

УДК 539.3

## ПРУЖНА ВЗАЄМОДІЯ ОТВОРУ ТА ПОВЕРХНЕВИХ РАДІАЛЬНИХ ТРІЩИН РІЗНОЇ ДОВЖИНИ В ІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНІ

К. М. ДОВБНЯ, Н. А. КРУПКО

Донецький національний університет

Розглянуто взаємовплив чотирьох поверхневих тріщин і кругового отвору в тонкій ізотропній пластині. Для розв'язання задачі використано метод граничних інтегральних рівнянь та модель лінійних пружин. Систему граничних інтегральних рівнянь для цієї задачі розв'язано числово методом механічних квадратур. Встановлено взаємовплив дефектів за їх близького розташування. Обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах тріщин і коефіцієнти концентрації напружень на контурі отвору.

**Ключові слова:** поверхнева тріщина, круговий отвір, ізотропна пластина, модель лінійних пружин.

Визначення надійності тонкостінних конструкцій є важливою задачею механіки деформованого твердого тіла. У зв'язку з цим виникає потреба в методах розрахунку, які дають можливість визначити міцність таких споруд.

Часто у подібних структурах зустрічаються дефекти типу тріщин (наскрізні, поверхневі, внутрішні), отворів і включень. Аналіз напружено-деформованого стану конструкцій в околі дефектів дає можливість оцінити їх запас міцності.

Дослідженню концентрації напружено-деформованого стану в околі наскрізних і ненаскрізних тріщин присвячена велика кількість праць [1–5]. Праці про взаємодії тріщин і отворів зазвичай обмежуються наскрізними тріщинами. Нижче подана методика розрахунку напружено-деформованого стану ізотропної пластини з поверхневими, розташованими хрестоподібно тріщинами різної довжини і круговим отвором у центрі.

**Формулювання задачі.** Розглянемо тонку пружну ізотропну нескінченну пластину сталої товщини  $h$ . Декартову систему координат вибрали так, що осі  $Ox$ ,  $Oy$  орієнтовані вздовж ліній головних кривизн серединної поверхні пластини, а вісь  $Oz$  спрямована по нормалі до неї. Пластина ослаблена чотирма хрестоподібними поверхневими тріщинами різної довжини, орієнтованими вздовж осей  $Ox$ ,  $Oy$ , і круговим отвором радіуса  $R$ , розташованим у центрі системи координат (рис. 1). Пластина знаходиться під всебічним розтягом. Для розв'язання задачі враховуватимемо, що розміри тріщин і отвору більші порівняно з товщиною пластини і відстань між тріщинами

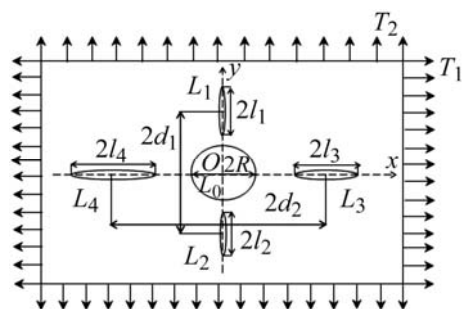


Рис. 1. Пластина з круговим отвором і чотирма поверхневими тріщинами.

Fig. 1. A plate with a circular hole and four surface cracks.

та зовнішнім контуром більша порівняно з їх розмірами.

Нехай відстань між центрами тріщин, розташованих на осі  $Oy - 2d_1$ , а на осі  $Ox - 2d_2$ . Розглянемо тріщини  $L_1-L_4$  напівеліптичної форми в  $z$ -перерізі пластини.

Їх глибину задамо такою формулою:  $L_i(\xi) = l_{0i} \sqrt{1 - (\xi/l_i)^2}$ , де  $l_{0i}$  – найбільша глибина  $i$ -ої тріщини,  $i = \overline{1,4}$ ,  $l_i$  – напівдовжина  $i$ -ої тріщини,  $\xi \in [-l_i, l_i]$ .

