

УДК 539.3

ПЛОСКА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ КВАЗІОРТОТРОПНОГО ТІЛА З ТРІЩИНАМИ

М. П. САВРУК^{1,2}, А. Б. ЧОРНЕНЬКИЙ¹

¹ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

² Білостоцька політехніка, Польща

Записано основні співвідношення плоскої задачі теорії пружності для квазіортотропного тіла. Побудовано інтегральні зображення комплексних потенціалів напружень для квазіортотропної площини через стрибки переміщень на криволінійних розімкнених контурах. Першу основну задачу для площини з тріщинами зведено до сингулярних інтегральних рівнянь. Знайдено асимптотичний розподіл напружень біля вершини криволінійної тріщини. Записано аналітичний розв'язок задачі для довільно орієнтованої прямолінійної тріщини. Числово розраховано коефіцієнти інтенсивності напружень для параболічної тріщини та досліджено вплив на їх поведінку відношення основних модулів пружності матеріалу.

Ключові слова: коефіцієнт інтенсивності напружень, теорія пружності, квазіортотропне середовище, криволінійна тріщина, метод сингулярних інтегральних рівнянь.

Плоскі задачі теорії пружності для анізотропних та ортотропних тіл з тріщинами розглядали раніше [1–6], причому корені характеристичного рівняння вважали різними. Вивчали також вироджений анізотропний матеріал, коли корені характеристичного рівняння кратні [7]. Вироджений ортотропний матеріал називають квазіортотропним [8–10]. До цього класу належать ізотропні матеріали, а також різні композитні матеріали на основі кераміки, волокнисті та шаруваті композити тощо [11]. У літературі [12] такі тіла також іменують псевдоізотропними, а в задачах теорії ортотропних оболонок з прямолінійними тріщинами – спеціально-ортотропними [13–16].

Нижче методом сингулярних інтегральних рівнянь розглянуто плоску задачу теорії пружності для квазіортотропної площини з криволінійними тріщинами. Отримано коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для довільно розміщених прямолінійної та параболічної тріщин.

Основні співвідношення плоскої задачі теорії пружності для квазіортотропного середовища. Лінійні залежності між компонентами тензорів напружень σ_x , σ_y , τ_{xy} та деформацій ε_x , ε_y , ε_{xy} (закон Гука) за плоского напруженого стану для ортотропного тіла в декартовій системі координат x, y , коли координатні осі x і y вибрано вздовж головних осей ортотропії, мають вигляд [17]

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y, \quad \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y, \quad \varepsilon_{xy} = 2a_{66}\tau_{xy},$$

де $a_{11} = 1/E_x$; $a_{22} = 1/E_y$; $a_{12} = -\nu_{xy}/E_x$; $a_{66} = 1/G$. Тут $E_x = E_1$, $E_y = E_2$ ($E_x = E_2$, $E_y = E_1$) – модулі пружності для розтягу–стиску вздовж осей x і y ; $\nu_{xy} = \nu_{12}$ ($\nu_{xy} = \nu_{21} = \nu_{12} E_2/E_1$) – коефіцієнт Пуассона за стиску площини у напрямі осі $y(x)$, якщо розтяг вздовж осі $x(y)$; $G = G_{12} = G_{xy} = G_{21} = G_{yx}$ – модуль зсуву, що характеризує зміну кутів між головними осями.

Вважатимемо, що пружні сталі a_{ij} зв'язані залежністю

$$a_{66} = 2(\sqrt{a_{11}a_{22}} - a_{12}), \quad (1)$$

або $G = E_1 / 2(\sqrt{E_1/E_2} + \nu_{12})$ – для плоского напруженого стану. Співвідношення (1) може служити ознакою квазіортотропного тіла.

Для плоскої деформації ортотропного тіла пружні сталі a_{ij} у законі Гука необхідно замінити на величини $a'_{ij} = a_{ij} - (a_{i3}a_{j3})/a_{33}$, де $a_{13} = -\nu_{13}/E_1$, $a_{23} = -\nu_{23}/E_2$, $a_{33} = 1/E_3$ – відповідні пружні характеристики матеріалу.

