

УДК 539.3

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В ТОНКИХ ОРТОТРОПНИХ ПЛИТАХ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ВІНКЛЕРА

М. В. ДЕЛЯВСЬКИЙ<sup>1</sup>, Н. В. ЗДОЛБИЦЬКА<sup>2</sup>, Л. Й. ОНИШКО<sup>3</sup>,  
А. П. ЗДОЛБИЦЬКИЙ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Технологічно-природничий університет, Бидгощ, Польща;

<sup>2</sup> Луцький національний технічний університет;

<sup>3</sup> Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Розроблено новий підхід до розрахунку тонких ортотропних плит – метод макроелементів. Він забезпечує точніший розв'язок порівняно з відомим методом скінченних елементів. Розраховано напружено-деформований стан складеної ортотропної плити на пружній основі Вінклера. Результати, отримані різними методами, близькі для центральної частини плити і для зон задання кінематичних крайових умов. За статичних крайових умов результати суттєво відрізняються.

**Ключові слова:** ортотропна плита, математичне моделювання, напружено-деформований стан, метод макроелементів.

Сьогодні загально визнаним і найпоширенішим числовим методом розрахунку складних інженерних конструкцій є метод скінченних елементів (МСЕ) [1–4]. Однак він не є досить точним. Нижче розроблено новий аналітико-числовий підхід до розрахунку плитових конструкцій [5–8] – метод макроелементів (ММЕ), який усуває низку недоліків МСЕ. Зокрема, у МСЕ конструкцію ділять на багато дрібних скінченних елементів, які позбавлені механічного сенсу. Натомість у запропонованому підході конструкцію розділяємо на макроелементи, які є частинами реальної конструкції. У МСЕ точність розв'язування збільшується внаслідок згущення сітки поділу в цілому обсязі конструкції, в ММЕ – через збільшення кількості вузлів на краях окремих макроелементів, що призводить до значного зменшення (на кілька порядків) кількості рівнянь необхідних для розв'язку задачі. При цьому рівняння рівноваги в методі макроелементів задовільняються точно. В МСЕ агрегація (з'єднання) окремих скінченних елементів і крайові умови виконуються лише відносно переміщень, а в запропонованому підході через переміщення, моменти і поперечні сили, що суттєво збільшує точність розв'язку. Виходячи з цього, можна стверджувати, що запропонований метод є точніший, ніж метод скінченних елементів. Нижче розвинули його основні положення. Зокрема, у ММЕ застосовано символічний підхід до розв'язку основних задач теорії плит, в якому використано правило Ейнштейна (сумування за повторювальними індексами), запропоноване раніше для тензорного аналізу. Такий підхід суттєво спрощує процедуру отримання розв'язку задачі.

**Формулювання задачі та її розв'язок.** Розглянемо тонку ортотропну прямокутну плиту з розмірами в плані  $2a_1, 2a_2$ , яка лежить на пружній основі Вінклера. Декартову систему координат  $Ox_1x_2x_3$  виберемо з початком у геометричному центрі плити. Вісь  $Ox_3$  направимо вниз, а осі  $Ox_1$  і  $Ox_2$  розташуємо в середній площині плити так, щоби система координат була правою (рис. 1). На верх-

ній основі плита завантажена довільно розподіленим поперечним навантаженням інтенсивності  $q = q(x_1, x_2)$ , а на нижній діє реакція основи Вінклера.

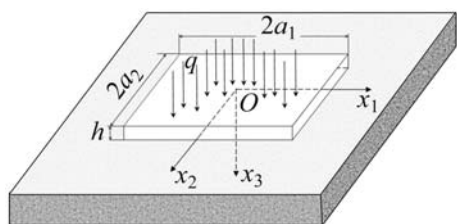


Рис. 1. Схема плити на пружній основі.

Fig. 1. Scheme of a plate resting on an elastic foundation.

Пружну рівновагу такої плити описуємо диференціальним рівнянням у частинних похідних зі сталими коефіцієнтами:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + K_0 w = q. \quad (1)$$

Тут  $D_{11}$  і  $D_{22}$  – жорсткості на згин у двох взаємоперпендикулярних напрямках,  $D_{33} = D_{12} + 2D_{66}$ , де  $D_{66}$  – жорсткість плити на кручення ортотропного матеріалу,  $D_{12}$  – змішана жорсткість,  $w$  – прогин плити.

