

УДК 519.6:539.3

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ПРО КОНТАКТ ТРЬОХ ПРУЖНИХ ТІЛ МЕТОДАМИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ

І. І. ПРОКОПИШИН¹, І. І. ДИЯК², Р. М. МАРТИНЯК¹

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;

² Львівський національний університет ім. Івана Франка

Досліджено методи декомпозиції області для числового розв'язування задач про односторонній контакт без тертя багатьох пружних тіл скінченних розмірів. З використанням скінченноелементних апроксимацій розв'язано задачі про односторонній контакт трьох пружних тіл, обтиснених жорсткими плитами, та контакт трьох закріплених тіл, одне з яких перебуває під дією зовнішнього навантаження. Вивчено розподіли нормальних контактних та еквівалентних напружень у тілах.

Ключові слова: *контакт пружних тіл, варіаційні нерівності, метод штрафу, ітераційні методи, методи декомпозиції області, метод скінченних елементів.*

Методи декомпозиції області (МДО) зводять розв'язування крайових задач математичної фізики у всій області до розв'язування послідовності задач в окремих підобластях. Це дає можливість поєднувати різні математичні методи і моделі та розпаралелювати обчислення. МДО можна класифікувати за типом крайових умов, які задають на спільних межах у задачах для окремих підобластей. Умови нульового порядку називають умовами Діріхле, умови на похідні – умовами Неймана, а змішані – умовами Робіна або Пуанкаре.

Значного розвитку МДО набули для лінійних задач математичної фізики, зокрема лінійної теорії пружності, а в останнє десятиріччя – і для контактних задач теорії пружності, які, загалом, нелінійні.

Для розв'язування задач про односторонній контакт двох пружних тіл розроблено [1] континуальний метод декомпозиції області типу Сінйоріні–Неймана, який полягає у послідовному розв'язуванні на кожному кроці задачі про односторонній контакт з жорсткою поверхнею (задачі Сінйоріні) для одного тіла та задачі теорії пружності з умовою Неймана – для іншого. Крім цього, для задач про контакт двох тіл запропоновано на континуальному рівні схеми декомпозиції області типу Сінйоріні–Діріхле [2] та Сінйоріні–Сінйоріні [3], а також МДО, що ґрунтується на застосуванні поповненого лагранжіана та блочного алгоритму Удзави [4]. Серед дискретних МДО для розв'язування контактних задач слід виділити алгоритми на основі методу підструктур [5] та методу скінченних елементів розривів і зв'язків (FETI методу) [6, 7].

Запропоновано [8–12] клас континуальних МДО типу Робіна–Робіна для розв'язування задач про односторонній контакт багатьох пружних тіл, які ґрунтуються на методі штрафу для варіаційних нерівностей та ітераційних методах для нелінійних варіаційних рівнянь. Доведено їхню збіжність [9, 10, 12]. Перевагами отриманих методів є простота алгоритмів та регуляризація контактної задачі завдяки штрафу. Нижче ці МДО апробовано для числового дослідження задач про односторонній контакт трьох пружних тіл. На кожному кроці алгоритму для розв'язування лінійних задач теорії пружності застосовано метод скін-

ченних елементів (МСЕ) з лінійними та квадратичними трикутними елементами.

Формулювання задачі. У просторі \mathbb{R}^3 введемо декартову систему координат, базисні вектори якої позначимо через \mathbf{e}_i , $i=1,2,3$. Розглянемо задачу про контакт N пружних тіл $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^3$ з кусково-гладкими межами $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = \overline{1, N}$ (рис. 1). Позначимо $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^N \Omega_\alpha$.

Напружено-деформований стан у точці $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ кожного з тіл Ω_α визначають вектор переміщень $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = u_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, симетричні тензори

деформацій $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ і напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, які задовольняють рівняння лінійної теорії пружності

$$\sum_{j=1}^3 \partial \sigma_{\alpha ij} / \partial x_j + f_{\alpha i} = 0, \quad i=1,2,3, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad (1)$$

$$\sigma_{\alpha ij} = \sum_{k,l=1}^3 C_{\alpha ijkl} \varepsilon_{\alpha kl}, \quad i,j=1,2,3, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{\alpha ij} = \frac{1}{2} \left(\partial u_{\alpha i} / \partial x_j + \partial u_{\alpha j} / \partial x_i \right), \quad i,j=1,2,3, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad (3)$$

де $C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x})$ – компоненти тензора пружних сталей, який симетричний, еліптичний і обмежений [13], а $f_{\alpha i}$ – компоненти вектора об'ємних сил $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) = f_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$.

