УДК 539.3

ПЕРІОДИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З ШОРСТКИМИ ПОВЕРХНЯМИ НА ЛОКАЛЬНИХ ДІЛЯНКАХ

К. А. ЧУМАК, Р. М. МАРТИНЯК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Досліджено термопружну взаємодію двох ізотропних півплощин з періодично розташованими шорсткими ділянками на межі однієї з них. Вплив шорсткостей на теплообмін між тілами враховано контактним термоопором, обернено пропорційним до контактного тиску меж тіл. Контактну задачу зведено до нелінійного сингулярного інтегро-диференціального рівняння та запропоновано ітераційний алгоритм його розв'язування. Проаналізовано вплив густини і напряму теплового потоку на контактні параметри розглянутої структури.

Ключові слова: *термопружний контакт, шорсткість, термічна дистортивність, термоопір, контактний тиск.*

Проблема дослідження температурних полів і термонапруженого стану з'єднань, елементи яких мають шорсткі поверхні, виникає під час проектування і розроблення режимів експлуатації теплообмінників, мікроелектронних приладів, криогенної техніки, ядерних реакторів тощо [1, 2].

За теплопередачі через поверхню спряження тіл шорсткість зумовлює їх неідеальний тепловий контакт, який характеризується контактним термоопором [2, 3]. Його вивченню присвячений окремий розділ теплофізики – теорія контактного теплообміну. Результати експериментальних досліджень вказують на те, що контактний термоопір залежить від контактного тиску поверхонь тіл [1, 3]. Тому у теорії контактного теплообміну для різних пар металів та класів шорсткості встановлено низку напівемпіричних розрахункових залежностей термоопору від контактного тиску [1–4]. Врахування цих залежностей під час розв'язування контактних задач термопружності для тіл з шорсткими поверхнями зумовлює їх суттєву нелінійність [5].

На сьогодні в літературі в основному розглянуто задачі про термопружну взаємодію тіл за умови, що термоопір виникає на всій поверхні їх контакту [6–11]. Проте в інженерній практиці часто використовують технології обробки поверхонь деталей через локальне оплавлення, зміцнення або формування покривів на дискретних ділянках, що зумовлює локальну зміну межових характеристик, зокрема поверхневого термоопору. Водночас під час функціонування вузлів окремі елементи їх поверхонь перебувають у неоднакових умовах, піддаються різній інтенсивності окислення, спрацювання, деструкції під дією середовища, забруднення на різних ділянках. Тому, з практичної точки зору, важливим є дослідження термопружної взаємодії тіл з локальними ділянками зі змінним термоопором.

Раніше вивчено термопружний контакт двох півплощин за наявності на лінії спряження однієї ділянки зі змінним вздовж неї термоопором, незалежним від контактного тиску [12–15], та зі залежним від нього термоопором, зумовленим шорсткістю [16, 17]. Нижче дослідили термомеханічну взаємодію півплощин з шорсткими межами на періодичній системі ділянок.

Контактна особа: К. А. ЧУМАК, e-mail: chumakostya@i.ua

Формулювання задачі. Розглянемо контакт двох півплощин D_1 і D_2 під дією заданих на нескінченності стискальних однорідних зусиль інтенсивності p^∞ та теплового потоку густини q^∞, перпендикулярних до лінії розмежування тіл. Матеріали півплощин вважаються пружними та ізотропними і характеризуються різними модулями Юнґа E_1, E_2, коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2, лінійного теплового розширення α_1, α_2 та теплопровідності λ_1, λ_2. Межа півплощини D_1 є шорстка на періодичній системі ділянок $L = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} L_m$, $L_m = [-a + md, a + md]$ завдовжки $2a$ кожна, які розташовані вздовж усього інтерфейсу з періодом d ($d > 2a$) (рис. 1).

Вважаємо, що в тілах реалізується двовимірне стаціонарне поле температури і стан плоскої деформації. Щоб запобігти глобальному викривленню тіл, зумовленого тепловим потоком густини q^∞, до півплощини D_j ($j = 1, 2$) прикладено лінійно залежні від координати y зусилля σ_{xx}^∞ [18].