Розв'язок основного диференціального рівняння (1) подаємо у вигляді суми

$$w = w_0 + w_* \quad (2)$$

загального розв'язку  $w_0$  однорідного рівняння (1) і часткового розв'язку  $w_*$  неоднорідного рівняння.

Частковий розв'язок рівняння (1) подаємо у вигляді суми чотирьох подвійних рядів Фур'є [5]:

$$w_* = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn} \cos(\delta_m^{[1]} x_1) \cos(\delta_n^{[2]} x_2) + B_{mn} \cos(\delta_m^{[1]} x_1) \sin(\gamma_n^{[2]} x_2) + C_{mn} \sin(\gamma_m^{[1]} x_1) \cos(\delta_n^{[2]} x_2) + S_{mn} \sin(\gamma_m^{[1]} x_1) \sin(\gamma_n^{[2]} x_2) \right\}, \quad (3)$$

де  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$ ,  $S_{mn}$  – невідомі коефіцієнти, а наступні параметри набувають значення

$$\delta_m^{[1]} = \frac{(2m-1)\pi}{2a_1}; \quad \delta_n^{[2]} = \frac{(2n-1)\pi}{2a_2}; \quad \gamma_m^{[1]} = \frac{m\pi}{a_1}; \quad \gamma_n^{[2]} = \frac{n\pi}{a_2}. \quad (4)$$

Подібно виразу (3) функцію зовнішнього навантаження  $q = q(x_1, x_2)$  подаємо так:

$$q(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{mn} \cos(\delta_m^{[1]} x_1) \cos(\delta_n^{[2]} x_2) + b_{mn} \cos(\delta_m^{[1]} x_1) \sin(\gamma_n^{[2]} x_2) + c_{mn} \sin(\gamma_m^{[1]} x_1) \cos(\delta_n^{[2]} x_2) + d_{mn} \sin(\gamma_m^{[1]} x_1) \sin(\gamma_n^{[2]} x_2) \right\}, \quad (5)$$

де  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$ ,  $c_{mn}$ ,  $d_{mn}$  – коефіцієнти розвинення ряду Фур'є.

Підставляючи подання (3) і (5) до рівняння (1) і прирівнюючи вирази за однакових добутоків тригонометричних функцій, отримуємо незв'язну систему чотирьох алгебраїчних рівнянь відносно цих коефіцієнтів.

Введемо позначення

$$\begin{aligned} T_{1m}^{[j]}(x_j) &= \sin(\gamma_m^{[j]} x_j); & T_{2m}^{[j]}(x_j) &= \cos(\delta_m^{[j]} x_j); \\ T_{3m}^{[j]}(x_j) &= \cos(\gamma_m^{[j]} x_j); & T_{4m}^{[j]}(x_j) &= \sin(\delta_m^{[j]} x_j) \end{aligned} \quad (6)$$

і параметр

$$\kappa_{pm}^{[j]} = \begin{cases} \gamma_m^{[j]}, & p = 1; \\ \delta_m^{[j]}, & p = 2, \end{cases} \quad (7)$$

що дасть змогу записати зв'язки між функціями  $T_{pm}^{[j]}(x_j)$  та їх похідними

$$\begin{aligned} T_1^{[j]'}(x_j) &= \kappa_{1m}^{[j]} T_{3m}^{[j]}(x_j); & T_{2m}^{[j]'}(x_j) &= -\kappa_{2m}^{[j]} T_{4m}^{[j]}(x_j); & T_{pm}^{[j]''}(x_j) &= -\kappa_{pm}^{[j]2} T_{pm}^{[j]}(x_j); \\ T_{1m}^{[j]'''}(x_j) &= -\kappa_{1m}^{[j]3} T_{3m}^{[j]}(x_j); & T_{2m}^{[j]'''}(x_j) &= \kappa_{2m}^{[j]3} T_{4m}^{[j]}(x_j); \\ T_{pm}^{[j](IV)}(x_j) &= \kappa_{pm}^{[j]4} T_{pm}^{[j]}(x_j), & j &= 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

