

УДК 539.3

## ПЛОСКА ЗАДАЧА МАГНЕТОПРУЖНОСТІ ДЛЯ П'ЄЗОМАГНЕТНОГО СЕРЕДОВИЩА З ТРІЩИНАМИ

Л. А. ФИЛЬШТИНСЬКИЙ, Д. М. НОСОВ, Г. А. ЄРЕМЕНКО

*Сумський державний університет*

Розв'язана гранична задача магнетопружності для п'єзомагнетної площини, послабленої тріщинами. Для цього узагальнено метод розв'язування аналогічних задач для анізотропних середовищ. Крайову задачу зведено до матричного сингулярного інтегрального рівняння, розв'язок якого знайдено у класі вектор-функцій, необмежених на кінцях розрізів. Числовий розв'язок цього рівняння отримано методом механічних квадратур. За побудованим числово-аналітичним алгоритмом досліджено вплив магнетопружних полів на коефіцієнти інтенсивності напружень в околі вершин тріщин.

**Ключові слова:** *п'єзомагнетна кераміка, макротріщини, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнти інтенсивності польових величин.*

Після створення штучних п'єзомагнетних керамік з гігантською магнетострикцією [1, 2] інтерес дослідників до магнетопружності істотно посилюється. Зокрема, виявили, що суттєвий взаємний вплив зв'язаних пружних та магнетних полів у керамічних сплавах рідкісноземельних елементів необхідно враховувати в задачах механіки руйнування п'єзомагнетних тіл. Такі задачі про тріщини розглядали раніше [3, 4]. Подано розв'язки двовимірних задач про концентрацію магнетопружних полів у тілах з отворами та тріщинами [5]. Нижче формалізм, запропонований у праці [6], узагальнено на плоскі крайові задачі магнетопружності для тіл з тріщинами.

**Постава задачі.** У декартовій системі координат  $Ox_1x_2$  розглянемо плоску площину з п'єзомагнетного матеріалу, послаблену макротріщинами  $\Gamma_n$  ( $n = \overline{1, M}$ ). Вважатимемо, що на їх берегах діє нормальний тиск  $p_n$ , а на нескінченності задані рівномірні поля напружень розтягу і зсуву  $\sigma_{ij}^\infty$  та магнетної індукції  $B_j^\infty$ ,  $i, j = \overline{1, 2}$ . Припускаємо, що  $\Gamma_n$  – двосторонні ляпуновські дуги з початком та кінцем у точках  $a_n, b_n$  (рис. 1а).

Побудуємо ефективний числово-аналітичний алгоритм, який дасть можливість дослідити зв'язані механічні та магнетні поля у тілі, визначити коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) та магнетної індукції  $K_I, K_{II}, K_B$  у вершинах тріщин, оцінити взаємний вплив механічних та магнетних полів у кераміках (сплавах рідкісноземельних матеріалів).

Польові величини у моделі [7–10] подамо так [4]:

$$\begin{aligned} \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{\mu_k^2, -\mu_k, 1\} \gamma_k \Phi_k(z_k), \\ \{B_1, B_2\} &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{\mu_k, -1\} \lambda_k \Phi_k(z_k). \end{aligned} \quad (1)$$

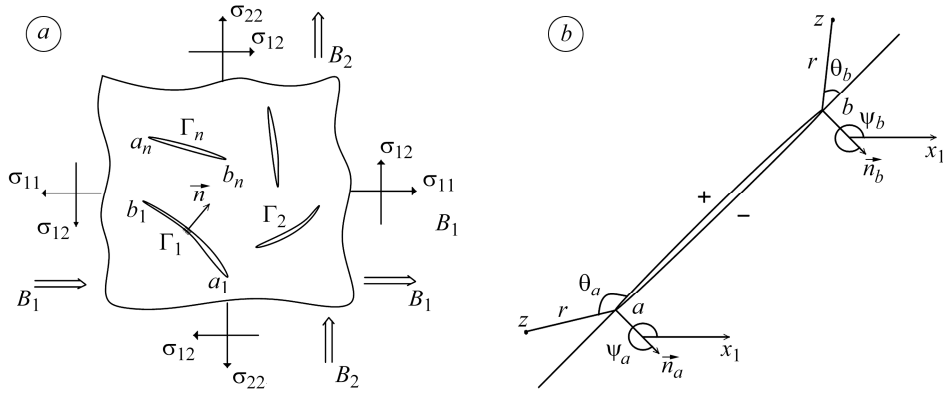


Рис. 1. П'єзомагнетна площина, послаблена макротріщинами.

