УДК 510.6, 681.3.06

М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк

ІЄРАРХІЯ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ ЛОГІК

Запропонована ієрархія композиційно-номінативних логік. Такі логіки будуються в семантико-синтаксичному стилі на основі композиційно-номінативного підходу. Місце логіки в ієрархії визначається рівнем абстракції розгляду та обмеженнями класу предикатів. Стосовно екстенсійного аспекту предметних областей запропоновані логіки квазіарних предикатів та логіки номінативних даних, стосовно інтенсійного аспекту — композиційно-номінативні модальні логіки.

Вступ

Використання сучасних інформаційних технологій в різних галузях діяльності людини веде до невпинного розширення сфери застосування математичної логіки. Це зумовило появу низки логічних формалізмів, орієнтованих на відображення тих чи інших особливостей відповідних предметних областей. Таке розмаїття логік робить актуальною проблему інтеграції та уніфікації логічних формалізмів. Вельми плідним для вирішення зазначеної проблеми нам видається композиційно-номінативний підхід [1], що має за мету побудову ієрархії логік різного рівня абстрактності та загальності на єдиній з програмуванням методологічній основі. Композиційно-номінативний підхід базується на принципах композиційності [2] та номінативності [1], він опирається на добре відомий загальнометодологічний принцип розвитку як сходження від абстрактного до конкретного. Такий підхід можна розглядати як подальший розвиток запропонованого В.Н. Редьком [2] композиційного програмування.

Побудова ієрархії логік є дуже складною задачею, проте вже зараз можна окреслити певні логічні формалізми, які займають в цій ієрархії особливе місце. В першу чергу це класична логіка предикатів [3, 4]. Особливе місце класичної логіки визначається тим, що вона є основою багатьох спеціальних логік (модальних, темпоральних, епістемічних, релевантних та інших) і детально досліджена. Класична логіка широко використовується для розв'язку різноманітних задач програмування та моделювання, для неї побудовано багато систем автоматизованого доведення.

Проте класична логіка предикатів, попри численні позитивні властивості, має багато обмежень, які ускладнюють її застосування в моделюванні та програмуванні. Така логіка орієнтується на традиційні математичні структури тотальних детермінованих скінченно-арних функцій та предикатів, вона недостатньо враховує неповноту, частковість інформації про предметну область, її динаміку. Нічого дивного тут немає, адже класична математична логіка створювалась на базі наявного тоді математичного апарату, що використовував однозначні тотальні n-арні функції та предикати. У той же час в програмуванні та моделюванні широко застосовуються набагато потужніші класи часткових відображень над структурованими даними.

Таким чином, особливої актуальності набуває проблема розбудови нових логік, які базуються на істотно загальніших класах відображень. На основі проведеного в [5] аналізу класичної логіки можна стверджувати, що такими мусять бути часткові відображення, задані на довільних наборах іменованих значень — квазіарні відображення.

Згідно композиційно-номінативного підходу логіки будуємо в семантико-синтаксичному стилі:

1. Фіксуємо рівень абстракції розгляду предметних областей.
2. Будуємо відповідні розглянутому рівню абстракції математичні моделі предметних областей, які задають семантичні аспекти логік.
3. Будуємо формально-аксіоматичні логічні числення. Такі числення задають синтаксичні аспекти логік.

1. Композиційно-номінативні логіки часткових предикатів

Стосовно екстенсійного аспекту предметних областей нами пропонуються композиційно-номінативні логіки часткових предикатів. Згідно принципу розвитку, побудову таких логік починаємо з гранично абстрактних рівнів, поступово їх конкретизуючи. Такі рівні відрізняються трактуванням рівня абстракції множини даних.

1.1. Пропозиційний рівень. На пропозиційному рівні дані трактуються гранично абстрактно як "чорні" скриньки. Це означає, що жодна властивість даних не є доступною. На цьому рівні предикати мають вигляд $A \to \{T, F\}$, де A — множина абстрактних даних.

Базовими композиціями фінітарних логік пропозиційного рівня є композиції диз'юнкції $\vee$ та заперечення $\neg$ Кліні.

Інфінітарні пропозиційні логіки досліджені в [6]. Для вивчення пропозиційних композицій будується інфінітарна пропозиційна алгебра Кліні. Операціями такої алгебри і, відповідно, базовими композиціями інфінітарних пропозиційних логік є композиції диз'юнкції $\vee_K$, кон'юнкції $\&_K$ та заперечення $\neg_K$. Композиції $\vee_K$ та $\&_K$ є множинними інфінітарними аналогами диз'юнкції $\vee$ та кон'юнкції $\&$ Кліні.

1.2. Сингулярний рівень. Наступний рівень виникає при діалектичному запереченні властивості граничної абстрактності даних. Такий рівень називається сингулярним, він може трактуватися як гранична конкретизація пропозиційного рівня. У цьому випадку дані розглядаються гранично конкретно як "білі" скриньки. На сингулярному рівні фіксується єдиний клас даних, що пояснює його назву. Логіки відповідного рівня називаються сингулярними. Для дослідження сингулярних логік будується [6] спеціальна інфінітарна алгебра сингулярних композицій Кліні.

