

УДК 621.3.011

ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ИМПУЛЬСНОГО ТОКА, ПРОТЕКАЮЩЕГО ВБЛИЗИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО ТЕЛА

Ю.М. Васецкий, докт.техн.наук, И.Л. Мазуренко, канд.техн.наук, К.К. Дзюба
 Институт электродинамики НАН Украины,
 пр. Победы, 56, Киев-57, 03680, Украина, e-mail: yuriy.vasetsky@gmail.com

Проведен анализ погрешностей метода асимптотического разложения для трехмерного электромагнитного поля импульсного тока произвольного контура, расположенного вблизи электропроводного тела. Получены граничные значения промежутков времени, которыми ограничены отдельные члены ряда. Сравнение с точными значениями показало возможность значительно упростить расчет на начальном этапе импульсного процесса. Библ. 3, рис. 3.

Ключевые слова: импульсное электромагнитное поле, вихревой ток, контур с током, асимптотический метод.

Задача расчета трехмерного импульсного электромагнитного поля с учетом индуцированных токов во внешних электропроводных телах возникает при разработке многих технических объектов. Зачастую первичным источником импульсного поля являются токи, протекающие по контурам в общем случае пространственной конфигурации [1]. Сложность расчета с использованием численных методов обусловлена геометрическими особенностями системы и разным характером изменения поля в пространстве – быстрым вблизи от токоведущих элементов и значительно более медленным – вдали от них. Вместе с тем, подобные электромагнитные системы характеризуются рядом малых параметров, что позволяет развить эффективные асимптотические методы расчета электромагнитного поля [2].

Цель работы состоит в том, чтобы для произвольного пространственного контура с импульсным током, протекающим вблизи электропроводного тела с плоской границей (рис. 1), в квазистационарном приближении определить условия, необходимые для применения метода асимптотического разложения.

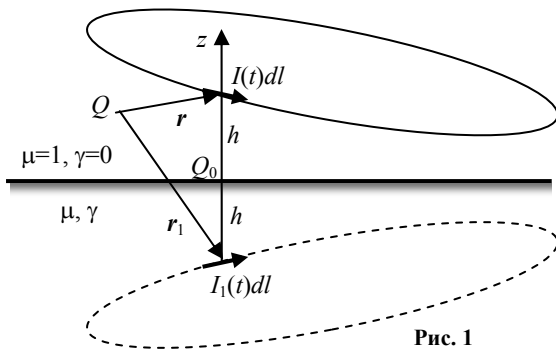


Рис. 1

В [1] было показано, что для поля, гармонически изменяющегося во времени, метод применим при выполнении условия малости параметра $\varepsilon = \mu\delta / \sqrt{2}r_1$, где $\delta = \sqrt{2/\omega\mu_0\mu\gamma}$ – глубина проникновения поля частотой $f = \omega/2\pi$ в среду с удельной электропроводностью γ и относительной магнитной проницаемостью μ . В основу положено точное решение задачи о частотном спектре векторного потенциала \dot{A} при заданном частотном спектре тока $\dot{I}(j\omega)$, протекающего над плоской границей раздела сред [1–3]. Решение в области $z > 0$ определяется интегрированием вдоль контура и может быть представлено в виде трех слагаемых

$$\dot{A} = \dot{A}_0 - \dot{A}_1 - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \dot{I}(j\omega) [\mathbf{t} \times \mathbf{e}_z] \times \text{grad } \dot{G}(j\omega) dl, \quad (1)$$

где $\dot{G} = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-(z+h)\vartheta} J_0(\vartheta\rho)}{\vartheta + \nu\sqrt{\vartheta^2 + j\omega\mu_0\mu\gamma}} d\vartheta$, $J_0(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка; z и ρ – локальные цилиндрические координаты точки Q . Первые два слагаемых дают магнитное поле контура с током и его зеркального отражения от плоской границы раздела сред. Эти слагаемые полностью решают задачу в случае быстротекущих или высокочастотных процессов, когда $\varepsilon = 0$. Если $\varepsilon > 0$, должно быть учтено третье слагаемое в (1), величина которого, в отличие от первых двух, зависит от частоты. Для импульсного тока $I(t)$ отличие зависимости векторного потенциала от времени по сравнению с такой зависимостью исходного тока также определяется третьим слагаемым в (1).