Fig. 1. A piezomagnetic plane weakened by macrocracks.

Механічні зміщення отримаємо, інтегруючи деформації:

$$\{u_1, u_2\} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{p_{1k}, p_{2k}\} \Phi_k(z_k), \quad \Phi'_k(z_k) = \Phi_k(z_k),$$

де  $p_{1k} = (s_{11}\mu_k^2 + s_{12})\gamma_k - g_{21}\lambda_k$ ;  $p_{2k} = (s_{12}\mu_k + s_{22}/\mu_k)\gamma_k - g_{22}/\mu_k\lambda_k$ ,  $\mu_k$  – характеристичні числа,  $\operatorname{Im}\mu_k > 0$  ( $k = \overline{1, 3}$ ),  $\gamma_k, \lambda_k$  – характеристики матеріалу,  $s_{ij}$  – коефіцієнти деформації,  $g_{ij}$  – п'єзомодулі ( $i, j = \overline{1, 2}$ ) [5, 7].

Потік вектора магнетної індукції через довільну дугу  $ab$  має вигляд

$$B_n = B_1 \cos \psi + B_2 \sin \psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k d_k(\psi) \Phi_k(z_k), \quad d_k(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi. \quad (2)$$

Згідно з розглянутою моделлю крайову задачу магнетопружності зведемо до визначення потенціалів  $\Phi_k(z_k)$  у виразах (1) з крайових умов на повній межі тіла  $\Gamma = \bigcup \Gamma_n$ :

$$X_{1n}^\pm \Big|_\Gamma = -p \cos \psi, \quad X_{2n}^\pm \Big|_\Gamma = -p \sin \psi, \quad B_n^\pm \Big|_\Gamma = 0; \quad p = p_n, \quad \zeta_0 \in \Gamma_n,$$

$$X_{1n} = \sigma_{11} \cos \psi + \sigma_{12} \sin \psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \mu_k d_k(\psi) \Phi_k(z_k),$$

$$X_{2n} = \sigma_{12} \cos \psi + \sigma_{22} \sin \psi = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k d_k(\psi) \Phi_k(z_k),$$

де  $X_{1n}, X_{2n}$  – компоненти вектора напруження, що діє на довільній дузі  $ab$  у точці з нормаллю  $\vec{n}$ , яка утворює з віссю  $Ox_1$  кут  $\psi$  (рис. 1b). Враховуючи формули (2), подамо ці умови у вигляді

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 c_{mk} d_k(\psi_0) \Phi_k^\pm(\zeta_{0k}) = f_m(\zeta_0), \quad m = \overline{1, 3}, \quad (3)$$

де  $f_1 = -p \cos \psi_0$ ,  $f_2 = -p \sin \psi_0$ ,  $f_3 = 0$ ;  $\zeta_{0k} = \operatorname{Re} \zeta_0 + \mu_k \operatorname{Im} \zeta_0$ ,  $\zeta_0 \in \Gamma$ ;  $c_{1k} = \mu_k \gamma_k$ ,  $c_{2k} = -\gamma_k$ ,  $c_{3k} = \lambda_k$ . Тут знак “+” відповідає лівому берегу  $\Gamma_n$  (за прямування від початку тріщини до кінця);  $\psi_0$  – кут між нормаллю до лівого берега у точці  $\zeta_0$  та віссю  $Ox_1$ . Для розв'язання крайової задачі (3) подамо функції  $\Phi_k(z_k)$  у вигляді узагальнених інтегралів типу Коші [6]:

$$\Phi_k(z_k) = A_k + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_k(\zeta)}{\zeta_k - z_k} ds, \quad \omega_k(\zeta) = \{\omega_k^{(n)}(\zeta), \zeta \in \Gamma\}, \quad (4)$$

де  $\zeta_k = \operatorname{Re} \zeta + \mu_k \operatorname{Im} \zeta$ ;  $z_k = \operatorname{Re} z + \mu_k \operatorname{Im} z$ ,  $z = x_1 + ix_2$ ;  $ds$  – елемент дуги у фізичній площині  $z$ .