Введемо функцію напружень $F(x, y)$ залежностями [17]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \sigma_z = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

За відсутності масових сил функція $F(x, y)$ для квазіортотропного тіла задовольняє еліптичне диференціальне рівняння четвертого порядку

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2\gamma^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \gamma^4 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0, \quad (3)$$

характеристичне рівняння якого має вигляд

$$\mu^4 + 2\gamma^2 \mu^2 + \gamma^4 = 0. \quad (4)$$

Тут $\gamma = \sqrt[4]{a_{22}/a_{11}}$ – параметр ортотропії. Для плоского напруженого стану $\gamma = \sqrt[4]{E_x/E_y}$. Рівняння (4) має комплексно спряжені кратні корені $\mu_1 = \mu_2 = i\gamma$, $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = -i\gamma$. Для ізотропного матеріалу $\gamma = 1$.

Загальний розв'язок рівняння (3) для квазіортотропного тіла можна подати через аналітичні функції $\phi_1(z_1)$ і $\chi_1(z_1)$ від комплексного аргументу $z_1 = x + i\gamma y$ у вигляді [17]

$$F(z_1) = \text{Re}[\bar{z}_1 \phi_1(z_1) + \chi_1(z_1)]. \quad (5)$$

На основі співвідношень (2) і (5) виразимо компоненти напружень через комплексні потенціали $\Phi_1(z_1) = \phi_1'(z_1)$ і $\Psi_1(z_1) = \psi_1'(z_1) = \chi_1''(z_1)$ за формулами

$$\begin{cases} \sigma_x(z_1) = -\gamma^2 \text{Re}\{\Psi_1(z_1) + \bar{z}_1 \Phi_1'(z_1) - 2\Phi_1(z_1)\}, \\ \sigma_y(z_1) = \text{Re}\{\Psi_1(z_1) + \bar{z}_1 \Phi_1'(z_1) + 2\Phi_1(z_1)\}, \\ \tau_{xy}(z_1) = \gamma \text{Im}\{\Psi_1(z_1) + \bar{z}_1 \Phi_1'(z_1)\}. \end{cases}$$

Декартові компоненти вектора переміщення u і v можна також записати через комплексні потенціали $\phi_1(z_1)$ та $\psi_1(z_1) = \chi_1'(z_1)$ [18]:

$$2G[u + (i/\gamma)v] = \kappa \Phi_1(z_1) - z_1 \overline{\Phi_1'(z_1)} - \overline{\Psi_1(z_1)}, \quad (6)$$

де $\kappa = (3\sqrt{a_{22}/a_{11}} + a_{12}/a_{22}) / (\sqrt{a_{22}/a_{11}} - a_{12}/a_{22})$.

Для плоского напруженого стану $\kappa = (3\gamma^2 - \nu_{xy}) / (\gamma^2 + \nu_{xy})$.

З рівності (6) отримаємо:

$$2G \frac{d}{dt_1}(u + (i/\gamma)v) = \kappa \Phi_1(t_1) - \overline{\Phi_1(t_1)} - \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} (\overline{t_1 \Phi_1'(t_1)} + \overline{\Psi_1(t_1)}), \quad t_1 = x + i\gamma y \in L_1, \quad (7)$$

де L_1 – контур у допоміжній площині $z_1 = x + i\gamma y$, що відповідає криволінійному контуру L у комплексній площині $z = x + iy$.

Нехай X_n і Y_n – декартові компоненти вектора напружень, що діють з боку додатної нормалі n на криволінійному контурі L (рис. 1). Вони пов'язані з нормальною і дотичною компонентами напружень N і T залежністю [19]

$$X_n + iY_n = -i \frac{dt}{ds} (N + iT) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - i \frac{\partial F}{\partial x} \right), \quad (8)$$

де s – дугова абсциса на контурі L , що відповідає точці $t = x + iy \in L$.

Використовуючи подання (5) і (8), знаходимо:

$$\begin{aligned} ((i/\gamma)X_n - Y_n) \frac{ds}{dt_1} &= \\ &= \Phi_1(t_1) + \overline{\Phi_1(t_1)} + \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} (t_1 \overline{\Phi_1'(t_1)} + \\ &+ \overline{\Psi_1(t_1)}), \quad t_1 \in L_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Співвідношення (7) і (9) дають змогу основні задачі теорії пружності зводити до крайових задач теорії функції комплексної змінної.