На основі поданих співвідношень записуємо частковий розв'язок (3) у символічному вигляді

$$w_*(x_1, x_2) = C_{pqmn} W_{pqmn}^*(x_1, x_2), \quad (9)$$

де силові функції прогину плити  $W_{pqmn}^*(x_1, x_2)$  виражають так:

$$W_{pqmn}^*(x_1, x_2) = T_{pm}^{[1]}(x_1) \cdot T_{qn}^{[2]}(x_2). \quad (10)$$

Виходячи з формул (3), (5), зовнішнє навантаження теж подамо через ці функції:

$$q(x_1, x_2) = Q_{pqmn} W_{pqmn}^*(x_1, x_2). \quad (11)$$

$C_{pqmn}$ ,  $Q_{pqmn}$  – інші позначення коефіцієнтів, що фігурують у рівняннях (3), (5). У формулах (9), (11) використали змодифіковане правило сумування Ейнштейна: в кожному доданку сумуємо за індексом, який повторюється двічі:  $p, q = 1 \div 2$ ;  $m, n = 1 \div \infty$ .

Загальний розв'язок  $w_0(x_1, x_2)$  однорідного рівняння (1) подаємо у вигляді

$$w_0(x_1, x_2) = f_{pk}^{[j]}(x_j) \cdot T_{pk}^{[3-j]}(x_{3-j}), \quad (12)$$

де  $f_{pk}^{[j]}(x_j)$  – невідомі функції, які визначають під час розв'язування задачі.

Підставивши розв'язок (12) до однорідного рівняння (1), приходимо до двох незв'язних систем звичайних однорідних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій  $f_{pk}^{[j]}(x_j)$ ,  $p = 1 \div 2$

$$\begin{aligned} D_{11} f_{pk}^{[1](IV)}(x_1) - 2D_{33} \kappa_{pk}^{[2]2} f_{pk}^{[1]''}(x_1) + D_{22} \kappa_{pk}^{[2]4} f_{pk}^{[1]}(x_1) &= 0, \\ D_{22} f_{pk}^{[2](IV)}(x_2) - 2D_{33} \kappa_{pk}^{[1]2} f_{pk}^{[2]''}(x_2) + D_{11} \kappa_{pk}^{[1]4} f_{pk}^{[2]}(x_2) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Розв'язки цих рівнянь подаємо у вигляді

$$f_{pk}^{[j]}(x_j) = R_{pk}^{[j]} \exp(\lambda_{pk}^{[j]} x_j), \quad (14)$$

де  $R_{pk}^{[j]}$  – невідомі коефіцієнти, які визначають з крайових умов на контурі плити, а  $\lambda_{pk}^{[j]}$  – корені характеристичних рівнянь:

$$D_{11} \lambda_{pk}^{[1]4} - 2D_{33} \lambda_{pk}^{[1]2} \kappa_{pk}^{[2]2} + D_{22} \kappa_{pk}^{[2]4} = 0,$$

$$D_{22}\lambda_{pk}^{[2]4} - 2D_{33}\lambda_{pk}^{[2]2}\kappa_{pk}^{[1]2} + D_{11}\kappa_{pk}^{[1]4} = 0. \quad (15)$$

Дослідження показали, що для всіх реальних матеріалів корені цих рівнянь є комплексно-спряженими. Позначимо їх так:

$$\lambda_{1k}^{[j]} = \alpha_{1k}^{[j]} + i \cdot \beta_{1k}^{[j]}, \quad \lambda_{2k}^{[j]} = -\lambda_{1k}^{[j]}, \quad \lambda_{3k}^{[j]} = \bar{\lambda}_{1k}^{[j]}, \quad \lambda_{4k}^{[j]} = -\bar{\lambda}_{1k}^{[j]}. \quad (16)$$

Використовуючи ці залежності, записуємо загальні розв'язки рівнянь (13):

$$f_{pk}^{[j]}(x_j) = R_{vpk}^{[j]} E_{vpk}^{[j]}(x_j), \quad v = 1 \div 4. \quad (17)$$

Функції  $E_{vpk}^{[j]}(x_j)$ , які названо базовими функціями розв'язку, визначимо так [5, 6]:

$$E_{1pk}^{[j]}(x_j) = \frac{\cosh(\alpha_{pk}^{[j]}x_j) \cos(\beta_{pk}^{[j]}x_j)}{\exp(\alpha_{pk}^{[j]}a_j)}; \quad E_{2pk}^{[j]}(x_j) = \frac{\cosh(\alpha_{pk}^{[j]}x_j) \sin(\beta_{pk}^{[j]}x_j)}{\exp(\alpha_{pk}^{[j]}a_j)};$$

$$E_{3pk}^{[j]}(x_j) = \frac{\sinh(\alpha_{pk}^{[j]}x_j) \cos(\beta_{pk}^{[j]}x_j)}{\exp(\alpha_{pk}^{[j]}a_j)}; \quad E_{4pk}^{[j]}(x_j) = \frac{\sinh(\alpha_{pk}^{[j]}x_j) \sin(\beta_{pk}^{[j]}x_j)}{\exp(\alpha_{pk}^{[j]}a_j)}. \quad (18)$$