Граничні значення функції  $\Phi_k(z_k)$  на берегах контуру  $\Gamma$  матимуть вигляд [11]

$$\{\Phi_k(z_k)\}_{z \rightarrow \zeta_0}^{\pm} = A_k \pm \frac{i\omega_k(\zeta_0)}{2d_k(\psi_0)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_k(\zeta)}{\zeta_k - \zeta_{0k}} ds, \quad (5)$$

де знак “+” відноситься до лівого берега розрізу, а “-” – до правого.

Підставляючи функцію (5) у крайові умови (3), приходимо до системи 3M алгебричних та 3M інтегральних рівнянь:

$$\operatorname{Im} \sum_{k=1}^3 c_{mk} \omega_k(\zeta) = 0, \quad \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 c_{mk} d_k(\psi_0) \int_{\Gamma} \frac{\omega_k(\zeta)}{\zeta_k - \zeta_{0k}} ds = N_m(\zeta_0), \quad m = \overline{1, 3},$$

$$\{N_1, N_2, N_3\} = \{-p \cos \psi_0, -p \sin \psi_0, 0\} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{\mu_k \gamma_k, -\gamma_k, \lambda_k\} d_k(\psi_0) A_k. \quad (6)$$

Співвідношення (1) із урахуванням (4) дають на нескінченності

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \{\mu_k^2 \gamma_k, -\mu_k \gamma_k, \gamma_k, \mu_k \lambda_k, -\lambda_k\} A_k = \{\sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}, B_1^{\infty}, B_2^{\infty}\}.$$

Звідси, беручи до уваги вирази (1), запишемо праві частини системи (6):

$$N_1 = -p \cos \psi_0 - \sigma_{11}^{\infty} \cos \psi_0 - \sigma_{12}^{\infty} \sin \psi_0, \quad (7)$$

$$N_2 = -p \sin \psi_0 - \sigma_{12}^{\infty} \cos \psi_0 - \sigma_{22}^{\infty} \sin \psi_0, \quad N_3 = -B_1^{\infty} \cos \psi_0 - B_2^{\infty} \sin \psi_0.$$

У подальшому вилучимо алгебричні рівняння у системі (6). Для цього введемо три дійсні функції  $q_k(\zeta)$ ,  $k = \overline{1, 3}$

$$R\omega(\zeta) = q(\zeta), \quad \omega(\zeta) = R^{-1}q(\zeta), \quad \det R \neq 0, \quad R = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

$$\omega(\zeta) = \{\omega_1(\zeta), \omega_2(\zeta), \omega_3(\zeta)\}^T, \quad q(\zeta) = \{q_1(\zeta), q_2(\zeta), q_3(\zeta)\}^T \quad (8)$$

і систему (6) подамо в матричній формі:

$$\operatorname{Re} \int_{\Gamma} K(\zeta, \zeta_0) q(\zeta) ds = \pi N(\zeta_0), \quad \zeta_0 \in \Gamma, \quad K(\zeta, \zeta_0) = RG(\zeta, \zeta_0)R^{-1}, \quad (9)$$

$$G(\zeta, \zeta_0) = \operatorname{diag} \left\{ \frac{d_1(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{01}}, \frac{d_2(\psi_0)}{\zeta_2 - \zeta_{02}}, \frac{d_3(\psi_0)}{\zeta_3 - \zeta_{03}} \right\}, \quad N(\zeta_0) = \{N_1(\zeta_0), N_2(\zeta_0), N_3(\zeta_0)\}^T.$$

Таким чином, граничну задачу (3) зведено до матричного сингулярного інтегрального рівняння першого роду (9) з ядром Коші відносно дійсної вектор-функції  $q(\zeta)$ , яке необхідно розв’язувати разом із додатковими умовами однозначності зміщень та магнетного потенціалу [6]

$$\int_{\Gamma_n} q(\zeta) ds = 0, \quad n = \overline{1, M},$$

що фіксують єдиний розв’язок системи (9) у класі функцій, необмежених на кінцях дуг  $\Gamma_n$  [12].