Інтегральні зображення комплексних потенціалів. Знайдемо розв'язок допоміжної задачі, коли на розімкненому криволінійному контурі L у квазіортотропній площині напруження неперервні, переміщення розривні

$$[(i/\gamma)X_n - Y_n]^+ - [(i/\gamma)X_n - Y_n]^- = 0, \quad t \in L, \quad (10)$$

$$[u + (i/\gamma)v]^+ - [u + (i/\gamma)v]^- = \frac{4i\gamma^2}{E_x} g(t), \quad t \in L, \quad (11)$$

а на нескінченності напруження і поворот відсутні. Тут верхні індекси “+” і “-” вказують на граничне значення відповідних величин, коли $z \rightarrow t \in L$ відповідно зліва (+) або справа (-) щодо вибраного додатного напрямку обходу контуру L (рис. 1).

Після диференціювання рівність (11) набуде вигляду

$$\frac{d}{dt_1} \left[(u + (i/\gamma)v)^+ - (u + (i/\gamma)v)^- \right] = \frac{4i\gamma^2}{E_x} g_1'(t_1), \quad t_1 = x + i\gamma y \in L_1, \quad (12)$$

де $g_1(t_1) = g(t)$.

Скориставшись співвідношеннями (7), (9), (10) і (12), отримаємо крайову задачу

$$\Phi_1^+(t_1) - \Phi_1^-(t_1) = ig_1'(t_1);$$

$$[\bar{t}_1 \Phi_1'(t_1) + \Psi_1(t_1)]^+ - [\bar{t}_1 \Phi_1'(t_1) + \Psi_1(t_1)]^- = i \left[\overline{g_1'(t_1)} - g_1'(t_1) \right] \frac{d\bar{t}_1}{dt_1}, \quad t_1 \in L_1,$$

розв'язок якої відомий [20]:

$$\Phi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \frac{g_1'(t_1) dt_1}{t_1 - z_1}; \quad \Psi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{\overline{g_1'(t_1)} dt_1}{t_1 - z_1} - \frac{\bar{t}_1 g_1'(t_1) dt_1}{(t_1 - z_1)^2} \right]. \quad (13)$$

Співвідношення (13) можна розглядати як інтегральні зображення комплексних потенціалів напружень $\Phi_1(z_1)$ і $\Psi_1(z_1)$ через похідну стрибка вектора переміщень на криволінійному контурі L за неперервних напружень на ньому.

Інтегральне рівняння. На підставі зображення комплексних потенціалів (13) можна розглядати різноманітні крайові плоскі задачі для пружного квазіортотропного тіла з отворами та тріщинами [20]. Нехай на берегах тріщини L задані зрівноважені напруження (перша основна задача)

$$N^+ + iT^+ = N^- + iT^- = p(t), \quad t \in L \quad (14)$$

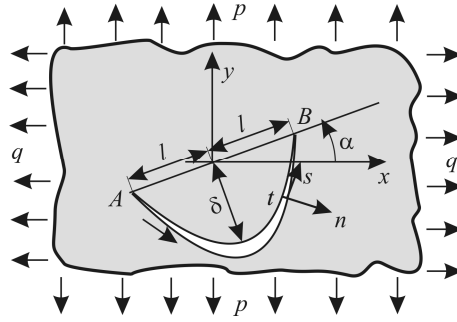


Рис. 1. Параболічна тріщина в квазіортотропній площині.

Fig. 1. A parabolic crack in a quasi-orthotropic plane.

за відсутності напружень на нескінченності.

Крайову умову (14) можна також записати у вигляді

$$\left[(i/\gamma)X_n^\pm - Y_n^\pm \right] \frac{ds}{dt_1} = \tilde{P}(t) = \tilde{P}_1(t_1) = \frac{1}{2\gamma} \left[(1+\gamma)p(t) - (1-\gamma)\overline{p(t)} \frac{d\bar{t}}{dt} \right] \frac{dt}{dt_1}. \quad (15)$$

Використавши співвідношення (9) та задовольнивши умову (14) за допомогою потенціалів (13) отримаємо сингулярне інтегральне рівняння для визначення невідомої функції $g'_1(t_1)$ [9]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} [K_1(\tau_1, t_1) g'_1(\tau_1) d\tau_1 + L_1(\tau_1, t_1) \overline{g'_1(\tau_1)} d\bar{\tau}_1] = \tilde{P}_1(t_1), \quad (16)$$

$$\text{де } K_1(\tau_1, t_1) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\tau_1 - t_1} + \frac{1}{\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1} \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \right]; \quad L_1(\tau_1, t_1) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1} - \frac{\tau_1 - t_1}{(\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1)^2} \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \right]. \quad (17)$$

