* Про поєднання методів сингулярних інтегро-диференційних рівнянь та скінченних різниць за часом у плоских динамічних задачах теорії тріщин // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: ФМІ НАН України, 2009. – С. 289–294.
10. *Кравець В. С.* Метод сингулярних інтегро-диференційних рівнянь у плоских динамічних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – 46, № 2. – С. 95–110.
(*Kravets' V. S.* Method of singular integrodifferential equations in plane dynamic problems of fracture mechanics // Materials Science. – 2010. – 46, № 2. – P. 234–253.)
11. *Savruk M. P., Kravets V. S.* Combination of time finite difference and boundary integral equation methods in dynamic problems of fracture mechanics // Proc. Int. Conf. "Integral Equations – 2010". – Lviv: PAIS, 2010. – P. 127–133.
12. *Саврук М. П., Кравець В. С.* Розрахунки динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень у пружних двовимірних тілах з криволінійними тріщинами // Вісник Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2013. – № 4 (72). – С. 16–28.
13. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.

Одержано 01.04.2014