**Асимптотика розв’язку у вершинах тріщин.** Параметризуємо контури  $\Gamma_n$ :  $\zeta = \zeta(\beta)$ ,  $\zeta_0 = \zeta(\beta_0)$ ,  $\zeta(-1) = a$ ,  $\zeta(1) = b$ ,  $-1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1$ .

Густина, що фігурують у системі (6), мають кореневі особливості [11, 12]:

$$\omega(\zeta) = \frac{\Omega(\beta)}{s'(\beta)\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Omega(\beta) = \{\Omega_1(\beta), \Omega_2(\beta), \Omega_3(\beta)\}^T, \quad s'(\beta) = ds/d\beta. \quad (10)$$

Згідно з виразами (8), (10) вектор

$$q(\zeta) = \frac{Q(\beta)}{s'(\beta)\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{R^{-1}\Omega(\beta)}{s'(\beta)\sqrt{1-\beta^2}}, \quad Q(\beta) = \{Q_1(\beta), Q_2(\beta), Q_3(\beta)\}^T. \quad (11)$$

Для дослідження головної асимптотики функцій (4) скористаємося формулами, що описують поведінку інтегралів типу Коші в околі кінців лінії інтегрування [11]:

$$\Phi_k^c(z_k) = \frac{i\Omega_k(\pm 1)}{2\sqrt{2\zeta'_k(\pm 1)}} [\pm(c_k - z_k)]^{-1/2}, \quad c_k = \operatorname{Re} c + \mu_k \operatorname{Im} c, \quad \zeta'_k = d\zeta_k/d\beta, \quad (12)$$

де знак “+” відповідає кінцю тріщини,  $c = b$ , а “-” – початку,  $c = a$ . Головну асимптотику механічних напружень, магнетної напруженості та індукції отримаємо, підставляючи у вирази (1) формулу (12).

**Коефіцієнти інтенсивності напружень та магнетної індукції.** На продовженні тріщини по дотичній за вершину  $c$  маємо:

$$\sigma_n = \sigma_{11} \cos^2 \psi_c + \sigma_{12} \sin 2\psi_c + \sigma_{22} \sin^2 \psi_c, \quad \tau_{ns} = \sigma_{12} \cos 2\psi_c + \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \sin 2\psi_c, \quad (13)$$

$$B_n = B_1 \cos \psi_c + B_2 \sin \psi_c, \quad z_k - a_k = -rd_k(\psi_a), \quad b_k - z_k = -rd_k(\psi_b),$$

де  $\psi_c$  – кут додатної нормалі до лівого берега тріщини у вершині  $c$  і віссю  $Ox_1$ ;  $r$  – відстань від точки тіла на дотичній до вершини  $c$ .

Враховуючи формули (12), (1), знаходимо із (13):

$$\sigma_n = \mp \frac{1}{\sqrt{2r s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k a_k(\psi_c) \Omega_k(\pm 1), \quad (14)$$

$$\tau_{ns} = \mp \frac{1}{\sqrt{2r s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k b_k(\psi_c) \Omega_k(\pm 1), \quad B_n = \mp \frac{1}{\sqrt{2r s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_k \Omega_k(\pm 1).$$

Згідно з означеннями КІН та магнетної індукції [13, 14]

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_n, \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{ns}, \quad K_B = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} B_n.$$

Враховуючи рівності (8), (11), (14), отримаємо:

$$K_I = \mp \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \{Q_1(\pm 1) \cos \psi_c + Q_2(\pm 1) \sin \psi_c\}, \quad (15)$$

$$K_{II} = \mp \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \{Q_2(\pm 1) \cos \psi_c - Q_1(\pm 1) \sin \psi_c\}, \quad K_B = \mp \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \{Q_3(\pm 1)\}.$$