1.3. Номінативний рівень. Подальший розвиток приводить до класів логік, для яких рівень розгляду даних є синтезом двох перших рівнів. На цьому рівні дані розглядаються як "сірі" скриньки, побудовані з "білих" і "чорних" скриньок. Такі дані називаються номінативними. Номінативні дані будуються індуктивно із множини предметних імен та множини предметних значень. Відповідні логіки будемо відносити до номінативного рівня. На відміну від двох перших рівнів, що визначають порівняно прості класи логік, номінативний рівень є дуже багатим.

1.3.1. Рівень іменних множин. Однорівневі однозначні номінативні дані називають *іменними множинами* (ІМ).

V-ІМ над A — це однозначні відображення типу $V \to A$ із множини предметних імен V у множину предметних значень A. Множину всіх V-ІМ над A позначимо ${}^{V}A$. Множину всіх скінченних V-ІМ над A позначимо ${}^{V}A_F$.

V-ІМ задаватимемо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1, ..., v_n \mapsto a_n, ...]$ (тут $v_i \in V$, $a_i \in A$, причому $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$).

V-*повна ІМ над* A — це тотальна однозначна функція із V в A.

Множину всіх V-повних ІМ над A позначимо A^V.

Для V-ІМ вводимо операцію звуження за множиною $X \subseteq V$: $\delta \| X = [v \mapsto a \in \delta \mid v \in X]$. Замість $\delta \| (V \backslash \{x\})$ для спрощення будемо писати $\delta \Vdash x$. Вводимо функцію $im: {}^{V}A \to 2^{V}$, визначену умовою $im(\delta) = pr_1(\delta)$.

Довільну функцію вигляду ${}^{V}A \to R$ назвемо V-*квазіарною функцією*.

Розглянемо квазіарні функції двох типів.

Функцію вигляду $P: {}^{V}A \to \{T, F\}$ назвемо V-*квазіарним предикатом на* A.

Функцію вигляду $f: {}^{V}A \to A$ назвемо V-*квазіарною функцією на* A.

Множини V-квазіарних функцій та V-квазіарних предикатів на A відповідно позначаємо Fn^A та Pr^A.

V-квазіарний предикат P (частково) *істинний*, якщо для довільних $d \in {}^{V}A$ із умови $P(d)\downarrow$ випливає $P(d) = T$.

1.3.1.1. Реномінативний рівень. Найбільш абстрактними серед логік номінативного рівня є реномінативні логіки. Починаючи з реномінативного рівня можна перейменовувати компоненти даних. Це дає змогу ввести композицію реномінації (перейменування).

Базовими композиціями фінітарних реномінативних логік є $\vee$, $\neg$ та реномінація $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Композиція *реномінації* $\boldsymbol{R}: ({}^{V}A \to R) \times {}^{V}V_F \to ({}^{V}A \to R)$ задається так:

$$\boldsymbol{R}(f, [v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n])(d) = f([v_1 \mapsto d(x_1), ..., v_n \mapsto d(x_n)] \cup (d \| (V \backslash \{v_1, ..., v_n\}))).$$

При фіксуванні множини пар імен $[v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n]$ говоримо про параметричну реномінацію $\boldsymbol{R}^{[v_1 \mapsto x_1, ..., v_n \mapsto x_n]}: ({}^{V}A \to R) \to ({}^{V}A \to R)$, яку традиційно позначаємо $\boldsymbol{R}_{x_1, ..., x_n}^{v_1, ..., v_n}$. Ввівши позначення вигляду $\bar{y}$ для $y_1, ..., y_n$, замість $\boldsymbol{R}_{x_1, ..., x_n}^{v_1, ..., v_n}$ також пишемо $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Для реномінативних логік композиція реномінації визначається на множині Pr^A.

Фінітарна реномінативна логіка досліджена в [7].

Інфінітарна реномінативна логіка запропонована і досліджена в роботі [8]. Базовими композиціями такої логіки є $\vee_K$, $\&_K$, $\neg_K$ та інфінітарна параметрична реномінація $\boldsymbol{R}^{\rho}$.

Інфінітарну реномінацію $\boldsymbol{R}^{\rho}: ({}^{V}A \to R) \to ({}^{V}A \to R)$, де $\rho = [v_i \mapsto x_i]_{i \in I} \in {}^{V}V$, задамо так:

$$\boldsymbol{R}^{\rho}(f)(d) = f([v_i \mapsto d(x_i)]_{i \in I} \cup (d \| (V \backslash \{v_i\}_{i \in I}))),$$

якщо $d(x_i)\downarrow$ для всіх $i \in I$. В усіх інших випадках вважаємо $\boldsymbol{R}^{\rho}(f)(d)\uparrow$.

Таким чином, на відміну від $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, реномінація $\boldsymbol{R}^{\rho}$ строга.