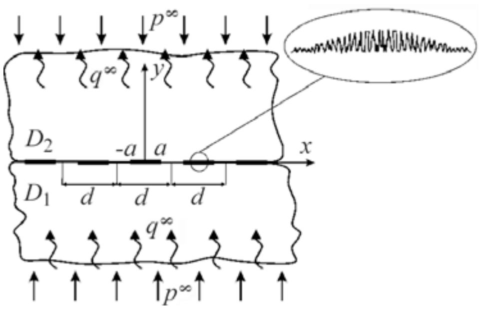

Рис. 1. Контакт півплощин D_1 і D_2 з періодично розташованими шорсткостями.

Fig. 1. Contact of half-planes D_1 and D_2 with periodically located roughnesses.

Шорсткість на кожній з ділянок L_m на макрорівні враховуватимемо контактним термоопором $R(x)$, обернено пропорційним до тиску поверхонь $P(x)$ [17]: $R(x) = f(x) / P(x)$. Тут $f(x)$ – періодична функція, що описує неоднорідність розподілу мікронерівностей вздовж межі.

Контактний термоопір зумовлює неідеальний тепловий контакт тіл на ділянках L_m, через що між поверхнями тіл виникає стрибок температури

$$\gamma(x) = T^-(x,0) - T^+(x,0)\,,\ \ x \in L_m\,,\ \ m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Тут T − температура, індексами "+" та "–" позначено граничні значення функції на осі x у верхній і нижній півплощинах.

На частині інтерфейсу $L' = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} L'_m$, $L'_m = (a + md, -a + (m+1)d)$, де межі тіл гладкі, відбувається ідеальний тепловий контакт тіл. Механічний контакт проходить без тертя вздовж всієї лінії розмежування.

Інтегральний вплив періодичної системи шорстких ділянок на температуру півплощин відчутний в обох тілах навіть на далеких відстанях від лінії спряження і проявляється у вигляді додаткового стрибка температури γ_{av} між ними. Показано [19], що у разі періодичної системи неоднорідностей на межі двох півплощин стрибок температури γ_{av} рівний усередненому за періодом стрибку температури, тобто

$$\gamma_{av} = \frac{1}{d} \int_{-a}^{a} \gamma(x) dx\,.$$

Контактно-крайові умови розглянутої задачі термопружності для півплощин D_1 і D_2 задають так:

$$q_y^- = q_y^+\,, \quad -\infty < x < \infty\,;$$

$$T^{-} = T^{+},\ x \in L'_m,\ T^{-} - T^{+} = R(x) q_y^{+},\ x \in L_m,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

$$\sigma_{yy}^{-} = \sigma_{yy}^{+},\quad \sigma_{xy}^{+} = \sigma_{xy}^{-} = 0;\quad u_y^{+} = u_y^{-};$$

$$q_x^{\infty} = 0,\quad q_y^{\infty} = q^{\infty};$$

$$\sigma_{yy}^{\infty} = -p^{\infty},\quad \sigma_{xy}^{\infty} = 0,\quad \sigma_{xx}^{\infty} = -\frac{\alpha_j E_j q^{\infty}}{\lambda_j (1 - \nu_j)} y \quad (j = 1, 2).$$

Тут q_x, q_y – компоненти вектора теплового потоку; σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} – компоненти тензора напружень; u_y – компонента вектора переміщень у напрямку осі y.

Нелінійне сингулярне інтегро-диференціальне рівняння (СІДР) задачі. Використовуючи метод комплексних потенціалів [20] та розвинуту методику [21, 22], а також враховуючи періодичність задачі, сформульовану задачу зведено до нелінійного СІДР відносно стрибка температури $\gamma(x)$ між шорсткими поверхнями. Нижче це рівняння записано у безрозмірному вигляді:

$$\frac{[\tilde{p}^{\infty} - (\tilde{\delta}_2 - 1)(\tilde{\gamma}(\xi) - \tilde{\gamma}_{av})]}{\tilde{f}(\xi)} \tilde{\gamma}(\xi) - \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\tilde{\gamma}'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{\tilde{Q}^{\infty}}{1 + \xi^2},\ |\xi| < \beta, \qquad (1)$$

Тут $\xi = \mathrm{tg}(\pi x/d)$; $\eta = \mathrm{tg}(\pi t/d)$; $\beta = \mathrm{tg}(\pi a/d)$; $\tilde{\gamma} = \lambda_{12}\delta_1\gamma$; $\tilde{f} = K\lambda_{12} f/d$; $\tilde{P} = KP$; $\tilde{p}^{\infty} = Kp^{\infty}$; $\tilde{Q}^{\infty} = d\delta_1 Q^{\infty}$; $\lambda_{12} = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$; $K = 4(1 - \nu_1^2)/E_1 + 4(1 - \nu_2^2)/E_2$; $\tilde{\gamma}_{av} = \frac{1}{\pi}\int_{-\beta}^{\beta} \frac{\tilde{\gamma}(\xi)}{1 + \xi^2} d\xi$; $\tilde{\delta}_2 = \delta_2/\delta_1$; $\delta_j = \alpha_j(1 + \nu_j)/\lambda_j$ – термічна дистортивність (ТД) матеріалу [23].