На межі $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$ кожного з тіл уведемо локальний ортонормований базис $\xi_\alpha, \boldsymbol{\eta}_\alpha, \mathbf{n}_\alpha$, де \mathbf{n}_α – одинична зовнішня нормаль, а $\xi_\alpha, \boldsymbol{\eta}_\alpha$ – одиничні дотичні. Вектори переміщень і напружень на межі Γ_α у цьому базисі запишемо так:

$$\mathbf{u}_\alpha = u_{\alpha \xi} \xi_\alpha + u_{\alpha \eta} \boldsymbol{\eta}_\alpha + u_{\alpha n} \mathbf{n}_\alpha, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = \sigma_{\alpha \xi} \xi_\alpha + \sigma_{\alpha \eta} \boldsymbol{\eta}_\alpha + \sigma_{\alpha n} \mathbf{n}_\alpha.$$

Припустимо, що поверхня Γ_α складається з трьох частин, які не перетинаються: $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^u \cup \Gamma_\alpha^\sigma \cup S_\alpha$, де $\Gamma_\alpha^u = \overline{\Gamma_\alpha^u}$, $\Gamma_\alpha^u \neq \emptyset$, $S_\alpha = \bigcup_{\beta \in B_\alpha} S_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Тут $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ – ділянка можливого контакту тіла Ω_α з тілом Ω_β , а $B_\alpha \subset \{1, 2, \dots, N\}$ – множина індексів усіх тіл, які контактують з тілом Ω_α , $B_\alpha \neq \emptyset$, $\alpha = \overline{1, N}$. Вважаємо, що поверхні $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ та $S_{\beta\alpha} \subset \Gamma_\beta$ достатньо близькі ($S_{\alpha\beta} \approx S_{\beta\alpha}$) [14], та приймаємо, що $\mathbf{n}_\alpha(\mathbf{x}) \approx -\mathbf{n}_\beta(\mathbf{x}')$, де $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}$ – проекція точки $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$ на поверхню $S_{\beta\alpha}$. Відстань між тілами Ω_α та Ω_β до деформації по нормалі позначимо $d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \pm \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$, де знак “ \pm ” залежить від формулювання конкретної задачі.

На частині Γ_α^u поверхні Γ_α задані кінематичні крайові умови (умови Діріхле), а на частині Γ_α^σ – статичні (умови Неймана):

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^\sigma. \quad (4)$$

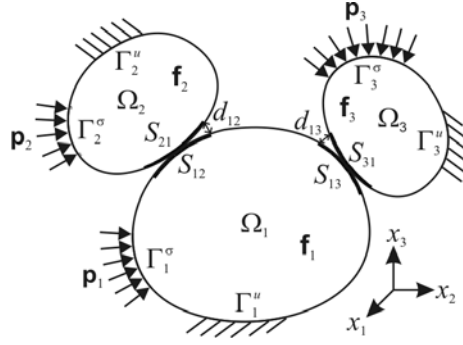


Рис. 1. Контакт кількох пружних тіл.

Fig. 1. Contact of several elastic bodies.

На поверхнях $S_{\alpha\beta}$ виконуються умови одностороннього контакту без тертя:

$$\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') \leq 0, \quad \sigma_{\alpha\xi}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\xi}(\mathbf{x}') = 0, \quad \sigma_{\alpha\eta}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\eta}(\mathbf{x}') = 0, \quad (5)$$

$$u_{\alpha n}(\mathbf{x}) + u_{\beta n}(\mathbf{x}') \leq d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \quad (6)$$

$$(u_{\alpha n}(\mathbf{x}) + u_{\beta n}(\mathbf{x}') - d_{\alpha\beta}(\mathbf{x})) \sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = 0, \quad (7)$$

де $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$, $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}$, $\beta \in B_\alpha$, $\alpha = \overline{1, N}$. Зазначимо, що задача (1)–(7) нелінійна. Сформулюємо її у безрозмірній формі. Нехай \tilde{r} – характерний розмір, а \tilde{E} – характерна пружна стала. Уведемо нові координати $x_i^* = x_i/\tilde{r}$, $i = 1, 2, 3$, безрозмірні переміщення, напруження, пружні сталі, зовнішні навантаження та об'ємні сили:

$$u_{\alpha i}^*(\mathbf{x}^*) = u_{\alpha i}(\mathbf{x})/\tilde{r}, \quad \sigma_{\alpha ij}^*(\mathbf{x}^*) = \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})/\tilde{E}, \quad C_{\alpha ijkl}^*(\mathbf{x}^*) = C_{\alpha ijkl}(\mathbf{x})/\tilde{E}, \quad (8)$$

$$p_{\alpha i}^*(\mathbf{x}^*) = p_{\alpha i}(\mathbf{x})/\tilde{E}, \quad f_{\alpha i}^*(\mathbf{x}^*) = \tilde{r} f_{\alpha i}(\mathbf{x})/\tilde{E}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad \alpha = \overline{1, N}. \quad (9)$$

Якщо величини $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x})$, $\hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{x})$, $\alpha = \overline{1, N}$ є розв'язками задачі (1)–(7), то безрозмірні величини $\mathbf{u}_\alpha^*(\mathbf{x}^*)$, $\hat{\sigma}_\alpha^*(\mathbf{x}^*)$, $\alpha = \overline{1, N}$ будуть розв'язками аналогічної задачі у безрозмірній формі. Тому надалі використовуватимемо подання вихідної задачі у безрозмірній формі, не змінюючи позначення.

Варіаційні формулювання задачі. Метод штрафу. Для кожного з тіл Ω_α розглянемо простори Соболева $V_\alpha = [H^1(\Omega_\alpha)]^3$ та введемо у них замкнені підпростори $V_\alpha^0 = \{\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha : \mathbf{u}_\alpha = 0 \text{ на } \Gamma_\alpha^u\}$ зі скалярним добутком $(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0} = (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha}$ і нормою $\|\mathbf{u}_\alpha\|_{V_\alpha^0} = \|\mathbf{u}_\alpha\|_{V_\alpha}$. Значення елементів просторів V_α і V_α^0 на частинах межі області Ω_α розумітимемо у сенсі слідів [15].