У [8] побудоване екваційне числення інфінітарної реномінативної логіки, доведені коректність і повнота такого числення.

1.3.1.2. Кванторний рівень. На цьому рівні можна застосовувати квазіарні предикати до всіх предметних значень, що дозволяє ввести композиції квантифікації $\exists x$ та $\forall x$. Базовими композиціями фінітарних логік кванторного рівня є композиції $\vee$, $\neg$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$.

Фінітарні логіки кванторного рівня названі кванторними логіками, вони досліджувались, зокрема, в [5, 9–11].

Інфінітарна логіка кванторного рівня запропонована в [12]. Базовими композиціями інфінітарних кванторних логік є $\vee_K$, $\&_K$, $\neg_K$, R^{ρ} та $\exists x$.

1.3.1.3. Кванторно-еквацційний рівень. На цьому рівні з'являються можливості ототожнення і розрізнення значень предметних імен з використанням спеціальних предикатів рівності $=_{xy}$.

Фінітарні логіки кванторно-еквацційного рівня названі кванторними логіками з рівністю, вони досліджені в [13]. Базовими композиціями таких логік є композиції $\vee$, $\neg$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$.

1.3.1.4. Функціональний рівень. Тут маємо розширені можливості формування нових аргументів для функцій та предикатів. Це дає змогу ввести композицію суперпозиції $S^{\bar{x}}$.

Нехай F^A та Fn^A — множини всіх функцій вигляду ${}^V A \to R$ та ${}^V A \to A$ відповідно.

Композицією *суперпозиції* назвемо композицію S: $F^A \times {}^V(Fn^A)_F \to F^A$, задану так:

$$S(f, [v_1 \mapsto g_1, ..., v_n \mapsto g_n])(d) = f([v_1 \mapsto g_1(d), ..., v_n \mapsto g_n(d)] \cup (d \| (V \backslash \{v_1, ..., v_n\}))).$$

При фіксуванні множини імен $\{v_1, ..., v_n\}$ маємо параметричну $(n+1)$-арну композицію суперпозиції $S^{v_1,...v_n}$: $F^A \times (Fn^A)^n \to F^A$. Така композиція V-квазіарним функціям f, g_1, ..., g_n зіставляє V-квазіарну функцію $S^{v_1,...v_n}(f, g_1, ..., g_n)$, значення якої обчислюється так:

$$S^{v_1,...v_n}(f, g_1, ..., g_n)(d) = f([v_1 \mapsto g_1(d), ..., v_n \mapsto g_n(d)] \cup (d \| (V \backslash \{v_1, ..., v_n\}))).$$

При конкретизації множини V-квазіарних функцій як множини $Fn^A \cup Pr^A$ природно говорити про суперпозиції двох типів:

- суперпозиції $(Fn^A)^{n+1} \to Fn^A$ функцій в функції (результатом є функція);
- суперпозиції $Pr^A \times (Fn^A)^n \to Pr^A$ функцій в предикати (результатом є предикат).

Для роботи з окремими компонентами даних в множині Fn^A виділимо множину спеціальних *функцій деномінації* (*розіменування*) $Nf^A = \{'v \mid v \in V\}$. Тоді композицію реномінації можна промоделювати за допомогою композиції суперпозиції:

$$R_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(f) = S^{v_1,...v_n}(f, 'x_1, ..., 'x_n).$$

Ввівши позначення вигляду $\bar{v}$ для $v_1, ..., v_n$, замість $S^{v_1,...v_n}$ також пишемо $S^{\bar{v}}$.

Базовими фінітарними композиціями функціонального рівня є $\vee$, $\neg$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$, $S^{\bar{x}}$.

При введенні функцій розіменування $'x$ базовими фінітарними композиціями функціонального рівня вважаємо композиції $\vee$, $\neg$, $\exists x$, $S^{\bar{x}}$.

1.3.1.5. Функціонально-еквацційний рівень. На додаток до можливостей функціонального рівня функціонально-еквацційний рівень дає змогу ототожнювати і розрізняти предметні значення. На цьому рівні можна ввести спеціальну композицію рівності $=$: $Fn^A \times \times Fn^A \to Pr^A$. Така композиція V-квазіарним функціям f та g зіставляє V-квазіарний предикат $=(f, g)$:

$$=(f,g)(d)=\begin{cases} T, \text{ якщо } f(d)\downarrow \text{ та } g(d)\downarrow \\ \quad \text{та } f(d)=g(d), \\ F, \text{ якщо } f(d)\downarrow \text{ та } g(d)\downarrow \\ \quad \text{та } f(d)\neq g(d), \\ \text{невизначене, якщо} \\ \quad f(d)\uparrow \text{ або } g(d)\uparrow. \end{cases}$$

Базовими фінітарними композиціями функціонально-еквацiйного рівня є $\vee$, $\neg$, $\exists x$, $S^{\bar{x}}$, $=$.

Фінітарні логіки функціонального і функціонально-еквацiйного рівня досліджувались, зокрема, в [14–16].