Зазначимо, що вираз у квадратних дужках в лівій частині рівняння (1) рівний контактному тиску $\tilde{P}$ шорстких поверхонь:

$$\tilde{P}(\xi) = \tilde{p}^{\infty} - (\tilde{\delta}_2 - 1)(\tilde{\gamma}(\xi) - \tilde{\gamma}_{av}),\ |\xi| < \beta. \qquad (2)$$

Шукана функція стрибка температури повинна задовольняти умову

$$\tilde{\gamma}(\pm\beta) = 0,$$

яка випливає з неперервності температури меж півплощин.

Не обмежуючи загальності, надалі вважатимемо, що $\delta_2 < \delta_1$, тобто ТД δ_2 півплощини D_2 менша, ніж ТД δ_1 півплощини D_1.

Величину $\tilde{Q}^{\infty}$ у правій частині рівняння (1) визначають так: $\tilde{Q}^{\infty} = \tilde{q}^{\infty}$, якщо напрям теплового потоку збігається з напрямом осі $0y$, тобто тепловий потік скерований від тіла з більшою ТД δ_1 до тіла з меншою ТД δ_2; $\tilde{Q}^{\infty} = -\tilde{q}^{\infty}$, якщо напрям теплового потоку протилежний до напряму осі $0y$, тобто тепловий потік скерований від тіла з меншою ТД δ_2 до тіла з більшою ТД δ_1.

Розв'язок задачі і аналіз результатів. Функцію $\tilde{f}(\xi)$, що враховує неоднорідний розподіл мікронерівностей вздовж межі, задамо у вигляді

$$\tilde{f}(\xi) = r(1 - \xi^2/\beta^2)^{3/2},\quad r = \mathrm{const} > 0.$$

Для розв'язування рівняння (1) застосуємо метод послідовних наближень. Задамо значення зовнішніх зусиль $\tilde{p}^{\infty}$ та теплового потоку $\tilde{q}^{\infty}$. Тоді початкове наближення $\tilde{\gamma}_0(\xi)$ функції $\tilde{\gamma}(\xi)$ шукаємо з лінійного СІДР

$$\frac{\tilde{p}^{\infty}}{r(1-\xi^2/\beta^2)^{3/2}}\tilde{\gamma}_0(\xi)-\frac{1}{2}\int_{-\beta}^{\beta}\frac{\tilde{\gamma}_0'(\eta)}{\eta-\xi}d\eta=\frac{\tilde{Q}^{\infty}}{1+\xi^2}, \quad |\xi|<\beta, \quad \tilde{\gamma}_0(\pm\beta)=0, \qquad (3)$$

яке фізично відповідає знехтуванням впливу стрибка температури на контактний тиск ($\tilde{P}_{-1}(\xi)=\tilde{p}^{\infty}$).

Кожне наступне наближення $\tilde{\gamma}_i(\tilde{x})$ $(i=1,2,...)$ стрибка температури $\tilde{\gamma}(\tilde{x})$ шукаємо з лінійного СІДР типу Прандтля

$$\frac{\tilde{P}_{i-1}(\xi)}{r(1-\xi^2/\beta^2)^{3/2}}\tilde{\gamma}_i(\xi)-\frac{1}{2}\int_{-\beta}^{\beta}\frac{\tilde{\gamma}_i'(\eta)}{\eta-\xi}d\eta=\frac{\tilde{Q}^{\infty}}{1+\xi^2}, \quad |\xi|<\beta, \quad \tilde{\gamma}_i(\pm\beta)=0, \qquad (4)$$

яке в лівій частині містить визначений на попередньому кроці ітераційного процесу контактний тиск $\tilde{P}_{i-1}(\xi)=\tilde{p}^{\infty}-(\tilde{\delta}_2-1)(\tilde{\gamma}_{i-1}(\xi)-\tilde{\gamma}_{av,i-1})$.