Розглянемо рефлексивний банаховий простір $V_0 = V_1^0 \times V_2^0 \times \dots \times V_N^0 = \{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N)^T : \mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0\}$, в якому означимо скалярний добуток $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_0} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha}$ і норму $\|\mathbf{u}\|_{V_0} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_0}}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0$, та введемо опуклу замкнену множину кінематично допустимих переміщень:

$$K = \{\mathbf{u} \in V_0 : u_{\alpha n} + u_{\beta n} \leq d_{\alpha\beta} \text{ на } S_{\alpha\beta}, \{\alpha, \beta\} \in Q\}, \quad (10)$$

де $Q = \{\{\alpha, \beta\} : \alpha \in \{1, 2, \dots, N\}, \beta \in B_\alpha\}$ – множина всеможливих неупорядкованих пар індексів тіл, що контактують між собою, $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$, $\Xi_\alpha = \Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u$.

Уведемо білінійну форму $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, що визначає сумарну енергію пружної деформації тіл, та лінійну форму $L(\mathbf{v})$, що рівна роботі заданих зовнішніх сил:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^N a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha), \quad a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \hat{\sigma}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) : \hat{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) d\Omega, \quad (11)$$

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^N l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha), \quad l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha d\Omega + \int_{\Gamma_\alpha^\sigma} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha dS, \quad \mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0, \quad (12)$$

де $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^3$, $\mathbf{p}_\alpha \in [H_{00}^{-1/2}(\Xi_\alpha)]^3$, $\alpha = \overline{1, N}$.

Показано [9], що білінійна форма $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – симетрична, неперервна та коерцитивна у просторі V_0 , а лінійна форма $L(\mathbf{v})$ – неперервна у ньому.

Доведено [14, 16], що вихідна контактна задача (1)–(7) еквівалентна у слабкому розумінні задачі мінімізації квадратичного функціонала на множині K або варіаційній нерівності, розв'язок яких існує та єдиний:

$$F(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{u})/2 - L(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in K}, \quad (13)$$

$$F'(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in K, \quad \mathbf{u} \in K. \quad (14)$$

Щоб отримати задачу мінімізації у вихідному просторі V_0 , застосуємо до задачі (13) метод штрафу [13, 15, 17, 18]. За порушення умов непроникнення (6) уведемо штраф у такій формі:

$$J_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\theta} \sum_{\{\alpha, \beta\} \in \mathcal{Q}} \int_{S_{\alpha\beta}} \left[(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n})^- \right]^2 dS, \quad \mathbf{u} \in V_0, \quad (15)$$

де $\theta > 0$ – параметр штрафу; $y^- = \min\{0, y\}$.

Розглянемо задачу мінімізації функціонала зі штрафом у просторі V_0 :

$$F_\theta(\mathbf{u}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{u})/2 - L(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in V_0}. \quad (16)$$

Штрафний доданок $J_\theta(\mathbf{u})$ – невід'ємний та диференційовний за Гаато:

$$J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{\theta} \sum_{\{\alpha, \beta\} \in \mathcal{Q}} \int_{S_{\alpha\beta}} (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n})^- (v_{\alpha n} + v_{\beta n}) dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0. \quad (17)$$

Тут величини $\sigma_{\alpha\beta n} = \sigma_{\alpha n} = \sigma_{\beta n} = (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n})^- / \theta$, $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$ мають сенс нормальних контактних напружень.

Також показано [9, 12], що функціонал $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ володіє такими властивостями:

$$(\forall \mathbf{u} \in V_0) (\exists R > 0) (\forall \mathbf{v} \in V_0) \left\{ |J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq R \|\mathbf{v}\|_{V_0} \right\}, \quad (18)$$

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) \left\{ J'_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0 \right\}, \quad (19)$$

$$(\exists D > 0) (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_0) \left\{ |J'_\theta(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq D \|\mathbf{v}\|_{V_0} \|\mathbf{w}\|_{V_0} \right\}. \quad (20)$$

Це дало змогу довести [9, 10, 12], що розв'язок задачі (16) існує і єдиний, а його знаходження еквівалентне розв'язанню у просторі V_0 нелінійного за змінною \mathbf{u} варіаційного рівняння

$$F'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad \mathbf{u} \in V_0. \quad (21)$$

На основі результатів Ж.-Л. Ліонса [15, 17] про збіжність методу штрафу доведено [9, 12], що розв'язок $\bar{\mathbf{u}}_\theta$ задачі (21) при $\theta \rightarrow 0$ збігається сильно у просторі V_0 до розв'язку $\bar{\mathbf{u}}_*$ вихідної варіаційної нерівності (14), тобто $\|\bar{\mathbf{u}}_\theta - \bar{\mathbf{u}}_*\|_{V_0} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0$.