Підставляючи співвідношення (17) у формулу (12), виражаємо загальний розв'язок однорідного рівняння (1) через базові функції

$$w_0(x_1, x_2) = R_{vpk}^{[j]} E_{vpk}^{[j]}(x_j) T_{pk}^{[3-j]}(x_{3-j}). \quad (19)$$

Введемо функції

$$W_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) = E_{vpk}^{[j]}(x_j) T_{pk}^{[3-j]}(x_{3-j}), \quad (20)$$

які назвемо координатними функціями прогину плити. На основі формул (2), (19), (20) запишемо загальний розв'язок рівняння (1):

$$w(x_1, x_2) = R_{vpk}^{[j]} W_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + w_*(x_1, x_2). \quad (21)$$

У формулі (19) сумуємо за індексами  $v, p, k$ . Оскільки індекси зустрічаються в обох частинах формули (20), то їх не додаємо.

За використання рівняння (19) визначаємо у ортотропній прямокутній плиті тангенціальні переміщення

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} = R_{vpk}^{[j]} \cdot U_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2, x_3) + U_*(x_1, x_2, x_3),$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} = R_{vpk}^{[j]} \cdot V_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2, x_3) + V_*(x_1, x_2, x_3), \quad (22)$$

МОМЕНТИ

$$M_{11}(x_1, x_2) = - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = R_{vpk}^{[j]} \cdot X_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + X_*(x_1, x_2),$$

$$M_{22}(x_1, x_2) = - \left( D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = R_{vpk}^{[j]} \cdot Y_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + Y_*(x_1, x_2),$$

$$M_{12}(x_1, x_2) = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = R_{vpk}^{[j]} \cdot Z_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + Z_*(x_1, x_2) \quad (23)$$

та поперечні сили

$$Q_1(x_1, x_2) = - \left( D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) = R_{vpk}^{[j]} \cdot G_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + G_*(x_1, x_2),$$

$$Q_2(x_1, x_2) = - \left( D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) =$$

$$= R_{vpk}^{[j]} \cdot H_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + H_*(x_1, x_2). \quad (24)$$

У правих частинах формул (22)–(24) перші доданки зв'язані з загальним розв'язком  $w_0$  однорідного рівняння, а другі доданки (вирази з “\*” ) з частковим розв'язком  $w_*$  неоднорідного рівняння (1).

Вирази для узагальнених поперечних сил  $V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$ ,  $n, s = 1, 2$  отримаємо із формул (24) через заміну множника  $(D_{12} + 2D_{66})$  на  $(D_{12} + 4D_{66})$ . Величини  $U_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2)$ ,  $V_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2, x_3)$ ,  $X_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2)$ ,  $Y_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2)$ ,  $Z_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2)$ ,  $G_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2)$ ,  $H_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2)$  назвемо координатними функціями переміщень, моментів і поперечних сил.

Для ефективного числового моделювання роботи плитової конструкції на пружній основі отримані співвідношення (21)–(24) подаємо у матричному вигляді [7]:

$$w(x_1, x_2) = [[W]]\{\{R\}\} + W_*, \quad u_1 = [[U]]\{\{R\}\} + U_*, \quad u_2 = [[V]]\{\{R\}\} + V_*,$$

$$M_{11} = [[X]]\{\{R\}\} + X_*, \quad M_{22} = [[Y]]\{\{R\}\} + Y_*, \quad M_{12} = [[Z]]\{\{R\}\} + Z_*,$$

$$Q_1 = [[G]]\{\{R\}\} + G_*, \quad Q_2 = [[H]]\{\{R\}\} + H_*. \quad (25)$$

Введені тут матриці  $[[W]]$ ,  $[[U]]$  і т. д. названі координатними матрицями прогину, переміщень, моментів і поперечних сил.