У ліву частину рівнянь типу Прандтля (3), (4) входить відношення шуканої функції $\tilde{\gamma}_i(\xi)$ і функції $\tilde{F}_{i-1}(\xi)=r(1-\xi^2/\beta^2)^{3/2}/\tilde{P}_{i-1}(\xi)$ $(i=0,1,2,...)$, яка належить до класу функцій, що рівні нулю разом з їх першими похідними у крайніх точках відрізку інтегрування ($\tilde{F}_{i-1}(\pm\beta)=\tilde{F}_{i-1}'(\pm\beta)=0$). У працях [21, 22] розробили аналітично-числову методику розв’язування СІДР типу Прандтля саме для такого класу функцій $\tilde{F}_{i-1}(\xi)$. Тому цю методику використали під час знаходження розв’язків рівнянь типу Прандтля (3) і (4).

За критерій зупинки ітераційного процесу вибрали виконання умови $\varepsilon_i \le 10^{-5}$, де $\varepsilon_i=[\tilde{\gamma}_i(\xi)-\tilde{\gamma}_{i-1}(\xi)]/\tilde{\gamma}_i(\xi)$ − відносна похибка i-го наближення стрибка температури $\tilde{\gamma}_i(\xi)$. Досягнувши заданої точності, шуканій функції $\tilde{\gamma}(\xi)$ присвоюється значення $\tilde{\gamma}_i(\xi)$ на останній ітерації. Підставивши знайдену функцію $\tilde{\gamma}(\xi)$ у формулу (2), знайдемо контактний тиск $\tilde{P}(\xi)$ поверхонь тіл.

Нижче наведено результати числової реалізації описаного алгоритму для $\tilde{r}=0,001$, $\tilde{\delta}_2=0,5$ та $2a/d$ = 0,4. Зазначимо, що параметр $2a/d$ характеризує частину лінії контакту вздовж періоду d, на якій міститься ділянка з шорсткими поверхнями. Інтенсивність $\tilde{p}^{\infty}$ зовнішніх зусиль вважаємо рівною 0,01.

Вплив густини та напряму теплового потоку на розподіл контактного тиску $\tilde{P}$ та стрибка температури $\tilde{\gamma}$ між межами півплощин уздовж півперіоду $0\le\tilde{x}\le 1/2$ $(\tilde{x}=x/d)$ проілюстровано на рис. 2. З віддаленням від центру ділянки з шорсткими поверхнями до її кінця контактний тиск $\tilde{P}$ монотонно спадає для теплового потоку до тіла з меншою ТД та монотонно зростає у разі протилежного напряму теплового потоку (рис. 2*a*). Поза шорсткими ділянками, де межі гладкі і реалізується їх ідеальний тепловий контакт, контактний тиск є постійний та рівний $\tilde{p}^{\infty}+(\tilde{\delta}_2-1)\tilde{\gamma}_{av}$. Що більша густина $\tilde{q}^{\infty}$ теплового потоку, то суттєвіше відхилення контактного тиску $\tilde{P}$ від постійного тиску $\tilde{p}^{\infty}=0,01$, який виникає за суто механічної взаємодії тіл, причому це відхилення є завжди більше для теплового потоку до тіла з більшою ТД.

Стрибок температури $\tilde{\gamma}(\tilde{x})$ $(\tilde{x}=x/d)$ між поверхнями тіл на ділянках з шорсткостями збільшується зі зростанням густини $\tilde{q}^{\infty}$ прикладеного теплового потоку (рис. 2*b*). При цьому за сталого термомеханічного навантаження стрибок температури є завжди більшим для теплового потоку до тіла з більшою ТД.