Располагая выражением (1) для частотного спектра, зависимость векторного потенциала от времени можно найти, выполнив обратное преобразование Фурье

$$A(t) = A_0(t) - A_1(t) - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2}{\pi_0} \int_0^\infty \cos(\omega t) \int_l \operatorname{Re} [i(j\omega) [t \times e_z] \times \operatorname{grad} \dot{G}(j\omega)] dl d\omega. \quad (2)$$

Формула (2) представляет собой аналитическое выражение в виде квадратур для расчета электромагнитных полей с учетом вихревых токов в электропроводной среде в достаточно общей постановке – контур произвольной пространственной конфигурации, по которому протекает произвольный импульсный ток. Вместе с тем, решение выражено в виде тройного несобственного интеграла и, кроме того, наличие комплексной амплитуды частотного спектра тока предполагает дополнительную интегральную процедуру прямого преобразования Фурье. Отмеченные обстоятельства указывают на то, что для эффективного использования приведенного аналитического подхода важной задачей является упрощение вычислений.

Применение метода асимптотического разложения в [2] позволило при $\varepsilon < 1$ приближенно представить функцию \dot{G} в виде ряда с ограниченным числом его членов

$$\dot{G} \approx \dot{G}_N = \sum_{n=0}^N \dot{G}_n = g_n / (i\omega)^{(n+1)/2}, \quad (3)$$

при этом упрощение касается двух обстоятельств: во-первых, каждый член ряда является функцией от $1/r_1$, что позволяет по закону Био-Савара использовать интегрирование только вдоль зеркально отраженного контура; во-вторых, простая частотная зависимость каждого члена ряда (3) позволяет вместо частотного спектра для $\dot{V} = \dot{I}\dot{G}$ использовать интеграл Дюамеля и получить следующее выражение для зависимости от времени:

$$v(t) = \sum_{n=0}^N \frac{n+1}{2} \frac{g_n}{\Gamma((n+3)/2)} \int_0^t (t-\tau)^{(n-1)/2} I(\tau) d\tau, \quad \text{где } \Gamma(\cdot) - \text{гамма-функция.} \quad (4)$$

В данной работе основная задача заключается в том, чтобы для рассматриваемой упрощенной математической модели проанализировать условия, при которых ошибка вычисления не превышает определенного заданного значения, и оценить возникающие ограничения при расчете импульсного электромагнитного поля.

Первое ограничение связано с условием малости параметра $\varepsilon < 1$, которое выполняется для частот, больших определенного нижнего значения $f > f_m = \mu / 2\pi\mu_0\gamma r_1^2 \varepsilon_m^2$, где ε_m – выбранное допустимое значение малого параметра. Наиболее сильное ограничение будет при минимальном расстоянии r_1 , когда точка наблюдения Q_0 (рис. 1) находится на поверхности раздела сред непосредственно под участком контура с током, т.е. при $r_1 = h$.

Другое ограничение связано с тем, что каждый член асимптотического ряда определяется с погрешностью, которая растет с увеличением частоты и номера члена ряда. Нижние граничные частоты f_n для каждого члена асимптотического ряда можно найти на основании оценки погрешности Δ_n определения n -го члена ряда [1]

$$\Delta_n = e^{-1/\varepsilon} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \varepsilon^k} \cdot \left[1 - e^{-1/\varepsilon} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k! \varepsilon^k} \right]^{-1}. \quad (5)$$