Ітераційні методи для нелінійних варіаційних рівнянь. У деякому рефлексивному банаховому просторі V_0 розглянемо абстрактне нелінійне варіаційне рівняння вигляду (21), розв'язок якого існує та єдиний. Для його розв'язування застосуємо такий стаціонарний ітераційний метод:

$$G(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = G(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma \left[A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) \right], \quad k = 0, 1, \dots, \quad (22)$$

де $G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – деяка білінійна форма у просторі V_0 , а $\gamma \in \mathbb{R}$ – ітераційний параметр. Доведено [9, 10, 12] таке твердження про збіжність цього методу.

Теорема. Нехай білінійна форма A – неперервна з константою M та коерцитивна з константою B , лінійна форма L – неперервна, білінійна форма

G – симетрична, неперервна з константою \tilde{M} та коерцитивна з константою \tilde{B} , а нелінійний за змінною \mathbf{u} доданок $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ володіє властивостями (18)–(20). Тоді, якщо $\gamma \in (0; \gamma_2)$, $\gamma_2 = 2B\tilde{B}/(M + D)^2$, то послідовність $\{\mathbf{u}^k\}$, отримана методом (22), збігається сильно у просторі V_0 до розв'язку $\bar{\mathbf{u}}$ задачі (21) з лінійною швидкістю в нормі $\|\cdot\|_G = \sqrt{G(\cdot, \cdot)}$:

$$\|\mathbf{u}^{k+1} - \bar{\mathbf{u}}\|_G \leq q \|\mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}}\|_G, \quad q = \sqrt{1 - \gamma(2B - \gamma(M + D)^2 / \tilde{B}) / \tilde{M}} < 1. \quad (23)$$

Крім цього, доведено [9] твердження про стійкість методу (22) до похибок.

Для розв'язування рівняння (21) також запропоновано нестационарний ітераційний метод [9, 12], де білінійна форма G та параметр γ різні на кожній ітерації:

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = G^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma^k \left[A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) \right], \quad k = 0, 1, \dots \quad (24)$$

Встановлено [9, 12] умови збіжності цього методу.

Схеми декомпозиції області. Розглянемо такі варіанти методів (22) та (24) для розв'язування варіаційного рівняння зі штрафом (21), які на кожній ітерації реалізують декомпозицію задачі за підобластями [8–12].

Виберемо у методі (22) білінійну форму G у вигляді [9, 11, 12]

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + X(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad (25)$$

де $X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ – білінійна форма, яку визначимо так [9, 11, 12]:

$$X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\theta} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} u_{\alpha n} v_{\alpha n} \Psi_{\alpha\beta} dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0. \quad (26)$$

Тут $\Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \{0, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \setminus S_{\alpha\beta}^1\} \vee \{1, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}^1\}$ – характеристичні функції, що визначають деякі задані підмножини $S_{\alpha\beta}^1 \subseteq S_{\alpha\beta}$ ділянок можливого контакту $S_{\alpha\beta}$.

Ітераційний метод (22) з білінійною формою (25) можна записати так:

$$A(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) + X(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + X(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad (27)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \gamma \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1 - \gamma) \mathbf{u}^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (28)$$

Доведено [9, 12], що білінійна форма X – симетрична, неперервна та невід'ємна. Тому білінійна форма (25) – симетрична, неперервна та коерцитивна, і за наведеною вище теоремою отримуємо, що при $\gamma \in (0; \gamma_2)$ послідовність $\{\mathbf{u}^k\}$ методу (27), (28) збігається сильно у просторі V_0 до розв'язку $\bar{\mathbf{u}}$ варіаційного рівняння зі штрафом (21), тобто $\|\mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}}\|_{V_0} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Спільні величини для підобластей відомі з попередньої ітерації, тому варіаційне рівняння (27) розпадається на N незалежних варіаційних рівнянь в окремих підобластях Ω_α , і метод (27), (28) еквівалентний ітераційному процесу:

$$\begin{aligned} & a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \Psi_{\alpha\beta} (\tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} - u_{\alpha n}^k) v_{\alpha n} dS = \\ & = l_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in B_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)^- v_{\alpha n} dS, \quad \forall \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1 - \gamma) \mathbf{u}_\alpha^k, \quad \alpha = \overline{1, N}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (30)$$

На кожній ітерації k методу (29), (30) потрібно паралельно розв'язувати N лінійних варіаційних рівнянь (29), які відповідають задачам теорії пружності для окремих тіл Ω_α з умовами Робіна (Пуанкаре) на поверхнях $S_{\alpha\beta}$:

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^{k+1} + \psi_{\alpha\beta} \tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} / \theta = (d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)^- / \theta + \psi_{\alpha\beta} u_{\alpha n}^k / \theta, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}.$$

Тому ітераційний метод (29), (30) належить до паралельних схем Робіна–Робіна декомпозиції області [9, 11, 12].

Вибираючи різні характеристичні функції $\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, $\alpha = \overline{1, N}$, $\beta \in B_\alpha$ у методі (29), (30), отримуємо різні варіанти схем Робіна–Робіна. Зокрема, покладаючи $\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv 0$, $\forall \alpha, \beta$, дістанемо паралельну схему Неймана–Неймана [8–12].