**Прямолінійна довільно орієнтована тріщина у п'єзомагнетній площині.**

Якщо тріщина пряма, розв'язок сформульованої задачі можна отримати у замкнутому вигляді [15]. Нехай тріщина довжиною  $2l$  нахилена до осі  $Ox_1$  під кутом  $\alpha$ , на її береги діє нормальний тиск  $p$ , а на нескінченності – рівномірні поля механічних напружень та магнетної індукції. Параметризуємо контур  $\Gamma$ :  $\zeta = \beta l e^{i\alpha}$ ,  $\zeta_0 = \beta_0 l e^{i\alpha}$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $-1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1$ ,  $\zeta_k = \beta l a_k(\psi)$ ,  $\zeta_{0k} = \beta_0 l a_k(\psi)$ ,  $\psi = \alpha + \frac{3}{2}\pi$ ,  $k = \overline{1, 3}$ . Тоді система інтегральних рівнянь (9) розпадеться на три незалежні характеристичні рівняння вигляду

$$\frac{1}{\pi l} \int_{-1}^1 \frac{Q_m(\beta) d\beta}{\sqrt{1-\beta^2} (\beta-\beta_0)} = N_m, \quad m = \overline{1, 3},$$

де  $N_m$  визначені у виразі (7). Розв'язки цих рівнянь:  $Q_m(\beta) = lN_m\beta$ . Вводячи величини  $Q_m(\pm 1) = \pm lN_m$  у виразі (15), отримаємо:

$$K_I = \sqrt{\pi l} \left( p + \sigma_{11}^{\infty} \cos^2 \psi + \sigma_{12}^{\infty} \sin 2\psi + \sigma_{22}^{\infty} \sin^2 \psi \right),$$

$$K_{II} = \sqrt{\pi l} \left( \frac{\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty}}{2} \sin 2\psi + \sigma_{12}^{\infty} \cos 2\psi \right), \quad K_B = \sqrt{\pi l} \left( B_1^{\infty} \cos \psi + B_2^{\infty} \sin \psi \right).$$

Для горизонтальної тріщини  $\left( \psi = \frac{3}{2} \pi \right)$

$$K_I = \sqrt{\pi l} \left( p + \sigma_{22}^{\infty} \right), \quad K_{II} = -\sqrt{\pi l} \sigma_{12}^{\infty}, \quad K_B = -\sqrt{\pi l} B_2^{\infty}.$$

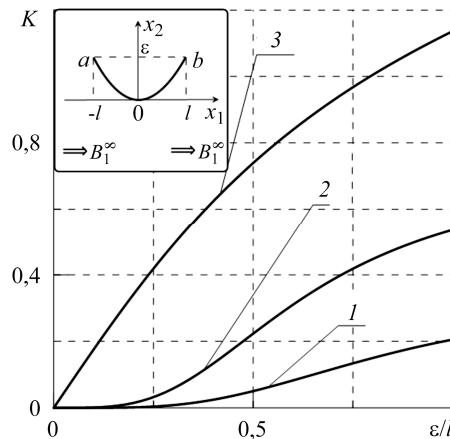
Отже, для прямолінійної тріщини незалежно від її орієнтації КІН не залежать від матеріальних сталей середовища.

**Числові результати.** Побудований аналітичний алгоритм реалізували числово, застосовуючи метод механічних квадратур. Розглядали п'єзомагнетні пластини, послаблені параболічною ( $x_1 = l\beta$ ,  $x_2 = \varepsilon\beta^2$ ,  $l = 1$ ,  $-1 \leq \beta \leq 1$ ) або двома прямолінійними тріщинами. Для розрахунків використовували фізико-механічні сталі (модифікована п'єзокераміка Terfenol-D, поляризована у напрямку осі  $Ox_2$ ) [5]:  $s_{11}/s_0 = 36,4$ ;  $s_{22}/s_0 = 34,8$ ;  $s_{12}/s_0 = -8,96$ ;  $g_{16}/g_0 = 112,22$ ;  $g_{21}/g_0 = -52,83$ ;  $g_{22}/g_0 = 121,25$ ;  $\chi_{11}/\beta_0 = 162,68$ ;  $\chi_{22}/\beta_0 = 138,06$ ;  $s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}$ ;  $g_0 = 10^{-5} \text{ МТ}^{-1}$ ;  $\beta_0 = 10^{-3} \text{ МПа/МТ}^2$ .