Чтобы найти f_n , необходимо для допустимой ошибки Δ_n решить (5) относительно ε , которую обозначим как ε_n . Для импульсного тока, в спектре которого представлены все частоты, ограничение по частоте проявляется в том, что расчет может проводиться не во всем временном диапазоне, а только до определенного момента времени t_{mn} , который будем оценивать как меньшее из $t_m = 1/f_m$, $t_n = 1/f_n$. Малый параметр ε зависит не только от частоты, но и от расстояния r_1 между точкой наблюдения и точкой истока на зеркально отраженном контуре. Это означает, что при заданной погрешности Δ_n и параметра ε_m результаты расчета для разных точек Q будут справедливы в разном временном диапазоне. Указанное обстоятельство иллюстрирует рис. 2, на котором показаны нормированные максимальные значения времени для разных членов ряда при $\Delta_n = 1$ и $\mu = 1, z = 0$. Максимальная ошибка, а значит наибольшее ограничение по времени, будут при минимальном $r_1 = h$ в точке Q_0 . В нормированном значении времени $t^* = t f_b$ за базисную принята частота $f_b = (\pi h^2 \mu_i \mu_0 \gamma)^{-1}$, при которой глубина проникновения поля равна высоте расположения элемента тока $\delta = h$.

В качестве конкретного примера рассмотрим экспоненциально затухающий импульс тока $I(t)$, имеющий частотный спектр $\dot{I}(j\omega)$: $I(t) = \exp(-\alpha t) = \exp(-\alpha^* t^*)$, $\dot{I}(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{f_b} \frac{1}{\alpha^* + j\omega^*}$, где $\alpha^* = \alpha / f_b$. Сравнение проводилось для величины $v(t^*)$ (4), которая рассчитывалась точно и с использованием асимптотического разложения при $\mu = 1$ в точке $z = 0, \rho = 0$ для импульса тока $I(t^*) = \exp(-50t^*)$ (рис. 3). Приближенный расчет дает хорошее совпадение на начальном промежутке времени. Из сравнения представленных зависимостей вид-

но, что вначале более точные значения будут для количества $N = 4$ членов ряда, однако, при этом с ростом t^* погрешность возрастает значительно быстрее, чем для $N = 2$. Видно, что более точные результаты дает использование разложения в ряд выражений для меньшего промежутка времени $(t - \tau)$ в (4). Обоснованность такого подхода связана с тем, что интеграл Дюамеля в (4) является отражением принципа наложения.