1.3.2. Ієрархічно-номінативний рівень. На наступному рівні абстракції елементи множини даних можна розглядати як ієрархічні номінативні дані. Відповідні логіки названі логіками номінативних даних (ЛНД), вони досліджені в [17]. Логіки номінативних даних будуються в стилі теорії допустимих множин. Доведена несуперечливість аксіоматичної теорії ЛНД.

На основі ЛНД визначається клас багатозначних натурально (абстрактно) обчислюваних функцій над номінативними даними. Такий клас можна подати за допомогою Σ-предикатів ЛНД.

2. Фінітарні логіки квазіарних предикатів

В цьому розділі детальніше розглянемо фінітарні композиційно-номінативні логіки квазіарних предикатів. Для стислості наводимо визначення для логік кванторного рівня.

Семантичними моделями логік квазіарних предикатів є композиційні алгебри квазіарних предикатів $(Pr^A, \boldsymbol{C})$. Множина композицій $\boldsymbol{C}$ задається базовими композиціями $\vee$, $\neg$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$.

Побудова композиційної алгебри квазіарних предикатів дає змогу визначити мову логіки квазіарних предикатів. *Алфавіт* мови складається з множини V предметних імен, множини Ps предикатних символів, а також символів базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$.

Множина $\boldsymbol{Fr}$ *формул* мови логіки визначається індуктивно:

1. Кожний предикатний символ є формулою. Такі формули назвемо атомарними.
2. Нехай Φ та Ψ – формули. Тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$, $\exists x\Phi$ – формули.

При фіксуванні множини базових композицій композиційна алгебра $(Pr^A, \boldsymbol{C})$ цілком визначається алгебраїчною системою (A, Pr^A). Для визначення семантики мови задамо відображення інтерпретації $\boldsymbol{I}: Ps \rightarrow Pr^A$. Пару $((A, Pr^A), \boldsymbol{I})$ назвемо алгебраїчною системою (АС) квазіарних предикатів з доданою сигнатурою. Такі АС позначаємо у вигляді $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$.

Відображення $\boldsymbol{I}$ продовжимо до відображення $\boldsymbol{J}: \boldsymbol{Fr} \rightarrow Pr^A$:

1. $\boldsymbol{J}(p) = \boldsymbol{I}(p)$ для кожного $p \in Ps$.
2. $\boldsymbol{J}(\neg\Phi) = \neg\boldsymbol{J}(\Phi)$, $\boldsymbol{J}(\vee\Phi\Psi) = \vee(\boldsymbol{J}(\Phi), \boldsymbol{J}(\Psi))$, $\boldsymbol{J}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{J}(\Phi))$, $\boldsymbol{J}(\exists x\Phi) = \exists x(\boldsymbol{J}(\Phi))$.

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$, що є значенням формули Φ при інтерпретації на $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, позначимо Φ_A.

Для формул мови логіки традиційним чином вводимо наступні поняття.

Формула Φ *істинна при інтерпретації на* $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, або $\boldsymbol{A}$-істинна, якщо Φ_A – частково істинний предикат. Це позначаємо $\boldsymbol{A} \models \Phi$.

Формула Φ *всюди істинна*, якщо $\boldsymbol{A} \models \Phi$ на кожній $\boldsymbol{A}$. Це позначаємо $\models \Phi$.

Формула Ψ є *логічним наслідком* формули Φ, що позначаємо $\Phi \models \Psi$, якщо $\models \Phi \rightarrow \Psi$.

Формули Φ та Ψ *логічно еквівалентні*, що позначаємо $\Phi \sim \Psi$, якщо $\Phi \models \Psi$ та $\Psi \models \Phi$.

Клас квазіарних предикатів дуже потужний, тому для збереження основних властивостей класичної логіки його варто обмежити.

2.1. Логіки повнототальних еквітонних предикатів. Дуже природне обмеження задається властивістю еквітонності [18], яка означає, що значення відображення не змінюється при розширенні, поповненні даних. Таке обмеження справджується і для класичної логіки.

Предикат *P еквітонний* (ЕП), якщо для довільних $d, d' \in {}^{V}\!A$ із $d' \supseteq d$ та $P(d)\downarrow$ випливає $P(d')\downarrow = P(d)$.

Друге важливе обмеження, яке теж вірне для класичної логіки, є повнототальність предикатів. Повнототальність означає визначеність предиката на максимальних даних, тобто на V-повних ІМ.

Предикат *P повнототальний*, якщо $P(d)\downarrow$ для всіх $d \in A^V$.

Додатковою вимогою до семантичних моделей логік повнототальних ЕП є наявність нескінченної множини тотально неістотних [5] предметних імен, тобто імен, неістотних для кожного $p \in Ps$. Це необхідно для можливості виконання еквівалентних перетворень довільних формул.

Логіки повнототальних еквітонних предикатів є найближчими до класичної логіки. Вони названі [5] неокласичними (НКЛ), оскільки зберігають основні закони класичної логіки при істотному розширенні класу семантичних моделей. Це дозволяє краще використати теоретичні результати і багатий досвід застосування класичної логіки в програмуванні та моделюванні.