Якщо ж на кожній ітерації k виберемо $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \left\{ 0, d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - u_{\alpha n}^k(\mathbf{x}) - u_{\beta n}^k(\mathbf{x}') \geq 0 \right\} \vee \left\{ 1, d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - u_{\alpha n}^k(\mathbf{x}) - u_{\beta n}^k(\mathbf{x}') < 0 \right\}$, $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$, то дістанемо нестационарну паралельну схему Діріхле–Діріхле [8, 9, 11, 12, 19], яка відповідає деякому нестационарному ітераційному методу вигляду (24).

Числову ефективність розроблених МДО досліджено для низки плоских задач про контакт двох пружних тіл [8, 9, 11, 12, 19] з використанням МСЕ для розв'язування задач теорії пружності в окремих тілах. Нижче ці МДО застосовано до розв'язування плоских задач про односторонній контакт трьох пружних тіл.

Контактна задача про стиск трьох пружних тіл. Розглянемо плоску задачу про односторонній контакт без тертя трьох ізотропних пружних тіл Ω_1 , Ω_2 та Ω_3 , обтиснених жорсткими плитами (рис. 2). Довжини тіл рівні 4. Висота першого та третього тіла $h_1 = h_3 = 1$, а висота другого тіла $h_2 = 2$. Модулі Юнга тіл $E_1, E_2 = E_3 = E$, коефіцієнти Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,3$. Відстані до деформації між першим і другим тілами та другим і третім однакові: $d_{12}(\mathbf{x}) = r_0 x_1^2$, $\mathbf{x} \in S_{21}$, $d_{23}(\mathbf{x}) = r_0 x_1^2$, $\mathbf{x} \in S_{23}$, $r_0 = 0,001$, обтиснення тіл $\Delta = 2,732 \cdot 10^{-3}$.

За характерний лінійний розмір вибрано висоту першого тіла ($\tilde{r} = h_1$), а за характерну пружну сталу – модуль Юнга другого і третього тіл ($\tilde{E} = E$).

Для областей Ω_1 і Ω_3 використовували сітку з 4096 лінійними або квадратичними трикутними скінченними елементами, а для області Ω_2 – з 8192. Параметр штрафу задавали за стрижневою моделлю [9]:

$$\theta = c \sum_{\alpha=1}^3 \kappa_\alpha, \kappa_\alpha = h_\alpha (1 - \nu_\alpha^2) \tilde{E} / (\tilde{r} E_\alpha), \alpha = 1, 2, 3, \quad (31)$$

де $c > 0$ – нормований коефіцієнт штрафу. Задачу розв'язували схемою Робіна–Робіна (29), (30) при $\gamma = 0,8$, $c = 0,015$. Функції $\psi_{\alpha\beta}$ вибирали так, щоб

$$S_{21}^1 = \{ \mathbf{x} : x_1 \in [0; b], x_2 = 1 \}, S_{23}^1 = \{ \mathbf{x} : x_1 \in [0; b], x_2 = 3 \},$$

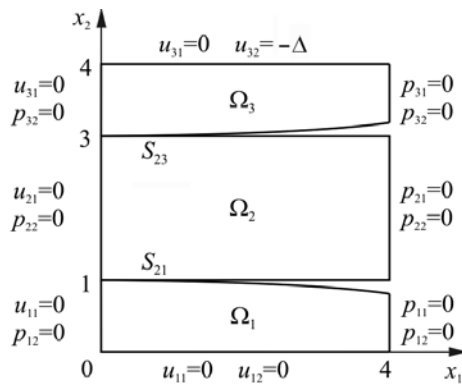


Рис. 2. Контакт трьох обтиснених тіл.

Fig. 2. Contact of three contracted bodies.

де $b = 1$ – для відношення модулів Юнга $E_1/E = 1/2; 1; 2; 4$ та $b = 1,5$ – для $E_1/E = 1/16; 1/8; 1/4; 8; 16$. Для зупинки ітераційного процесу застосовували критерій

$$\|u_{\alpha n}^{k+1} - u_{\alpha n}^k\|_2 / \|u_{\alpha n}^{k+1}\|_2 \leq \varepsilon_u, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (32)$$

де $\|u_{\alpha n}\|_2 = \sqrt{\sum_j [u_{\alpha n}(x^j)]^2}$ – дискретна норма, $x^j \in S_{12}$ – вузли скінченноелементного розбиття межі S_{12} , а $\varepsilon_u > 0$ – відносна точність для переміщень. Початкові наближення для переміщень задавали так, щоб початкові контактні зусилля дорівнювали нулю [9]. Для вказаних вище параметрів та відношень модулів Юнга $E_1/E = 1/16; 1/8; 1/4; 1/2; 1; 2; 4; 8; 16$ схема Робіна–Робіна (29), (30) досягає точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$ відповідно за 119; 118; 109; 52; 22; 58; 62; 103 та 109 ітерацій.

Коли всі тіла мають однакову жорсткість E , то задача симетрична відносно прямої $x_2 = 2$. Для цього випадку досліджено збіжність схеми Робіна–Робіна за ітераціями. Вивчено розподіли нормальних контактних напружень на різних ітераціях k (рис. 3).