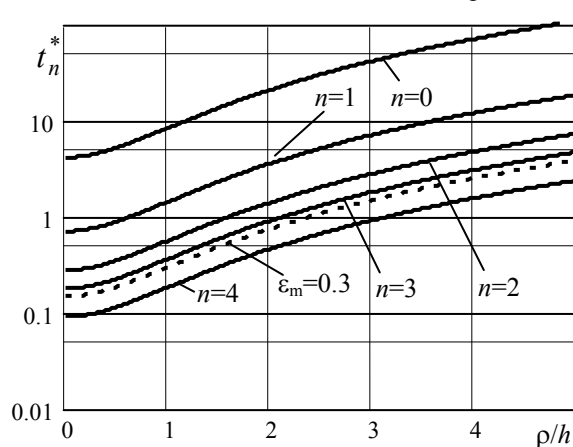


Рис. 2

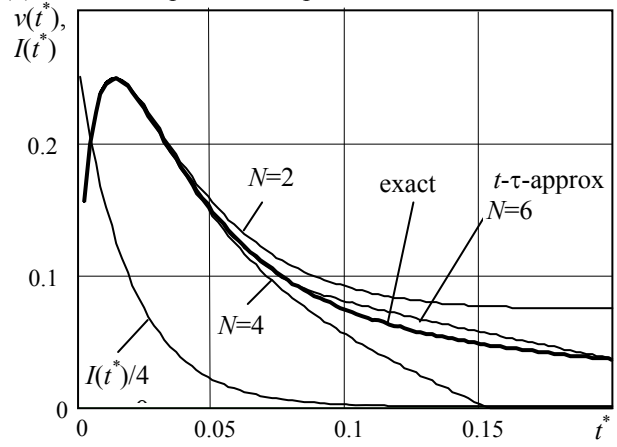


Рис. 3

Выводы. Для каждого члена асимптотического ряда найдены нижние границы частотного спектра и соответствующие максимальные значения промежутка времени от начала действия импульса, что позволяет определить максимальное количество членов ряда, которое определяет точность расчета в заданный момент времени в заданной точке пространства. Проведенное сравнение результатов применения асимптотического разложения с точным расчетом подтвердило теоретический вывод, что наиболее точно может быть рассчитано импульсное поле в начальный (обычно наиболее важный) период действия импульса тока.

1. Гулий Г.А. Научные основы разрядноимпульсных технологий. – Киев: Наукова думка, 1990. – 208 с.
2. Васецкий Ю.М., Городжа Л.В., Мазуренко И.Л. Приближенная модель для расчета переменного магнитного поля произвольного контура с учетом вихревых токов в проводящем полупространстве // Технічна електродинаміка. Тем. вип. "Моделювання електронних, енергетичних та технологічних систем". – 1999. – Ч. 1. – С. 88–93.
3. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. – М.: Энергия, 1975. – 296 с.

УДК 621.3.011

ОСОБЛИВОСТІ МЕТОДУ АСИМПТОТИЧНОГО РОЗКЛАДАННЯ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ ІМПУЛЬСНОГО СТРУМУ, ЩО ТЕЧЕ ПОБЛИЗУ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ТІЛА

Ю.М. Васецкий, докт. техн. наук, І.Л. Мазуренко, канд. техн. наук, К.К. Дзюба

Інститут електродинаміки НАН України, пр. Перемоги, 56, Київ-57, 03680, Україна, e-mail: yuriy.vasetsky@gmail.com.

Проведено аналіз похибок методу асимптотичного розкладання для тривимірної електромагнітної поля імпульсного струму довільного контуру, розташованого поблизу електропровідного тіла. Отримано значення проміжків часу, якими обмежені окремі члени ряду. Порівняння з точними значеннями показало можливість значно спростити розрахунок на початковому етапі імпульсного процесу. Бібл. 3, рис. 3.

Ключові слова: імпульсне електромагнітне поле, вихровий струм, контур зі струмом, асимптотичний метод.

FEATURES OF AN ASYMPTOTIC SERIES EXPANSION METHOD FOR DETERMINE OF ELECTROMAGNETIC FIELD OF PULSE CURRENT FLOWING NEAR CONDUCTIVE BODY

Yu. Vasetsky, I. Mazurenko, K. Dziuba

Institute of Electrodynamics National Academy of Science of Ukraine,

pr. Peremohy, 56, Kyiv-57, 03680, Ukraine. e-mail: yuriy.vasetsky@gmail.com

An analysis of accuracy of asymptotic method for three-dimensional pulse electromagnetic field created by arbitrary current contour, which is located near the flat surface of a conductive body are made. Values of time intervals by which separate terms of series limited are received. Comparison with exact values has shown possibility considerably to simplify calculation at the initial stage of pulse process. References 3, figures 3.

Key words: pulse electromagnetic field, eddy current, arbitrary current contour, asymptotic method.

1. Gulyi G.A. Scientific bases of discharge impulse technologies. – Kyiv: Naukova dumka, 1990. – 208 p. (Rus)
2. Vasetsky Yu., Gorodzha L., Mazurenko I. Approximate model for the calculation of alternative magnetic field of arbitrary contour taking into account eddy currents in conducting half-space // Tekhnichna Elektrodynamika. Tematychnyi vypusk "Modeliuvannia elektronnykh, energetychnykh ta tekhnologichnykh system". – 1999. – No 1. – Pp. 88–93. (Rus)
3. Tozoni O.V. A method of the second sources in the electrical engineering. – Moskva: Energiia, 1975. – 296 p. (Rus)

Надійшла 05.02.2016
Остаточний варіант 01.04.16