Для логік повнототальних ЕП відповідного рівня збудовані [10, 13, 16] аксіоматичні системи Гільбертівського типу, названі неокласичними численнями. Для таких числень доведені теореми несуперечливості та повноти.

Нехай ***T*** — неокласичне числення. Те, що формула Φ є теоремою числення ***T***, позначимо ***T***$\vdash \Phi$. Те, що Φ істинна на кожній моделі числення ***T***, позначимо ***T***$\models \Phi$.

Теорема 1 (коректності). *Нехай* ***T***$\vdash \Phi$. *Тоді* ***T***$\models \Phi$.

Теорема 2 (повноти). *Нехай* ***T***$\models \Phi$. *Тоді* ***T***$\vdash \Phi$.

2.2. Логіки еквітонних предикатів. Такі логіки теж можна віднести до неокласичних, вони зберігають основні закони класичної логіки. Проте для логік ЕП вже не діють [11] деякі правила виведення (*modus ponens* та споріднене з ним правило перетину).

Приклад 1. На АС ***M*** задамо предикат A_M як усюди невизначений, предикат B_M — як тотожно хибний. Тоді предикат $(A \to B)_M$ теж усюди невизначений. Отже, для конкретних семантичних моделей (АС) можливо ***M***$\models A$ та ***M***$\models A \to B$, адже предикати A_M та $(A \to B)_M$ частково істинні, але ***M***$\not\models B$.

Для логіки ЕП порушуються також деякі інші властивості класичної логіки.

Приклад 2. Для конкрентних семантичних моделей можливо ***M***$\models A \leftrightarrow B$, ***M***$\models B \leftrightarrow C$, але ***M***$\not\models A \leftrightarrow C$. Справді, задамо предикат A_M як тотожно істинний, предикат B_M — як усюди невизначений, C_M — як тотожно хибний предикат.

Клас моделей логіки ЕП істотно ширший за клас моделей логіки повнототальних ЕП.

Відмова від *modus ponens* веде до необхідності проводити дослідження синтаксичних властивостей логік ЕП на базі не Гільбертівських, а Генценівських систем — секвенційних числень [3, 19]. Такі числення збудовані [14, 20, 21] для логік ЕП відповідного рівня.

Семантичною основою побудови секвенційних числень є властивості відношення $\models$ логічного наслідку для множин формул.

Нехай $\mathbf{\Gamma}$ та $\mathbf{\Delta}$ — множини формул певної мови сигнатури Ps.

$\mathbf{\Delta}$ є *логічним наслідком* $\mathbf{\Gamma}$, якщо для всіх АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ сигнатури Ps для всіх $d \in {}^{V}A$ із того, що $\Phi_A(d) = T$ для всіх $\Phi \in \mathbf{\Gamma}$, випливає: неможливо $\Psi_A(d) = F$ для всіх $\Psi \in \mathbf{\Delta}$.

Те, що $\mathbf{\Delta}$ є логічним наслідком $\mathbf{\Gamma}$, позначаємо $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$.

Важливою властивістю відношення $\models$ є теорема про заміну еквівалентних:

Теорема 3. *Нехай* $\Phi \sim \Psi$. *Тоді* $\Phi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta} \Leftrightarrow \Psi, \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$ та $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Phi \Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, \Psi$.

Семантичні властивості відношення $\models$ безпосередньо відтворюють відповідні властивості формул, пов'язані з композиціями. Згідно теореми 4, кожна така властивість розщеплюється на дві властивості для $\models$, коли еквівалентні формули знаходяться зліва від $\models$ та справа від $\models$.

Властивості відношення $\models$ для логік відповідного рівня розглянуті в [14, 20, 21]. Для прикладу наведемо властивості $R\vee_{\vdash}$ та $R\vee_{\dashv}$, пов'язані з дистрибутивністю реномінації відносно диз'юнкції:

$$R\vee_{\vdash})\quad R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}.$$

$$R\vee_{\dashv})\quad \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi).$$

Формально-аксіоматичні системи, які формалізують відношення логічного наслідку між двома множинами формул, назвемо секвенційними численнями.

Секвенцією назвемо, як і в [19], довільну множину специфікованих формул. Кожна формула секвенції специфікована (відмічена) зліва одним з двох символів: $\vdash$ чи $\dashv$ і має вигляд $\vdash\Phi$ або $\dashv\Phi$.

Секвенція $\mathbf{\Sigma} = {\vdash}\mathbf{\Gamma}{\dashv}\mathbf{\Delta}$ *замкнена*, якщо існує формула Φ така, що ${\vdash}\Phi \in \mathbf{\Sigma}$ та ${\dashv}\Phi \in \mathbf{\Sigma}$. Якщо секвенція ${\vdash}\mathbf{\Gamma}{\dashv}\mathbf{\Delta}$ замкнена, то $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$. Замкнені секвенції грають роль аксіом секвенційних числень.