Зауважимо, що інтегральне рівняння (16) узгоджується з відомим для виродженого анізотропного тіла [13], отриманим граничним переходом із загального випадку анізотропної площини з криволінійними тріщинами. Його розв'язок повинен задовольняти умову

$$\int_{L_1} g'_1(t_1) dt_1 = 0, \quad (18)$$

яка забезпечує однозначність переміщень за обходу контуру тріщини L .

Комплексні потенціали напружень (13) та сингулярне інтегральне рівняння (16) справедливі також і для системи криволінійних тріщин у квазіортотропній площині, коли символ L позначає сукупність контурів тріщин, проте додаткова умова однозначності переміщень (18) повинна виконуватися для кожної тріщини окремо.

Розподіл напружень біля вершини тріщини. Асимптотичний розподіл напружень біля вершини тріщини на осі x у квазіортотропному двовимірному тілі описують залежності [7, 8]

$$\begin{cases} \sigma_x \approx \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\gamma^2 (2 \cos \theta - i\gamma \sin \theta)}{2(\cos \theta + i\gamma \sin \theta)^{3/2}} \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{4i\gamma \cos \theta - 3\gamma^2 \sin \theta}{2(\cos \theta + i\gamma \sin \theta)^{3/2}} \right]; \\ \sigma_y \approx \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{2 \cos \theta + 3i\gamma \sin \theta}{2(\cos \theta + i\gamma \sin \theta)^{3/2}} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\sin \theta}{2(\cos \theta + i\gamma \sin \theta)^{3/2}} \right]; \\ \tau_{xy} \approx \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\gamma^2 \sin \theta}{2(\cos \theta + i\gamma \sin \theta)^{3/2}} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{2 \cos \theta + i\gamma \sin \theta}{2(\cos \theta + i\gamma \sin \theta)^{3/2}} \right], \end{cases} \quad (19)$$

де K_I і K_{II} – КІН у вершинах тріщини; r – віддаль від її вершини; θ – кут, який відлічують від лінії тріщини. Звідси випливають формули для визначення КІН через напруження на продовженні тріщини:

$$K_I - iK_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} [\sigma_y(r, 0) - i\tau_{xy}(r, 0)]. \quad (20)$$

Співвідношення (19) і (20) справедливі для довільно орієнтованої тріщини, зокрема і для криволінійної, якщо вважати x і y та r і θ локальними декартовими та полярними координатами, зв'язаними з напрямком дотичної у вершині тріщини та самою вершиною.

Використовуючи відповідні результати для анізотропного тіла з криволінійною тріщиною [7], отримаємо для квазіортотропного тіла вирази КІН на початку (K_I^-, K_{II}^-) та в кінці (K_I^+, K_{II}^+) тріщини через розв'язок сингулярного інтегрального рівняння

$$\begin{aligned}
K_I^\pm &= \pm\sqrt{\pi} \operatorname{Im} \frac{u_1(\pm 1)\overline{\omega_1'(\pm 1)}}{i|\omega'(\pm 1)|\sqrt{|\omega'(\pm 1)|}}, \\
K_{II}^\pm &= \pm\sqrt{\pi} \operatorname{Re} \frac{u_1(\pm 1)[(1+\gamma)\overline{\omega'(\pm 1)} - (1-\gamma)\omega'(\pm 1)]}{2i|\omega'(\pm 1)|\sqrt{|\omega'(\pm 1)|}},
\end{aligned} \tag{21}$$

де

$$\begin{aligned}
t_1 = \omega_1(\xi) &= x(\xi) + i\gamma y(\xi); \quad t = \omega(\xi) = x(\xi) + iy(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1; \\
u_1(\xi)/\sqrt{1-\xi^2} &= g_1'(\xi) = g_1'(t_1)\omega_1'(\xi).
\end{aligned}$$

Величини $u_1(\pm 1)$ знаходять із розв'язку інтегрального рівняння (16) [20].