Моделювання роботи плити полягає в записі крайових умов в окремих вузлових точках на її контурі. Вузлові точки обов'язково повинні бути пронумеровані і задані їх координати. Розбиття контуру плити рівномірне, якщо задані однорідні крайові умови, або частково рівномірне (на окремих сегментах), якщо на контурі задані змішані крайові умови. Їх записують у кожній вузловій точці в криволінійній системі координат, якщо плита не прямокутна. Підвищують точність розв'язку збільшенням кількості вузлових точок на контурі плити та їх оптимальним розміщенням. Можливі два способи розміщення: в кутових точках, а також у місцях прикладення зосереджених опор і в місцях розриву крайових умов, або в околі вказаних точок, які асимптотично наближаються до них. Тут описаний другий спосіб розміщення вузлових точок.

**Числовий приклад.** Прямокутна плита, складена з двох різнорідних плит (макроелементів) однакової ширини  $a_2^{(2)} = a_2^{(1)}$  і товщини  $h$  з різними механічними властивостями (рис. 2). Кожну з плит трактуємо як окремий макроелемент.

Для кожного макроелемента вводимо декартову систему координат  $x_1^{(i)} O x_2^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  з початком в його геометричному центрі. Нумеруємо сторони (рис. 2). Пунктирні лінії означають вільно обіпертий край, а суцільні – вільний

край. До поверхні кожної плити прикладене стале поперечне навантаження  $q^{(1)}, q^{(2)}$ .

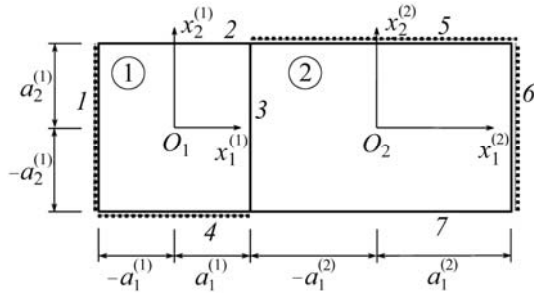


Рис. 2. Схема складеної плити:  
1–7 – нумерація сторін.

Fig. 2. Scheme of a two-component plate: 1–7 – edges numeration.

Задачу розв'язано за таких умов на краях двокомпонентної плити:

$$\begin{aligned}
 w^{(1)}(-a_1^{(1)}, x_2^{(1)}) &= 0; \quad M_{11}^{(1)}(-a_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 0; \\
 M_{22}^{(1)}(x_1^{(1)}, a_2^{(1)}) &= 0; \quad V_2^{(1)}(x_1^{(1)}, a_2^{(1)}) = 0; \\
 w^{(1)}(x_1^{(1)}, -a_2^{(1)}) &= 0; \quad M_{22}^{(1)}(x_1^{(1)}, -a_2^{(1)}) = 0; \quad M_{22}^{(2)}(x_1^{(2)}, a_2^{(2)}) = 0; \quad w^{(2)}(x_1^{(2)}, a_2^{(2)}) = 0; \\
 M_{11}^{(2)}(a_1^{(2)}, x_2^{(2)}) &= 0; \quad w^{(2)}(a_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0; \\
 M_{22}^{(2)}(x_1^{(2)}, -a_2^{(2)}) &= 0; \quad V_2^{(2)}(x_1^{(2)}, -a_2^{(2)}) = 0. \quad (26)
 \end{aligned}$$

На спільному краю 3 двох плит маємо умови ідеального механічного контакту:

$$\begin{aligned}
 w^{(1)}(a_1^{(1)}, x_2^{(1)}) &= w^{(2)}(-a_1^{(2)}, x_2^{(2)}); \quad M_{11}^{(1)}(a_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = M_{11}^{(2)}(-a_1^{(2)}, x_2^{(2)}); \\
 u_1^{(1)}(a_1^{(1)}, x_2^{(1)}) &= u_1^{(2)}(-a_1^{(2)}, x_2^{(2)}); \quad Q_1^{(1)}(a_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = Q_1^{(2)}(-a_1^{(2)}, x_2^{(2)}). \quad (27)
 \end{aligned}$$

Для розрахунку вибрали такі значення жорсткостей плити:  $D_{11}^{(1)} = D_{22}^{(1)} = 1,6 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ ,  $D_{11}^{(2)} = D_{22}^{(2)} = 1,7 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ ,  $D_{12}^{(1)} = 3,2 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ ,  $D_{12}^{(2)} = 3,4 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ ,  $D_{66}^{(1)} = 6,4 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ ,  $D_{66}^{(2)} = 6,8 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ , які отримані на підставі формул, запропонованих М. Т. Губером [9]. Коефіцієнт жорсткості основи  $K_0 = 5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^3$ .