Секвенційне числення будується так, що секвенція ${\vdash}\mathbf{\Gamma}{\dashv}\mathbf{\Delta}$ вивідна $\Leftrightarrow$ $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$. Тому базовим властивостям відношення $\models$ співставимо їх синтаксичні аналоги — секвенційні форми. Секвенційні форми є правилами виведення секвенційних числень.

Для прикладу наведемо секвенційні форми, співставлені властивостям $R\vee_{\vdash}$ та $R\vee_{\dashv}$:

$$\vdash\mathbf{R}\vee\ \frac{{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B), \mathbf{\Sigma}}{{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A \vee B), \mathbf{\Sigma}},$$

$$\dashv\mathbf{R}\vee\ \frac{{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B), \mathbf{\Sigma}}{{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A \vee B), \mathbf{\Sigma}}.$$

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Такі дерева називають секвенційними.

Секвенційне дерево *замкнене*, якщо кожний його лист — замкнена секвенція.

Секвенція $\mathbf{\Sigma}$ *вивідна*, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем $\mathbf{\Sigma}$. Таке дерево назвемо *виведенням* секвенції $\mathbf{\Sigma}$.

Для побудованих секвенційних числень доведені теореми коректності та повноти.

Теорема 4 (теорема коректності). *Нехай секвенція* ${\vdash}\mathbf{\Gamma}{\dashv}\mathbf{\Delta}$ *вивідна. Тоді* $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$.

Теорема 5 (теорема повноти). *Нехай* $\Gamma \models \Delta$. *Тоді секвенція* $\vdash \Gamma \dashv \Delta$ *вивідна.*

Із теореми повноти випливає [20] низка важливих властивостей логіки ЕП, зокрема принцип компактності. На основі теореми повноти і принципу компактності розглядаються питання семантичної та синтаксичної несуперечливості множин формул логіки ЕП, взаємної суперечливості та взаємної несуперечливості множин формул.

2.3. Логіки локально-еквітонних предикатів. При переході від класичної логіки до логіки повнототальних ЕП, а потім до логіки ЕП класи семантичних моделей стають все ширшими. Тому природно поставити питання про побудову неокласичних логік з максимально широкими класами моделей. Важливим кроком у цьому напрямі є логіка локально-еквітонних предикатів, побудована в [22]. Для локально-еквітонних предикатів (ЛЕП) вимагається збереження значення при розширенні даних лише на скінченну кількість іменованих компонент.

Предикат P *локально-еквітонний*, якщо для довільних d, $d' \in {}^{V}A$ із того, що $P(d)\downarrow$, $d' \supset d$ та $d' \setminus d$ скінченна, випливає $P(d')\downarrow = P(d)$.

Те, що клас ЛЕП є розширенням класу ЕП, засвідчує

Приклад 3. Предикат, істинний на всіх скінченних ІМ та хибний на всіх нескінченних ІМ, — нееквітонний ЛЕП.

Семантичні властивості локально-еквітонних предикатів аналогічні властивостям еквітонних предикатів. Клас моделей логіки ЛЕП є розширенням класу моделей логіки еквітонних предикатів.

Синтаксичні властивості логіки ЛЕП ідентичні синтаксичним властивостям логіки ЕП. Для логіки ЛЕП побудовані [22] числення секвенційного типу. Для секвенційних числень доведені теореми коректності та повноти, розглянуті наслідки теореми повноти, зокрема принцип компактності.

2.4. Логіки еквісумісних та локально-еквісумісних предикатів. Методи моделювання предметних областей мусять враховувати неповноту наявної інформації. Логіки, орієнтовані на ці особливості, базуються на класах предикатів, визначених на даних з неповною інформацією.

Нехай предикат P застосовується до даного d з неповною інформацією, але потрібна інформація присутня в $d' \supseteq d$. Можна розширити P до P' такого: $P'(d') = P'(d)$. Для коректності необхідно: якщо різні дані розширюються до одного більшого даного, то значення P на таких даних повинні співпадати. Така умова названа еквісумісністю. У цьому випадку розширений предикат P' еквітонний.

ІМ d та d' *сумісні*, що позначаємо $d \approx d'$, якщо функція $d \cup d'$ однозначна.

Предикат P *еквісумісний* (ЕСП), якщо для довільних $d, d' \in {}^{V}A$ із умов $d \approx d'$, $P(d)\downarrow$ та $P(d')\downarrow$ випливає $P(d) == P(d')$.

Еквісумісність предикату P означає, що при можливості розширення різних даних (сумісність даних) до одного більшого даного, значення предикату P на таких даних мусять співпадати.

Предикат P *локально-еквісумісний* (ЛЕСП), якщо для довільних $d, d' \in {}^{V}A$ таких, що $(d' \setminus d) \cup (d \setminus d')$ скінченна, із умов $d \approx d'$, $P(d)\downarrow$ та $P(d')\downarrow$ випливає $P(d) = P(d')$.