Прямолінійна тріщина довільної орієнтації в квазіортотропній площині.

Розглянемо в квазіортотропній площині прямолінійну тріщину L довжиною $2l$, нахилену під кутом α до осі x і на берегах якої задані самозрівноважені напруження

$$N^+ + iT^+ = N^- + iT^- = p(t), \quad t \in L,$$

причому напруження та поворот на нескінченності відсутні. Вважатимемо також, що береги тріщини не контактують.

Параметричне рівняння контурів L та L_1 подамо у вигляді

$$\tau = \omega(\xi) = \xi l e^{i\alpha}, \quad t = \omega(\eta), \quad \tau_1 = \omega_1(\xi) = \xi l \Gamma / 2, \quad t_1 = \omega_1(\eta),$$

де $\Gamma = (1+\gamma)e^{i\alpha} + (1-\gamma)e^{-i\alpha}$; $\xi, \eta \in [-1; 1]$.

Тоді ядра (17) та права частина рівняння (16) матимуть вигляд

$$K_1(\xi, \eta) = \frac{2}{(\xi - \eta)l\Gamma}, \quad L_1(\xi, \eta) = 0; \quad \tilde{P}_1(\eta) = \frac{1}{\Gamma} \hat{P}_1(\eta);$$

де $\hat{P}_1(\eta) = (1+\gamma)p(\eta) - (1-\gamma)\overline{p(\eta)}e^{-2i\alpha}$.

Запишемо інтегральне рівняння задачі у безрозмірній формі:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(\xi - \eta)} = \frac{1}{2\gamma} \hat{P}_1(\eta), \quad -1 \leq \eta \leq 1.$$

Розв'язок цього рівняння за умови (18) знайдемо за формулами (див., наприклад [20])

$$u_1(\xi) = \frac{1}{2\gamma\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\eta^2} \hat{P}_1(\eta) d\eta}{\xi - \eta}, \quad u_1(\pm 1) = \pm \frac{1}{2\gamma\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1\pm\eta}}{\sqrt{1\mp\eta}} \hat{P}_1(\eta) d\eta.$$

Скориставшись виразами (21), дістанемо КІН

$$K_I^\pm - iK_{II}^\pm = -2\sqrt{\frac{l}{\pi}} \operatorname{Re} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1\pm\eta}}{\sqrt{1\mp\eta}} p(\eta) d\eta.$$

Якщо береги тріщини навантажені сталими нормальним (σ) та дотичним (τ) напруженнями ($p(\eta) = -\sigma - i\tau = \text{const}$), отримаємо:

$$K_I^\pm - iK_{II}^\pm = 2\sqrt{\pi l} (\sigma - i\tau).$$

Коли нескінченна площа з вільною від навантаження тріщиною піддається на нескінченності розтягу зовнішніми напруженнями $\sigma_y^\infty = p$ і $\sigma_x^\infty = q$, маємо:

$$K_I^\pm - iK_{II}^\pm = \sqrt{\pi l} (p + q - (p - q)e^{2i\alpha}).$$

Таким чином, у квазіортотропному тілі КІН у вершині довільно орієнтованої прямолінійної тріщини за самозрівноваженого навантаження на її берегах такі самі, як і в ізотропному, хоча напруження на продовженні тріщини різняться.

Тріщина вздовж дуги параболи. Розглянемо плоску задачу теорії пружності для квазіортотропної площини, послабленої довільно розташованою параболічною тріщиною, параметричне рівняння контуру L якої має вигляд

$$t = \omega(\xi) = l[\xi + i\varepsilon(\xi^2 - 1)]e^{i\alpha}; \quad -1 \leq \xi \leq 1;$$

$$t_1 = \omega_1(\xi) = l/2[(\xi + i\varepsilon(\xi^2 - 1))(1 + \gamma)e^{i\alpha} + (\xi - i\varepsilon(\xi^2 - 1))(1 - \gamma)e^{-i\alpha}]; \quad -1 \leq \xi \leq 1,$$

де $\varepsilon = \delta/l$ – відносний прогин тріщини; α – кут її орієнтації (рис. 1).