Розміри кожної плити такі:  $2a_1^{(1)} = 4\text{m}$ ,  $2a_2^{(1)} = 4\text{m}$ ,  $2a_1^{(2)} = 6\text{m}$ ,  $2a_2^{(2)} = 4\text{m}$ ,  $h = 0,2\text{m}$ , а інтенсивність навантаження:  $q^{(1)} = 100 \text{ kN/m}^2$ ,  $q^{(2)} = 200 \text{ kN/m}^2$  (верхній індекс вказує на номер плити).

Задача розв'язана в другому наближенні. Для розрахунку вибрали 28 вузлових точок (по чотири на кожному краю плити). На зовнішньому контурі плити в кожній точці записано по дві крайові умови, а на спільному краю 3 – чотири. В результаті задачу звели до системи 64 лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів  $R_{vpk}^{[j]}$  ( $k = 1, 2$ ).

Для порівняння задачу розв'язали МСЕ, використовуючи 1000 скінченних елементів (1071 вузлів). Подані графіки зміни прогинів лінії  $x_1^{(1)} = 2$ ;  $x_1^{(2)} = -3$  стику двох плит (макроелементів) (рис. 3а) та центрального перерізу плити

$x_2^{(1)} = 0; x_2^{(2)} = 0$  (рис. 3b). Цифри 1, 2 відповідають першій та другій плиті. Криві, отримані різними методами, практично збігаються в центральній частині плити, а крайові умови для прогину задовільняються точно. Графіки зміни згинального моменту  $M_{11}$  в тих самих перерізах плити наведені на рис. 4. Зауважимо, що прогини (рис. 3a) та моменти (рис. 4a) на лінії стику двох плит для першого (ММЕ 1) та другого (ММЕ 2) макроелементів збігаються.

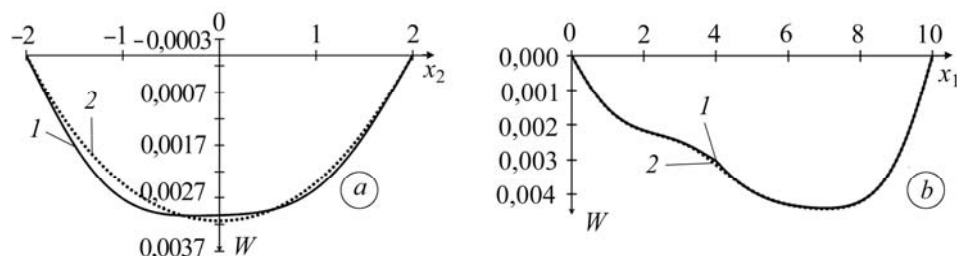


Рис. 3. Прогин лінії стику двох плит ( $x_1 = 4$ ) (a) та центрального перерізу плити ( $x_2 = 0$ ) (b): 1 – результати, отримані ММЕ; 2 – МСЕ.

Fig. 3. Deflection of two plates junction line ( $x_1 = 4$ ) (a) and its central cross section ( $x_2 = 0$ ) (b): 1 – results, obtained by the method of macroelements (MME); 2 – finite element method (FEM).

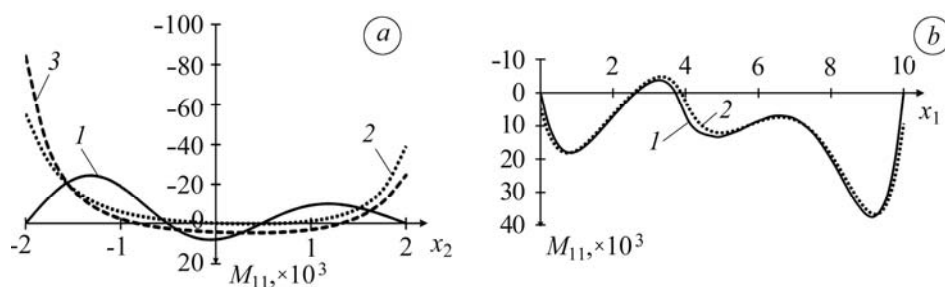


Рис. 4. Зміни моменту  $M_{11}$  на лінії стику двох плит (a: 1 – результати, отримані ММЕ, 2 – МСЕ для першого макроелемента, 3 – МСЕ для другого) та в центральному перерізі ( $x_2 = 0$ ) (b: 1 – результати, отримані ММЕ, 2 – МСЕ).