Таким чином, при локально-еквісумісності вимагаємо збереження значень лише для розширень скінченною інформацією.

Класи ЕСП та ЛЕСП є розширеннями класів ЕП та ЛЕП. Це засвідчують наступні приклади.

Приклад 4. Визначимо предикат P таким чином. Зафіксуємо x, $y \in V$. Покладемо:

$P(d)=T$, якщо $x \in im(d)$ & $y \notin im(d)$ або $y \in im(d)$ & $x \notin im(d)$;

$P(d)\uparrow$, якщо $x, y \in im(d)$ або $x, y \notin \notin im(d)$.

Такий предикат P є нееквітонним, але еквісумісним.

Приклад 5. Визначимо предикат Q таким чином. Зафіксуємо x, $y \in V$. Покладемо:

$Q(d) = T$, якщо d скінченна, $x \in im(d)$ & $y \notin im(d)$ або $y \in im(d)$ & $x \notin im(d)$;

$Q(d) = F$, якщо d нескінченна, $x \in im(d)$ & $y \notin im(d)$ або $y \in im(d)$ & $x \notin im(d)$;

$Q(d)\uparrow$, якщо $x, y \in im(d)$ або $x, y \notin \notin im(d)$.

Такий Q не є локально-еквітонним і еквісумісним, але Q локально-еквісумісний.

Таким чином, еквісумісні та локально-еквісумісні предикати є узагальненнями еквітонних та локально-еквітонних предикатів.

Логіки еквісумісних та локально-еквісумісних предикатів названі [23] ЕС-логіками та ЛЕС-логіками. Властивості таких логік аналогічні відповідним властивостям логік еквітонних та локально-еквітонних предикатів. Класи семантичних моделей логік еквісумісних та локально-еквісумісних предикатів ще ширші, хоча ці логіки зберігають основні закони класичної логіки.

Для логік еквісумісних та локально-еквісумісних предикатів побудовані [23] секвенційні числення. Для цих числень доведені теореми коректності та повноти.

Для розглянутих нами класів квазіарних предикатів справджується

Теорема 6. Класи повнототальних ЕП, ЕП, ЛЕП, ЕСП, ЛЕСП замкнені відносно композицій $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists \boldsymbol{x}$.

Для можливості виконання еквівалентних перетворень довільних формул додатковою вимогою до семантичних моделей логік ЕП, ЛЕП, ЕСП, ЛЕСП є наявність нескінченної множини тотально неістотних предметних імен.

2.5. Логіки квазіарних предикатів. Для логіки квазіарних предикатів у загальному випадку вже не діють деякі закони класичної логіки. Це показує наступний приклад.

Приклад 6. Не завжди з умови $\models \forall x \Phi$ випливає $\models \Phi$.

Визначимо $p_A(d) = T$ при $x \in im(d)$, $p_A(d) = F$ при $x \notin im(d)$.

Нехай Φ – це формула $\forall xp \to p$. Тоді $(\forall xp \to p)_A(d) = F$ при $x \notin im(d)$, тому $\not\models \Phi$. Але для квазіарних предикатів завжди $\models \forall x(\forall xA \to A)$, тому $\models \forall x \Phi$.

У той же час можна довести, що для логіки квазіарних предикатів з умови $\models \Phi$ завжди випливає $\models \forall x \Phi$.

Ціною певного обмеження семантичних моделей (розглядаємо моделі із нескінченною множиною тотальних предметних імен, що відповідає розгляду моделей із нескінченною множиною тотально неістотних імен) для логіки квазіарних предикатів можна побудувати числення секвенційного типу, що дає змогу довести коректність та повноту такої логіки.

3. Композиційно-номінативні модальні логіки

Традиційні логіки описують даний конкретний стан тверджень про світ, тому такі логіки не зовсім адекватні світові, що змінюється та розвивається. Для адекватнішого опису динамічного, мінливого світу видається доцільним використовувати модальні логіки, які враховують інтенсійний аспект предметних областей. Виняткова гнучкість модальної логіки дозволяє застосувати її для аналізу та моделювання найрізноманітніших апектів діяльності людини. В першу чергу це стосується створення сучасних інтелектуальних інформаційних систем, опису та моделювання складних динамічних систем.

Тісно пов'язана з модальною логікою концепція можливих світів. Семантичні моделі модальної логіки на основі зазначеної концепції дозволяють природним чином трактувати як загальні модальності "необхідно" та "можливо", так і спеціальні модальності (часові, епістемічні, деонтичні тощо).

Враховуючи аспект зміни та розвитку предметних областей, особливу зацікавленість викликають транзиційні модальні логіки, які описують переходи від одного стану світу до іншого, зокрема часові або темпоральні модальні логіки.

Розвиваючи логіку квазіарних предикатів і модальну логіку та синтезуючи їх можливості, стосовно інтенсійного аспекту предметних областей ми запропонували [24] композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ). Зазначені логіки є природними розширеннями класичної логіки предикатів та модальної логіки. В [24, 25] детально розглянуті композиційно-номінативні модальні логіки пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів, такий розгляд можна продовжити на функціональному та функціонально-екваційному рівнях.