Числовий розв’язок інтегрального рівняння (16) отримано квадратурним методом [20], коли береги тріщини вільні від навантаження, а на нескінченності задані напруження $\sigma_y^\infty = p$ і $\sigma_x^\infty = q$, Порівняно відносні КІН $F_I = K_I^+ / p\sqrt{\pi l}$ та $F_{II} = K_{II}^+ / p\sqrt{\pi l}$, коли кут $\alpha = 0$ і напруження $q = p$, для квазіортотропного та ортотропного матеріалів з тим самим відношенням модулів пружності (див. таблицю).

Значення відносних КІН F_I і F_{II} у вершині параболічної тріщини в квазіортотропній (чисельник) та ортотропній (знаменник) площинах

Матеріал	CF2		Лу-1		ЕФ	
	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
0,5	$\frac{0,86815}{0,85873}$	$\frac{0,28717}{0,30618}$	$\frac{0,72574}{0,74313}$	$\frac{0,46623}{0,44546}$	$\frac{0,80187}{0,80097}$	$\frac{0,34519}{0,35669}$
	$\frac{0,83099}{0,80473}$	$\frac{0,27569}{0,32273}$	$\frac{0,60567}{0,64063}$	$\frac{0,54230}{0,47425}$	$\frac{0,72076}{0,71933}$	$\frac{0,40820}{0,40532}$
1,0	$\frac{0,86871}{0,83451}$	$\frac{0,25195}{0,30581}$	$\frac{0,60626}{0,65577}$	$\frac{0,54631}{0,45868}$	$\frac{0,73932}{0,73921}$	$\frac{0,41821}{0,40659}$
	$\frac{0,92626}{0,88796}$	$\frac{0,24624}{0,29514}$	$\frac{0,64320}{0,70294}$	$\frac{0,54520}{0,44767}$	$\frac{0,78529}{0,78691}$	$\frac{0,42392}{0,40687}$
2,0	$\frac{0,98768}{0,94710}$	$\frac{0,25112}{0,29173}$	$\frac{0,69160}{0,75875}$	$\frac{0,54570}{0,44016}$	$\frac{0,83883}{0,84203}$	$\frac{0,43064}{0,40967}$
2,5						

Числові результати наведено для таких ортотропних матеріалів: склопластик CF2 ($E_x = 15$; $E_y = 232$; $G_{xy} = 5,02$; $\nu_{xy} = 0,28$; $\nu_{yx} = 0,0181$), вуглепластик Лу-1 ($E_x = 96$; $E_y = 10,8$; $G_{xy} = 2,61$; $\nu_{xy} = 0,21$) та вуглепластик ЕФ ($E_x = 32,8$; $E_y = 21$; $G_{xy} = 5,7$; $\nu_{xy} = 0,21$) [5].

Отримані відносні значення КІН для квазіортотропної площини близькі до відповідних для ортотропного тіла за однакового відношення модулів пружності матеріалів. Раніше [21], порівнюючи показники особливостей напружень у вершинах ортотропного та квазіортотропного клинів, вже зробили висновок про те, що відношення модулів пружності є основним механічним параметром в ортотропному матеріалі. Це обґрунтовує прийнятий нами термін “квазіортотропний матеріал”.

Обчислені відносні КІН F_I і F_{II} для довільно орієнтованої параболічної тріщини у квазіортотропній площині за одновісного розтягу на нескінченності ($q=0$) для різних значень параметра ортотропії γ (рис. 2). Штрихова лінія описує КІН для ізотропного матеріалу ($\gamma = 1$).

У квазіортотропному тілі КІН у вершині довільно орієнтованої прямолінійної тріщини за самозрівноваженого навантаження на її берегах такі самі, як і в ізотропному, хоча напруження на продовженні тріщини різняться.