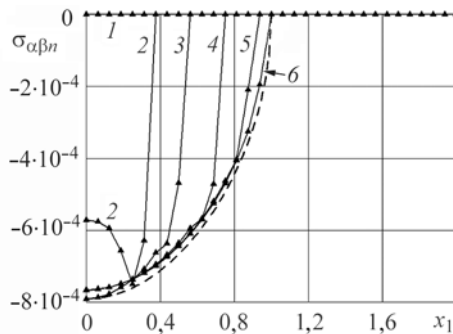


Рис. 3. Fig. 3.

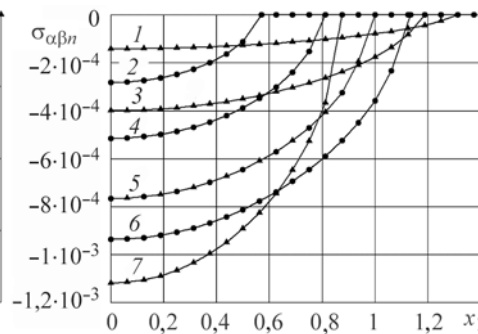


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 3. Контактні напруження $\sigma_{12n} = \sigma_{23n}$ для модулів Юнга $E_1 = E_2 = E_3 = E$ на ітераціях $k = 0; 2; 5; 10; 15; 22$ (криві 1–6). Штрихова лінія – аналітичний розв’язок для контакту безмежних смуг [20].

Fig. 3. Contact stresses $\sigma_{12n} = \sigma_{23n}$ on iterations $k = 0; 2; 5; 10; 15; 22$ (curves 1–6) for Young’s moduli $E_1 = E_2 = E_3 = E$. Dashed line – numerical solution, obtained in [20] for the case of contact between infinite strips.

Рис. 4. Контактні напруження σ_{12n} (▲) і σ_{23n} (●) для відношень модулів Юнга $E_1/E = 1/16$ (криві 1, 2); $1/4$ (криві 3, 4); 1 (крива 5); 16 (криві 6, 7).

Fig. 4. Normal contact stresses σ_{12n} (▲) and σ_{23n} (●) for the following Young’s moduli ratios $E_1/E =$ (curves 1, 2); $1/4$ (curves 3, 4); 1 (curve 5); 16 (curves 6, 7).

Також досліджено розподіли нормальних контактних напружень σ_{12n} та σ_{23n} для різних відношень модулів Юнга E_1/E (рис. 4). Зі збільшенням модуля Юнга E_1 нижнього тіла ділянка контакту між тілами Ω_1 та Ω_2 збільшується, а між тілами Ω_2 та Ω_3 – зменшується. Окрім цього, зменшуються мінімуми напружень σ_{12n} та σ_{23n} .

Для виявлення ділянок можливих пластичних деформацій досліджували еквівалентні напруження у тілах Ω_α , $\alpha = 1, 2, 3$ (рис. 5):

$$\sigma_{\text{eq}\alpha} = \sqrt{\left[(\sigma_{\alpha 11} - \sigma_{\alpha 22})^2 - (\sigma_{\alpha 22} - \sigma_{\alpha 33})^2 - (\sigma_{\alpha 33} - \sigma_{\alpha 11})^2 \right] / 2 + 3\sigma_{\alpha 12}^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha.$$

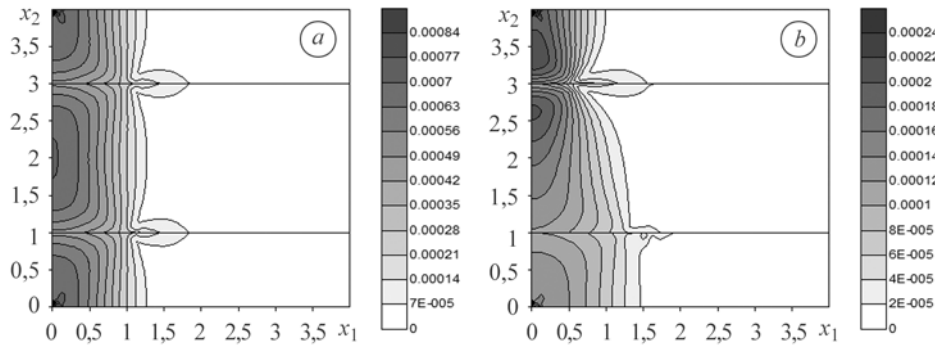


Рис. 5. Лінії рівня еквівалентних напружень $\sigma_{\text{eq}\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$ при $E_1 = E$ (a) та $E_1 = E/16$ (b).
 Fig. 5. Isolines of equivalent stresses $\sigma_{\text{eq}\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$ for $E_1 = E$ (a) and $E_1 = E/16$ (b).

У першому випадку (рис. 5a) максимальне еквівалентне напруження виникає поблизу лівої нижньої вершини першого тіла і лівої верхньої вершини третього та приблизно дорівнює $8,9 \cdot 10^{-4}$. Максимум цього напруження для середнього тіла досягається поблизу середини лівої межі та рівний $7 \cdot 10^{-4}$. У другому випадку (рис. 5b) максимальне еквівалентне напруження виникає біля лівої верхньої вершини третього тіла та приблизно дорівнює $2,3 \cdot 10^{-4}$. Максимуми цього напруження для середнього і нижнього тіл відповідно становлять $2 \cdot 10^{-4}$ і $1,8 \cdot 10^{-4}$.