Побудували (рис. 2) залежність КІН та магнетної індукції від параметра кривизни параболічної тріщини  $\varepsilon/l$  за дії на нескінченності магнетного поля ( $B_1^{\infty} = 1 \text{ Т}$ ;  $B_2^{\infty} = 0$ ). У середовищі виникають КІН  $K_I$  і  $K_{II}$ , які разом із коефіцієнтом  $K_B$  суттєво зростають зі збільшенням значень  $\varepsilon/l$ . За дії одновісного розтягу на нескінченності ( $\sigma_{11}^{\infty} = 1 \text{ Па}$ ;  $\sigma_{12}^{\infty} = \sigma_{22}^{\infty} = 0$ ;  $B_1^{\infty} = B_2^{\infty} = 0$ ) горизонтальна тріщина сприяє зростанню значень  $K_I$  та  $K_{II}$  у вершині нахиленої тріщини  $a_2$ , що знаходиться ближче до горизонтальної (рис. 3а, б).

Рис. 2. Розподіл КІН та магнетної індукції залежно від кривизни параболічної тріщини (параметра  $\varepsilon/l$ ) за дії магнетної індукції ( $B_1^{\infty} = 1 \text{ Т}$ ,  $B_2^{\infty} = 0$ ,  $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{12}^{\infty} = \sigma_{22}^{\infty} = 0$ ):  
1, 2 –  $K_I$  і  $K_{II}$ ,  $\text{Па} \cdot \text{м}^{1/2}$ ; 3 –  $K_B$ ,  $\text{Т} \cdot \text{м}^{1/2}$ .

Fig. 2. SIF and magnetic induction distributions depending on geometric properties of parabolic crack (parameter  $\varepsilon/l$ ) under acting magnetic induction ( $B_1^{\infty} = 1 \text{ T}$ ,  $B_2^{\infty} = 0$ ,  $\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{12}^{\infty} = \sigma_{22}^{\infty} = 0$ ):  
1, 2 –  $K_I$  and  $K_{II}$ ,  $\text{Pa} \cdot \text{m}^{1/2}$ ; 3 –  $K_B$ ,  $\text{T} \cdot \text{m}^{1/2}$ .



Побудовано (рис. 3с, д) криві розподілу КІН  $K_I$  та  $K_{II}$  на кінцях тріщини  $a_1b_1$  залежно від кута  $\alpha$  між віссю  $Ox_1$  та тріщиною  $a_2b_2$  за дії магнетної індукції

( $B_2^\infty = 1 \text{ T}$ ;  $B_1^\infty = 0$ ). Виявлено, що взаємовплив тріщин проявляється у порушенні симетрії для значень  $K_{II}$  (рис. 3d) та виникненні від'ємних значень  $K_I$  (рис. 3c).