Семантичною основою КНМЛ є *композиційно-номінативні модальні системи* (КНМС). Найважливішою різновидністю КНМС є *транзиційні* модальні системи. Традиційні модальні логіки природним чином можуть розглядатися в рамках транзиційних КНМЛ. Окремим випадком транзиційних КНМЛ є *темпоральні* КНМЛ. Транзиційні і темпоральні КНМЛ можуть бути конкретизовані на кожному із зазначених вище рівнів.

Для транзиційних і темпоральних КНМЛ запропоновані [24] аксіоматичні системи — транзиційні і темпоральні композиційно-номінативні модальні числення відповідного рівня і типу. Для таких числень справджуються теореми коректності та повноти.

Висновки

В даній статті запропонована ієрархія композиційно-номінативних логік. Такі логіки будуються в семантико-синтаксичному стилі на основі композиційно-номінативного підходу. Місце логіки в ієрархії визначається рівнем абстракції розгляду та обмеженнями класу предикатів. Стосовно екстенсійного аспекту предметних областей запропоновані логіки квазіарних предикатів та логіки номінативних даних, стосовно інтенсійного аспекту — композиційно-номінативні модальні логіки. Такі логіки можуть розглядатися як потужні формалізми для специфікації програм, опису та моделювання предметних областей.

1. *Никитченко Н.С.* Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Пробл. программирования. — 1999. — №1. — С. 16-31.
2. *Редько В.Н.* Основания композиционного программирования // Программирование. — 1979. — № 3. — С. 3–13.
3. *Клини С.* Математическая логика. — М.: Наука, 1973. — 480 с.
4. *Шенфилд Дж.* Математическая логика. — М.: Наука, 1975. — 527 с.

5. *Никитченко Н.С., Шкильняк С.С.* Неоклассические логики предикатов // Пробл. программирования. — 2000. — № 3–4. — С. 3–17.
6. *Никитченко Н.С.* Пропозициональные композиции частичных предикатов // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — №2. — С. 3–19.
7. *Шкільняк С.С.* Безкванторні неокласичні логіки // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2001. — Вип.4. — С. 323–331.
8. *Нікітченко М.С.* Інфінітарні реномінативні логіки часткових предикатів // Там же. — 2002. — Вип.3. — С. 229–238.
9. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки еквітонних предикатів // Там же. — 2000. — Вип.2. — С. 300–314.
10. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Чисті композиційно-номінативні числення // Там же. — 2000. — Вип.3. — С. 290–303.
11. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Семантичні аспекти посткласичних логік // Пробл. программирования. — 2001. — № 1–2. — С. 3–12.
12. *Никитченко Н.С.* Аппликативные композиции частичных предикатов // Кибернетика и системный анализ. — 2001. — №2. — С. 14–33.
13. *Шкільняк С.С.* Неокласичні кванторні логіки з рівністю // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2003. — Вип.1. — С. 222–225.
14. *Шкільняк С.С.* Секвенційні числення неокласичних логік функціонального рівня // Там же. — 2003. — Вип.2. — С. 223–228.
15. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки першого порядку // Там же. — 2001. — Вип.1. — С. 260–274.
16. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні числення першого порядку // Там же. — 2000. — Вип.2. — С. 302–313.
17. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційні логіки номінативних даних // Пробл. программирования. — 2003. — №3. — С. 29–40.
18. *Басараб И.А., Нікітченко М.С., Редько В.Н.* Композиционные базы данных. — Киев: Либідь, 1992. — 192 с.
19. *Непейвода Н.Н.* Прикладная логика. — Новосибирск: НГУ, 2000. — 521 с.
20. *Шкільняк С.С.* Неокласичні секвенційні числення // Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. — 2002. — Вип.4. — С. 261–274.
21. *Шкільняк С.С.* Функціонально-еквацiйні неокласичні логіки: числення секвенційного типу // Там же. — 2003. — Вип.4. — С. 302–309.
22. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Логіки локально-еквітонних предикатів: семантичні властивості та секвенційні числення // Пробл. программирования. — 2003. — №2. — С. 28–41.
23. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки предикатів над даними з неповною інформацією // Там же. — 2004. — №2–3. — С. 74–80.
24. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні модальні логіки // Там же. — 2002. — №1–2. — С. 27–33.
25. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка. Додаткові розділи. — К.: Київ. ун-т. — 2004. — 77 с.

Отримано 30.09.2004

Про авторів

Нікітченко Микола Степанович,
д-р фіз.-мат. наук,
зав. кафедри теорії та технології
програмування
Тел. (044) 259 0519
E-mail: nikitchenko@unicyb.kiev.ua

Шкільняк Степан Степанович,
канд. фіз.-мат. наук,
доцент кафедри теорії та технології програмування
Тел. (044) 259 0519
E-mail: sssh@unicyb.kiev.ua

Місце роботи авторів:
Київський національний університет
ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 60