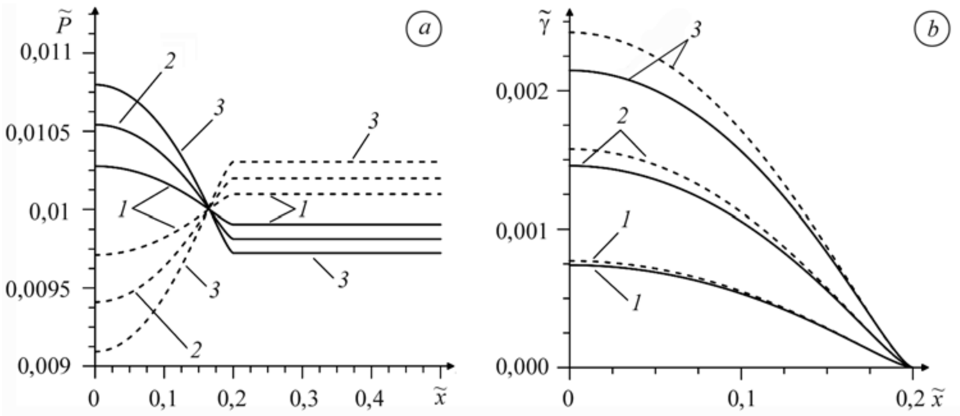

Рис. 2. Розподіл контактного тиску $\tilde{P}$ (*a*) та стрибка температури $\tilde{\gamma}$ (*b*) за відносної довжини шорсткості $2a/d = 0{,}4$ та різної густини теплового потоку: *1* – $\tilde{q}^{\infty} = 0{,}01$; *2* – 0,02; *3* – 0,03 (суцільні криві відповідають напряму теплового потоку до тіла з меншою ТД $(\tilde{Q}^{\infty} > 0)$, штрихові – протилежному напряму потоку $(\tilde{Q}^{\infty} < 0)$).

Fig. 2. Distribution of contact pressure, $\tilde{P}$, (*a*) and temperature jump, $\tilde{\gamma}$, (*b*) for the relative length of roughness $2a/d = 0.4$ and different density of heat flow: *1* – $\tilde{q}^{\infty} = 0.01$; *2* – 0.02; *3* – 0.03 (solid curves correspond to the direction of heat flow to the solid with the smaller thermal distortivity $(\tilde{Q}^{\infty} > 0)$, dashed curves – to the opposite direction of heat flow $(\tilde{Q}^{\infty} < 0)$).

ВИСНОВКИ

Досліджено термомеханічну взаємодію двох ізотропних півплощин з шорсткими межами на періодичній системі ділянок. Вплив шорсткостей на теплопередачу між тілами на макрорівні враховано контактним термоопором, залежним від координати межі й обернено пропорційним до контактного тиску.

Сформульовану контактну задачу термопружності зведено до нелінійного сингулярного інтегро-диференціального рівняння відносно стрибка температури між поверхнями тіл з шорсткостями, для розв'язування якого запропоновано ітераційну процедуру.

Проаналізовано вплив густини і напряму теплового потоку на контактну поведінку системи і встановлено, що зі зростанням густини теплового потоку контактний тиск на шорстких ділянках збільшується для теплового потоку до тіла з меншою термічною дистортивністю та зменшується для теплового потоку до тіла з більшою дистортивністю; що більша густина теплового потоку, то суттєвіше відхилення контактного тиску шорстких поверхонь від постійного тиску, який виникає за суто механічної взаємодії тіл; стрибок температури між поверхнями тіл на ділянках з шорсткостями зростає разом з тепловим потоком та є завжди більшим для теплового потоку до тіла з більшою дистортивністю.

РЕЗЮМЕ. Исследовано термоупругое взаимодействие двух изотропных полуплоскостей с периодически расположенными шероховатыми участками на границе одной из них. Влияние шероховатостей на теплообмен между телами учитывается контактным термосопротивлением, обратно пропорциональным к контактному давлению границ тел. Контактная задача сведена к нелинейному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению и предложен итерационный алгоритм его решения. Проанализировано влияние плотности и направления теплового потока на контактные параметры рассмотренной структуры.

SUMMARY. The thermoelastic interaction of two isotropic half-planes in the presence of rough areas periodically located on the boundary of one of the half-planes is investigated. The effect of roughness on the heat transfer between solids is taken into account by the thermal contact resistance, which is inversely proportional to the contact pressure of the solid boundaries.

The contact problem is reduced to the nonlinear singular integrodifferential equation, and the iterative algorithm is proposed to solve this equation. The influence of the density and direction of heat flow on the contact parameters of the considered structure is analyzed.

Робота виконана за підтримки гранту 23-08-12 Національної академії наук України.