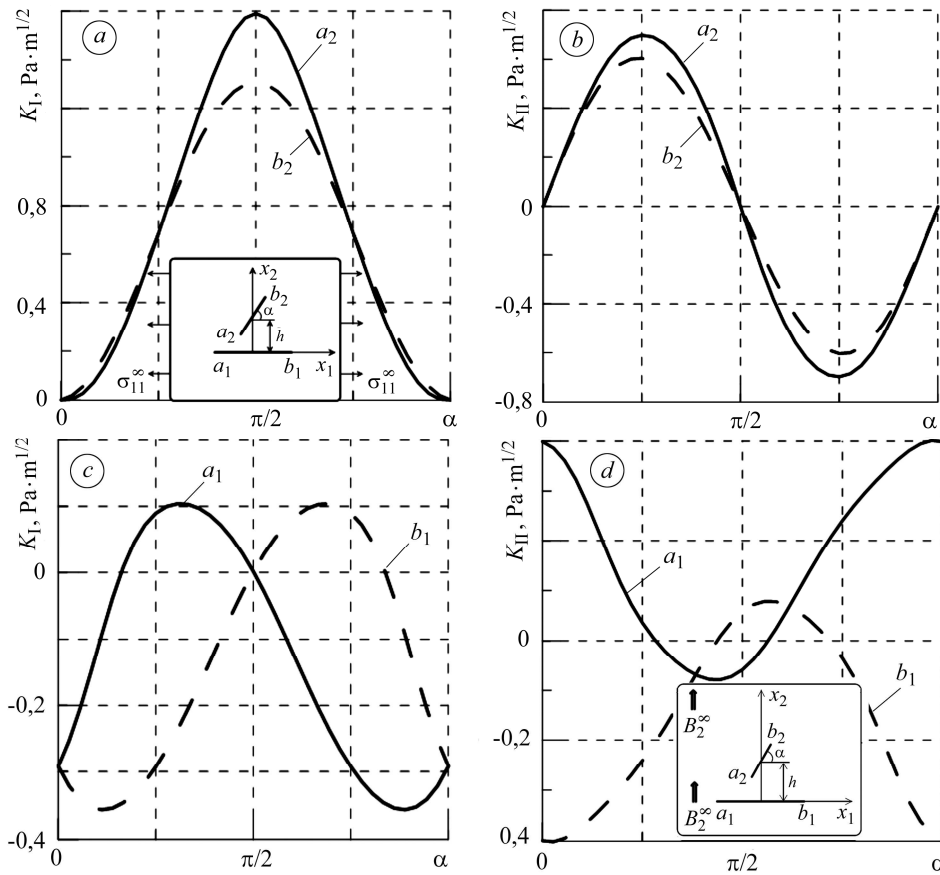


Рис. 3. Залежності КІН  $K_I$ ,  $K_{II}$  від кута нахилу  $\alpha$  тріщини  $a_2b_2$ , коли на нескінченності діють механічне напруження  $\sigma_{11}^\infty = 1 \text{ Pa}$ , ( $\sigma_{12}^\infty = \sigma_{22}^\infty = 0$ ,  $B_1^\infty = B_2^\infty = 0$ ) (a, b) та магнетна індукція  $B_2^\infty = 1 \text{ T}$ , ( $B_1^\infty = 0$ ,  $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{12}^\infty = \sigma_{22}^\infty = 0$ ); (c, d).  $|a_2b_2| = 1 \text{ m}$ ,  $|a_1b_1| = 2 \text{ m}$ ,  $h = 0,6 \text{ m}$ .

Fig. 3. Dependences of SIF  $K_I$ ,  $K_{II}$  on the inclination angle  $\alpha$  when at infinity there is an action of mechanical stresses  $\sigma_{11}^\infty = 1 \text{ Pa}$  ( $\sigma_{12}^\infty = \sigma_{22}^\infty = 0$ ,  $B_1^\infty = B_2^\infty = 0$ ) (a, b) and magnetic induction  $B_2^\infty = 1 \text{ T}$ , ( $B_1^\infty = 0$ ,  $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{12}^\infty = \sigma_{22}^\infty = 0$ ); (c, d).  $|a_2b_2| = 1 \text{ m}$ ,  $|a_1b_1| = 2 \text{ m}$ ,  $h = 0,6 \text{ m}$ .

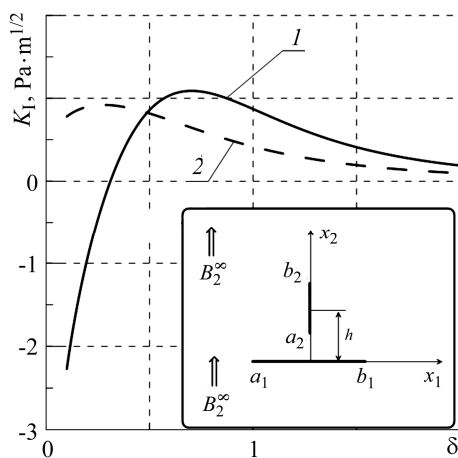


Рис. 4. Залежність КІН  $K_I$  (1 –  $K_I(a_2)$ ; 2 –  $K_I(b_2)$ ) на кінцях тріщини  $a_2b_2$  від параметра  $\delta = (h - l_2) / l_1$  за дії магнетної індукції  $B_2^\infty = 1 \text{ T}$  ( $B_1^\infty = 0$ ,  $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{12}^\infty = \sigma_{22}^\infty = 0$ ,  $|a_2b_2| = 2l_2 = 1 \text{ m}$ ,  $|a_1b_1| = 2l_1 = 1 \text{ m}$ ).