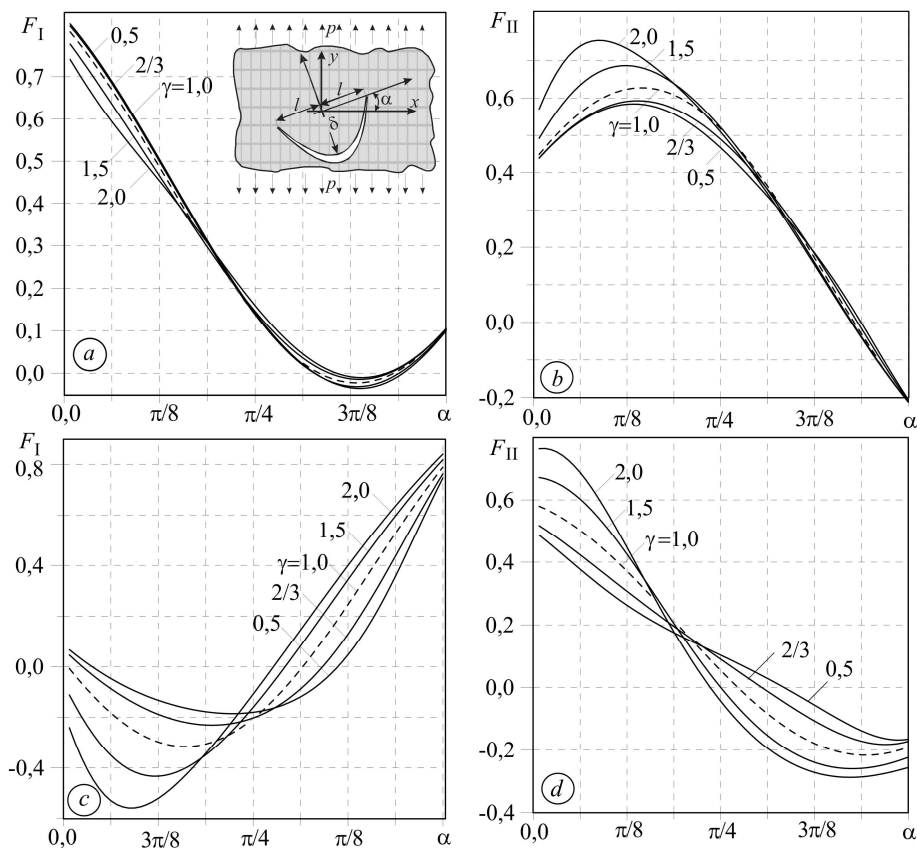


Рис. 2. Залежність відносних КІН F_I (a, c) і F_{II} (b, d) для параболічної тріщини з відносним прогином $\varepsilon = 0,25$ (a, b) і $2,0$ (c, d) від кута α для різних значень параметра ортотропії γ .
 Fig. 2. Dependence of SIF F_I (a, c) and F_{II} (b, d) for parabolic the crack with relative deflection $\varepsilon = 0.25$ (a, b) and 2.0 (c, d) on the angle α for different values of the orthotropy parameter γ .

ВИСНОВКИ

Записано основні співвідношення плоскої задачі теорії пружності для квазіортотропного тіла. Першу основну задачу для площини з тріщинами зведено до сингулярних інтегральних рівнянь. Наведено асимптотичний розподіл напружень біля вершини тріщини. Знайдено аналітичні вирази для КІН у вершині довільно орієнтованої прямолінійної тріщини у квазіортотропному тілі. Обчислено КІН для криволінійної тріщини вздовж параболи для різних значень параметра ортотропії та порівняно з їх відповідними результатами для ортотропного тіла за однакового відношення модулів пружності. Отримані результати мало відрізняються між собою, що свідчить про те, що відношення модулів пружності в ортотропному матеріалі є основним механічним параметром. У квазіортотропній площині КІН у вершині довільно орієнтованої прямолінійної тріщини такі самі, як і в ізотропній. У вершині криволінійної тріщини значення КІН залежать від параметра ортотропії, причому ця залежність посилюється з ростом відхилення контуру тріщини від прямолінійного.

РЕЗЮМЕ. Записаны основные соотношения плоской задачи теории упругости для квазиортотропного тела. Построены интегральные представления комплексных потенциалов напряжений для квазиортотропной плоскости через скачки перемещений на криволинейных разомкнутых контурах. Первая основная задача для плоскости с трещинами сведена к сингулярным интегральным уравнениям. Приведено асимптотическое распределение напряжений около вершины трещины. Найдено аналитическое решение задачи для произвольно ориентированной прямолинейной трещины. Проведены численные расчеты коэффициентов интенсивности напряжений для параболической трещины и исследовано влияние на их поведение отношения основных модулей упругости материала.