1. *Шлыков Ю. П., Ганин Е. А., Царевский С. Н.* Контактное термическое сопротивление. – М.: Энергия, 1977. – 328 с.
2. *Madhusudana C. V.* Thermal contact conductance. – New York: Springer-Verlag, 1996. – 165 p.
3. *Madhusudana C. V. and Fletcher L. S.* Contact heat transfer – the last decade // AIAA J. –1986. – **24**. – P. 510–523.
4. *Cooper G. M., Mikic B. B., and Yovanovich M. M.* Thermal contact conductance // Int. J. Heat. Mass. Transfer. – 1969. – **12**. – P. 279–300.
5. *Barber J. R.* Thermoelasticity and contact // J. Thermal Stresses. – 1999. – **22**. – P. 513–525.
6. *Comninou M. and Barber J. R.* The thermoelastic Hertz problem with pressure dependent contact resistance // Int. J. Mech. Sci. – 1984. – **26**. – P. 549-554.
7. *Харитонов В. В., Якутин Н. В.* Контактный теплообмен разнородных материалов // Журн. техн. физики. – 1997. – **67**, № 2. – С. 1–6.
8. *Chuan Li and Barber J. R.* Stability of thermoelastic contact of two layers of dissimilar materials // J. Thermal Stresses. – 1997. – **20**. – P. 169–184.
9. *Гриліцький Д. В.* Термопружні контактні задачі в трибології. – К.: ІЗМН, 1996. – 204 с.
10. *Олесяк З. С., Євтушенко О. О., Кульчицький-Жигайло Р. Д.* Про контакт двох нагрітих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – **31**, № 5. – С. 32–39.
(*Olesiak Z. S., Evtushenko O. O., and Kul'chyts'kyi-Zhyhailo R. D.* On the contact of two heated bodies // Materials Science. – 1995. – **31**, № 5. – P. 567–575.)
11. *Киликовская О. А.* Термоупругие напряжения в многослойном цилиндре при теплопередаче, зависящей от давления на поверхности контакта // Прикл. механика. – 1973. – **9**, № 10. – С. 40–46.
12. *Shvets R. N. and Martynyak R. M.* Thermoelastic contact interaction of bodies in the presence of surface thermophysical irregularities // J. Math. Sci. − 1992. – **62**. – P. 2512–2517.
13. *Krishtafovich A. A. and Martynyak R. M.* Thermoelastic contact of anisotropic half spaces with thermal resistance // Ibid. – 1998. – **34**, №7. – P. 629–634.
14. *Krishtafovich A. A. and Martynyak R. M.* Lamination of anisotropic half-spaces in the presence of contact thermal resistance // Int. Appl. Mech. – 1999. – **35**, № 2. – P. 159–164.
15. *Мартиняк Р. М., Чумак К. А.* Термопружне розшарування тіл за наявності теплопроникного заповнювача міжконтактного просвіту // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 4. – С. 45–52.
(*Martynyak R. M. and Chumak K. A.* Thermoelastic delamination of bodies in the presence of a heat-conducting filler of the intercontact gap // Materials Science. – 2009. – **45**, № 4. – P. 513–522.)
16. *Martynyak R. M.* Thermal stress state of a bimaterial with a closed interfacial crack having rough surfaces // J. Math. Sci. – 2011. – **176**. – P. 578–589.
17. *Мартыняк Р. М., Чумак К. А.* Термоупругость контактной пары при наличии шероховатости на локальном участке сопряженных поверхностей // Теор. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 32–38.
18. *Comninou M. and Dundurs J.* On lack of uniqueness in heat conduction through a solid to solid contact // ASME J. Heat Transfer. – 1980. – **102**. – P. 319–323.
19. *Das A. K. and Sadhal S. S.* A note on the evaluation of thermal constriction resistance for finite thickness gaps // Ibid. – 1997. – **119**. – P. 177–180.
20. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
21. *Martynyak R. M. and Chumak K. A.* Thermoelastic contact of half-spaces with equal thermal distortivities in the presence of a heat-permeable intersurface gap // J. Math. Sci. – 2010. – **165**. – P. 355–370.
22. *Мартыняк Р. М., Чумак К. А.* Неполный контакт полупространств при воздействии теплового потока, направленного к материалу с меньшей термической дистортивностью // Теор. и прикл. механика. – 2008. – Вып. 43. – С. 9–15.
23. *Dundurs J. and Panek C.* Heat conduction between bodies with wavy surfaces // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1976. – **19**. – P. 731–736.

Одержано 12.07.2011