Задача про контакт трьох тіл за наявності між ними рівномірних зазорів. Також розв'язано задачу про односторонній контакт без тертя трьох жорстко закріплених з лівого боку прямокутних пружних тіл $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, спричинений дією рівномірного нормального навантаження (рис. 6). Відстані між тілами до деформації сталі: $d_{12}(x) = r_0, d_{23}(x) = r_0, r_0 = 0,001$. Довжини тіл рівні 4, а висоти $h_1 = 1, h_2 = h_3 = h_1 - r_0 = 0,999$. Їхні механічні характеристики однакові: $E_1 = E_2 = E_3 = E, \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0,3$. За характерний лінійний розмір вибрано висоту нижнього тіла ($\tilde{r} = h_1$), а за характерну пружну сталу – модуль Юнга ($\tilde{E} = E$). Для кожної області Ω_α використовували розбиття на 1024 скінченні трикутні елементи.

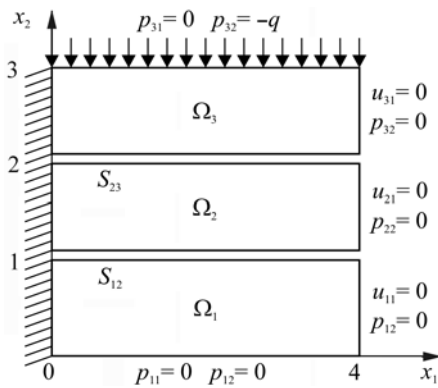


Рис. 6. Fig. 6.

Рис. 6. Контакт трьох закріплених тіл.

Fig. 6. Contact of three fixed bodies.

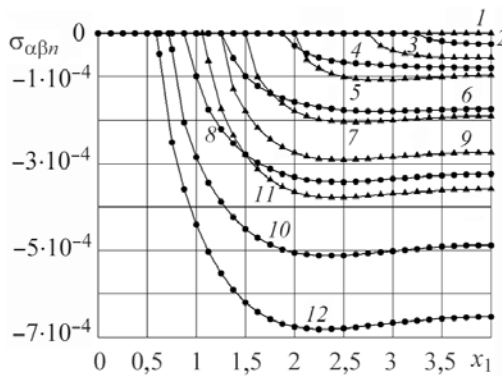


Рис. 7. Fig. 7.

Рис. 7. Контактні напруження σ_{12n} (\blacktriangle) і σ_{23n} (\bullet) для навантажень інтенсивності $q = 0,00002$ (криві 1, 2); 0,0001 (3, 4); 0,00025 (5, 6); 0,0005 (7, 8); 0,00075 (9, 10); 0,001 (11, 12).

Fig. 7. Contact stresses σ_{12n} (\blacktriangle) and σ_{23n} (\bullet) for loads with intensity $q = 0.00002$ (curves 1, 2); 0.0001 (3, 4); 0.00025 (5, 6); 0.0005 (7, 8); 0.00075 (9, 10); 0.001 (11, 12).

Задачу розв'язано методом Робіна–Робіна (29), (30) при $\psi_{12}(\mathbf{x}) \equiv 1$, $\psi_{23}(\mathbf{x}) \equiv 1$, $\gamma = 0,9$ та точності для переміщень $\varepsilon_{\mu} = 10^{-4}$. Параметр штрафу задавали за формулою (31) при $c = 0,05$.

Вивчено розподіли нормальних контактних напружень σ_{12n} і σ_{23n} для зовнішніх навантажень різної інтенсивності (рис. 7). За зусилля інтенсивності $q = 0,00002$ контактують лише верхнє і середнє тіла, а між середнім і нижнім зберігається просвіт. За незначних навантажень мінімум нормальних контактних

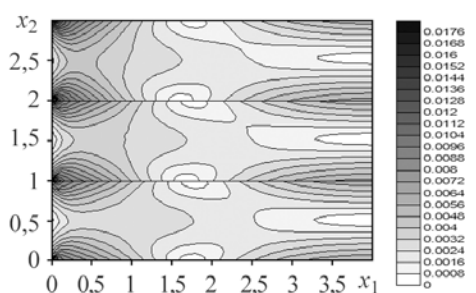


Рис. 8. Лінії рівня напружень $\sigma_{\text{eq}\alpha}$ при $q = 0,001$.

Fig. 8. Isolines of stresses $\sigma_{\text{eq}\alpha}$ for $q = 0.001$.

напружень досягається на правому краю ділянки контакту. Зі збільшенням інтенсивності зовнішнього навантаження q обидві ділянки контакту поступово збільшуються, контактні напруження зменшуються, а їхній мінімум зміщується вліво та розташовується поблизу середини ділянки контакту.

Досліджено еквівалентні напруження у тілах $\sigma_{\text{eq}\alpha}$, $\alpha = 1, 2, 3$ при

$q = 0,001$ (рис. 8). Виявлено, що максимальне значення еквівалентного напруження

досягається поблизу лівого краю ділянки контакту між верхнім і середнім тілами та приблизно рівне 0,0181. Інші локальні максимуми виникають поблизу лівого краю ділянки контакту між середнім і нижнім тілами та поблизу лівої верхньої вершини верхнього тіла і лівої нижньої вершини нижнього та становлять відповідно 0,0156; 0,0161 і 0,014.