Fig. 4. Dependence of SIF  $K_I$  (1 –  $K_I(a_2)$ ; 2 –  $K_I(b_2)$ ) at the crack ends  $a_2b_2$  on parameter  $\delta = (h - l_2) / l_1$  under action of magnetic induction  $B_2^\infty = 1 \text{ T}$  ( $B_1^\infty = 0$ ,  $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{12}^\infty = \sigma_{22}^\infty = 0$ ,  $|a_2b_2| = 2l_2 = 1 \text{ m}$ ,  $|a_1b_1| = 2l_1 = 1 \text{ m}$ ).

Під дією магнетної індукції на нескінченності ( $B_2^\infty = 1$  Т,  $B_1^\infty = 0$ ) значення КІН  $K_I$  на кінцях вертикальної тріщини ( $\alpha = \pi/2$ ) суттєво залежать від параметра  $\delta = (h - l_2) / l_1$  (рис. 4). Для віддалених на певну відстань тріщин значення КІН  $K_I(a_2)$  та  $K_I(b_2)$  починають прямувати до нуля. Від'ємні КІН  $K_I(a_2)$  для значень  $\delta < 0,25$  свідчать про контакт берегів біля початку тріщини  $a_2$ .

#### ВИСНОВКИ

Методом сингулярних інтегральних рівнянь граничну задачу магнетопружності для площини з тріщинами зведено до матричного сингулярного інтегрального рівняння відносно трьох дійсних функцій, які реалізовані числово методом механічних квадратур. Отримані формули для КІН та магнетної індукції. Встановлено необхідність враховувати взаємний вплив магнетного та механічного полів на характеристики руйнування пластини в околі вершин.

*РЕЗЮМЕ.* Решена граничная задача магнетопружности для пьезомагнитной плоскости, ослабленной трещинами. Для этого обобщен метод решения аналогичных задач для анизотропных сред. Краевая задача сведена к матричному сингулярному интегральному уравнению, решение которого найдено в классе вектор-функций, неограниченных на концах разрезов. Численное решение этого уравнения получено методом механических квадратур. Построенный численно-аналитический алгоритм дал возможность исследовать влияние магнетопругих полей на коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин.

*SUMMARY.* A boundary problem of magnetoelasticity for a piezomagnetic plane, weakened by cracks is considered. To solve this problem a method of solution of the similar problems for anisotropic media has been generalized. The boundary value problem is reduced to the matrix singular integral equation. Its solution is found in a class of vector-functions unbounded at the ends of mathematical cuts. Numerical solution is obtained with the mechanical quadrature method. The constructed numerical-analytic algorithm was constructed in such a way that there was a possibility to research the influence of magneto-elastic fields on the stress intensity factors in the neighborhood of the crack tips.

1. Clark A. E. Ferromagnetic Materials. – Amsterdam: North-Holland, 1980. – 532 p.
2. James R. D. and Kinderlehrer D. Theory of magnetostriction with application to Terfenol-D // J. Appl. Phys. – 1994. – 76, № 10. – P. 7012–7014.
3. Lin C.-B. and Yeh C.-S. The magnetoelastic problem of a crack in a soft ferromagnetic solid // Int. J. Sol. and stuct. – 2002. – 39. – P. 1–17.
4. Tian W.-Y. and Gabbert U. Multiple crack interaction problem in magnetoelastic solids // Europ. J. Mechanics. Part A. – 2004. – 23. – P. 1–17.
5. Калоеров С. А., Баева А. Н., Бороненко О. Н. Двумерные задачи электро- и магнетопружности для многосвязных областей. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.
6. Фильштинский Л. А. Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 5. – С. 91–97.
7. Brown W. F. Magnetoelastic Interactions. – New York: Springer-Verlag, 1966. – 156 p.
8. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
9. Най Дж. Физические свойства кристаллов. – М.: Мир, 1967. – 386 с.
10. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
11. Мухеливили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 600 с.
12. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 380 с.
13. Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
14. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.
15. Григолюк Е. И., Фильштинский Л. А. Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами. – М.: Физматлит, 1994. – 336 с.

Одержано 07.07.2014