SUMMARY. The main relations of the plane problem of elasticity for a quasi-orthotropic body are written. Integral representation of the complex elastic potentials for a quasi-orthotropic plane in terms of displacement discontinuity on curvilinear open contours are constructed. The first basic problem for the plane with cracks is reduced to singular integral equations. Asymptotic stress distribution at the crack tip is presented. Analytical solution of the problem for an arbitrarily oriented rectilinear crack is obtained. Numerical calculations of the stress intensity factor for a parabolic crack are performed and influence of the ratio of elastic modules of the material on there behavior is investigated.

Робота виконана за проектом № 2011/03/B/ST8/06456, що фінансується Національним центром науки (Польща).

1. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 5. – С. 91–97.
2. *Ioakimidis N. I. and Theocaris P. S.* The problem of the simple smooth crack in an infinite anisotropic elastic medium // Int. J. Solids Struct. – 1977. – **13**, № 4. – P. 269–278.
3. *Бардзокас Д. Я., Партон В. З., Теокарис П. С.* Плоская задача теории упругости для ортотропной области с дефектами // Докл. АН СССР. – 1989. – **309**, № 5. – С. 1072–1077.
4. *Максименко В. Н.* Применение метода функций влияния в задачах теории трещин для анизотропных пластин // Прикл. механика и техн. физика. – 1993. – № 3. – С. 128–137.
5. *Божидарнік В. В., Максимович О. В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: Луцьк. держ. техн. ун-т, 2003. – 226 с.
6. *Божидарнік В. В., Андрейків О. Є., Сулим Г. Т.* Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів: у 2-х т. – Луцьк: Настир'я, 2007. – Т. **2**. – 424 с.
7. *Саврук М. П., Казберук А.* Криволинійні тріщини в анізотропній площині та граничний перехід до виродженого матеріалу // Фіз.-хім. механіка матеріалів – 2014. – № 2. – С. 32–40.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Curvilinear cracks in the anisotropic plane and the limit transition to the degenerate material // Materials Science. – 2014. – **50**, № 2. – P. 189–200.)
8. *Hasebe N. and Sato M.* Stress analysis of quasi-orthotropic elastic plane // Int. J. Solids Struct. – 2013. – **50**. – P. 235–248.
9. *Саврук М. П., Чорненький А. Б.* Напружено-деформований стан квазіортотропної площини з криволинійними тріщинами // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАНУ, 2014. – С. 409–414.
10. *Саврук М. П., Чорненький А. Б.* Періодична система криволинійних тріщин в квазіортотропній площині // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Піжстригача НАНУ, 2014. – С. 32–39.
11. *Orthotropy rescaling and implications for fracture in composites / Z. Suo, G. Bao, B. Fan, and T. C. Wang* // Int. J. Solids Struct. – 1991. – **28**, № 2. – P. 235–248.
12. *Cho S. B., Lee K. R., and Choy Y. S.* A further study of two-dimensional boundary element crack analysis in anisotropic or orthotropic materials // Eng. Fract. Mech. – 1992. – **43**, № 4. – P. 589–601.
13. *Erdogan F. E., Ratwani M., and Yuceogly U.* On the effect of orthotropy in a cracked cylindrical shell // Int. J. Fract. – 1974. – **10**, № 3. – P. 369–374.
14. *Krenk S.* Influence of transverse shear on an axials in a cylindrical shell // Ibid. – 1978. – **14**, № 2. – P. 123–145.
15. *Костенко И. С.* Упругое равновесие замкнутой ортотропной цилиндрической оболочки с продольными разрезами // Физ.-хим. механика материалов. – 1980. – № 5. – С. 67–70.
(*Kostenko I. S.* Elastic equilibrium of a closed orthotropic cylindrical shell with longitudinal notches // Materials Science. – 1980. – **16**, № 5. – P. 447–450.)
16. *Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Цванг В. А.* Ортотропные оболочки с трещинами (разрезами) // Концентрация напряжений (Механика композитов) в 12-ти т. – К.: А.С.К, 1998. – Т. **7**. – С. 212–249.
17. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
18. *Прусов И. А., Лунская Л. И.* Упругое состояние кусочно-однородной ортотропной плоскости с разрезами // Прикл. механика. – 1969. – № 5. – С. 77–83.
19. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
20. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
21. *Саврук М. П., Казберук А.* Плоскі задачі теорії пружності на власні значення для ортотропного та квазіортотропного клинів // Фіз.-хім. механіка матеріалів – 2014. – № 6. – С. 7–14.

Одержано 17.12.2014