ВИСНОВКИ

Для задач про контакт багатьох пружних тіл досліджено паралельні методи декомпозиції області [8–12]. Їх апробовано для числового розв'язування плоских задач про односторонній контакт без тертя трьох пружних тіл з використанням скінченноелементних апроксимацій. Вивчено контактну взаємодію трьох пружних тіл, обтиснених жорсткими плитами, та трьох закріплених тіл, верхнє з яких перебуває під дією сталого зовнішнього навантаження. Для задачі про односторонній контакт трьох обтиснених тіл досліджено залежність швидкості збіжності МДО від пружних сталей та вплив зміни жорсткості тіл на контактні зусилля й еквівалентні напруження у тілах. У випадку, коли тіла мають однакові пружні параметри, порівняно числові результати з аналітичним розв'язком для контакту безмежних смуг [20]. Для задачі про контакт трьох закріплених тіл вивчено вплив інтенсивності заданого зовнішнього навантаження на розв'язки.

РЕЗЮМЕ. Исследованы методы декомпозиции области для численного решения задач об одностороннем контакте без трения многих упругих тел конечных размеров. С использованием конечноэлементных аппроксимаций решены задачи об одностороннем контакте трех упругих тел, сжатых жесткими плитами, и контакте трех закрепленных тел, на одно из которых действует внешняя нагрузка. Изучено распределение нормальных контактных и эквивалентных напряжений в телах.

SUMMARY. The domain decomposition methods for the numerical solution of frictionless unilateral multibody contact problems of elasticity are investigated. The unilateral contact problem of three elastic bodies, which are contracted by rigid plates, and the contact problem of three fixed bodies, one of which is uniformly loaded by constant external load, are solved with the use of finite element approximations. The distributions of normal contact stresses and equivalent body stresses are studied.

1. *Krause R. and Wohlmuth B.* A Dirichlet-Neumann type algorithm for contact problems with friction // *Comp. and Visualization in Sci.* – 2002. – **5** (3). – P. 139–148.
2. *Bayada G., Sabil J., and Sassi T.* A Neumann–Neumann domain decomposition algorithm for the Signorini problem // *Appl. Math. Lett.* – 2004. – **17** (10). – P. 1153–1159.
3. *Sassi T., Ippa M., and Roux F.-X.* Generalization of Lion’s nonoverlapping domain decomposition method for contact problems // *Lect. Notes Comp. Sci. Eng.* – 2008. – **60**. – P. 623–630.
4. *Koko J.* Uzawa block relaxation domain decomposition method for a two-body frictionless contact problem // *Appl. Math. Lett.* – 2009. – **22**. – P. 1534–1538.
5. *Schöberl J.* Efficient contact solvers based on domain decomposition techniques // *Comp. & Math. with Appl.* – 2001. – **42**, № 8–9. – P. 1217–1228.
6. *Avery P. and Farhat C.* The FETI family of domain decomposition methods for inequality-constrained quadratic programming: Application to contact problems with conforming and nonconforming interfaces // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* – 2009. – **198**. – P. 1673–1683.
7. *Dostal Z., Horak D., and Stefanica D.* A scalable FETI–DP algorithm with non-penetration mortar conditions on contact interface // *J. Comp. Appl. Math.* – 2009. – **231**. – P. 577–591.
8. *Прокопишин І. І.* Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя // *Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика.* – 2008. – Вип. 14. – С. 123–133.
9. *Прокопишин І. І.* Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл: Дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2010. – 163 с.
10. *Дуяк І. І. and Prokopyshyn I. I.* Convergence of the Neumann parallel scheme of the domain decomposition method for problems of frictionless contact between several elastic bodies // *J. Math. Sci.* – 2010. – **171** (4). – P. 516–533.
11. *Дуяк І. І. and Prokopyshyn I. I.* Domain decomposition schemes for frictionless multibody contact problems of elasticity // *Numerical Mathematics and Advanced Applications 2009: Proc. of ENUMATH 2009, Uppsala, July 2009.* – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – P. 297–305.
12. *Дуяк І. І., Prokopyshyn I. I., and Prokopyshyn I. A.* Penalty Robin–Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results // *arxiv.org.* – 2012. – 32 p. – [Електронний ресурс: <http://arxiv.org/pdf/1208.6478.pdf>].
13. *Kikuchi N. and Oden J. T.* Contact Problem in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. – Philadelphia: SIAM, 1988. – 489 p.
14. *Кравчук А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // *Прикл. математика и механика.* – 1978. – **42**, № 3. – С. 467–473.
15. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
16. *Кузьменко В. И.* О вариационном подходе к теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел // *Прикл. математика и механика.* – 1979. – **43**, № 5. – С. 893–901.
17. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
18. *Сей Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. – М.: Мир, 1973. – 244 с.
19. *Domain decomposition methods applied to solve frictionless-contact problems for multilayer elastic bodies / А. Ya. Grigorenko, I. I. Dyyak, S. I. Matysyak, I. I. Prokopyshyn // Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46** (4). – P. 388–399.
20. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 456 с.

Одержано 25.07.2011