Fig. 4. Change of moment  $M_{11}$  at the junction line of two plates (a: 1 – results, obtained by MME, 2 – FEM for the first macroelement, 3 – FEM for the second) and at its cross section ( $x_2 = 0$ ) (b: 1 – results, obtained by MME, 2 – FEM).

У кутових точках моменти рівні нулю, оскільки ці точки прийняті як вільно обперті (рис. 4a). Натомість криві, отримані методом скінченних елементів, на лінії стику двох плит дещо розходяться, а поблизу кутових точок не задовільняють крайові умови. Це пов'язано з тим, що під час розрахунку плит МСЕ кінематичні крайові умови задовільняються точно (у кожному вузлі), а статичні умови – наближено (в спосіб варіаційний).

## ВИСНОВКИ

Розроблено метод розрахунку тонких ортотропних складених плит (метод макроелементів), який близький до методу скінченних елементів, але є точніший за нього. Розраховано конструкцію, складену з двох прямокутних ортотропних плит на пружній основі Вінклера. Отримані числові результати порівняно з результатами, одержаними МСЕ. Встановлено, що прогини і моменти, отримані різними методами, добре узгоджуються між собою в центральній частині плити, натомість відрізняються на лінії стику плит. Крім того, моменти, отримані МСЕ, не задовільняють крайову умову. Значно кращі результати дає розроблений ме-

тод, оскільки базується на точному розв'язку рівнянь рівноваги і дозволяє, на відміну від МСЕ, з великою точністю задовольнити крайові умови.

*РЕЗЮМЕ.* Разработан новый подход к расчету тонких ортотропных плит – метод макроэлементов. Он обеспечивает лучшую точность решения в сравнении с известным методом конечных элементов. Рассчитано напряженно-деформированное состояние двухкомпонентной ортотропной плиты на упругой основе Винклера. Результаты, полученные различными методами, близки в центральной части плиты и в зонах задания кинематических граничных условий. При статических граничных условиях результаты существенно отличаются.

*SUMMARY.* The new approach to calculation of thin orthotropic plates resting on Winkler's foundation is developed. The method is called the "macroelement method". It is close to the "finite element method" but it has a higher accuracy of solution. The analysis of a two-component orthotropic plate resting on Winkler's foundation is done. The results obtained by various methods are in good agreement in the central part of the plate and in the regions of kinematic boundary conditions. However, the results differ substantially in the static boundary conditions.

1. Голованов А. П., Тюленева О. Н., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392 с.
2. Клованич С. Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. – Запорожье, 2009. – 400 с.
3. Павленко І. В. Метод скінченних елементів в задачах коливань механічних систем: Навч. посіб. – Суми: СумДУ, 2007. – 178 с.
4. Zienkiewicz O. C. Metoda elementów skończonych. – Warszawa: Arkady, 1972. – 458 s.
5. Делявський М. В., Здолбіцька Н. В., Здолбіцький А. П. Метод конструкційних елементів у розрахунку плит складної конфігурації на пружній основі: Монографія. – Луцьк: ЛНТУ, 2012. – 102 с.
6. Здолбіцька Н. В., Делявський М. В. Моделювання напружено-деформованого стану плит на пружних основах методом конструкційних елементів // Наукові нотатки. Міжвуз. зб. – Луцьк, 2010. – Вип. 27. – С. 105–109.
7. Здолбіцька Н. В., Делявський М. В. Матричний метод розрахунку плит на пружній основі Вінклера // Сільськогосподарські машини: Зб. наук. ст. – Луцьк: Ред.-вид. відділ ЛНТУ, 2009. – Вип. 19. – С. 63–71.
8. Здолбіцька Н. В., Делявський М. В. Напружено-деформований стан тонкої ортотропної плити на трипараметричній пружній основі // Вісник Донецького нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2009. – Вип. 1. – С. 134–140.
9. Huber M. T. Teoria płyt prostokątne-różnokierunkowych wraz z technicznymi zastosowaniami do płyt betonowych, krat belkowych itp. – Lwów: Wydawnictwo Towarzystwa Naukowego, 1921. – 248 s.

Одержано 12.05.2014