Контури  $L_k$ ,  $k = \overline{0,4}$  задаємо параметрично  $x = \alpha_k(t)$ ,  $y = \beta_k(t)$ , де

$$L_0 : \alpha_0(t) = R \cos(t), \beta_0(t) = R \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$L_1 : \alpha_1(t) = 0, \beta_1(t) = l_1 t + d_1; \quad L_2 : \alpha_2(t) = 0, \beta_2(t) = l_2 t - d_1;$$

$$L_3 : \alpha_3(t) = l_3 t + d_2, \beta_3(t) = 0; \quad L_4 : \alpha_4(t) = l_4 t - d_2, \beta_4(t) = 0; \quad t \in [-1, 1].$$

У межах моделі лінійних пружин [1, 3] ненаскрізні (поверхневі) тріщини моделюємо математичними розрізами серединної поверхні пластини, в результаті чого розглянуту задачу зводимо до двовимірної.

**Метод дослідження.** Система граничних інтегральних рівнянь, згідно з розв'язком задачі в праці [6], має вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^2 (K_{ij}(\alpha_0(\tau) - \alpha_0(\theta), \beta_0(\tau) - \beta_0(\theta)) \psi_j) d\theta + \\ & + \int_{-1}^1 \sum_{j=3}^6 K_{ij}(\alpha_0(\tau) - \alpha_{j-2}(s), \beta_0(\tau) - \beta_{j-2}(s)) \psi_j ds + \\ & + \int_{-1}^1 \sum_{j=7}^{10} K_{ij}(\alpha_0(\tau) - \alpha_{j-6}(s), \beta_0(\tau) - \beta_{j-6}(s)) \psi_j ds = F_i(\tau), \quad i = \overline{1,2}, \tau \in [0, 2\pi], \\ & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^2 (K_{ij}(\alpha_{i-2}(t) - \alpha_0(\theta), \beta_{i-2}(t) - \beta_0(\theta)) \psi_j) d\theta + \\ & + \int_{-1}^1 \sum_{j=3}^6 K_{ij}(\alpha_{i-2}(t) - \alpha_{j-2}(s), \beta_{i-2}(t) - \beta_{j-2}(s)) \psi_j ds + \\ & + \int_{-1}^1 \sum_{j=7}^{10} K_{ij}(\alpha_{i-2}(t) - \alpha_{j-6}(s), \beta_{i-2}(t) - \beta_{j-6}(s)) \psi_j ds = F_i(t), \quad i = \overline{3,6}, t \in [-1, 1], \\ & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^2 (K_{ij}(\alpha_{i-6}(t) - \alpha_0(\theta), \beta_{i-6}(t) - \beta_0(\theta)) \psi_j) d\theta + \\ & + \int_{-1}^1 \sum_{j=3}^6 K_{ij}(\alpha_{i-6}(t) - \alpha_{j-2}(s), \beta_{i-6}(t) - \beta_{j-2}(s)) \psi_j ds + \\ & + \int_{-1}^1 \sum_{j=7}^{10} K_{ij}(\alpha_{i-6}(t) - \alpha_{j-6}(s), \beta_{i-6}(t) - \beta_{j-6}(s)) \psi_j ds = F_i(t), \quad i = \overline{7,10}, t \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (1)$$

Наведемо ядра цієї системи, що належать отвору:

$$K_{11}(\alpha_0, \beta_0) = n_1(\theta) \frac{\sin \varphi (1 + 2 \cos^2 \varphi)}{4\pi r} - n_2(\theta) \frac{\cos \varphi \cos 2\varphi}{4\pi r};$$

$$K_{12}(\alpha_0, \beta_0) = K_{21}(\alpha_0, \beta_0) = -n_1(\theta) \frac{\cos \varphi \cos 2\varphi}{4\pi r} - n_2(\theta) \frac{\sin \varphi \cos 2\varphi}{4\pi r};$$

$$K_{22}(\alpha_0, \beta_0) = -n_1(\theta) \frac{\sin \varphi \cos 2\varphi}{4\pi r} - n_2(\theta) \frac{\cos \varphi (1 + 2 \sin^2 \varphi)}{4\pi r};$$

де  $\sin \varphi = \frac{\beta_0}{r}$ ,  $\cos \varphi = \frac{\alpha_0}{r}$ ,  $r = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}$ . Напрявні косинуси мають такий вигляд:

$$n_1(\theta) = \frac{d\beta_0(\theta)}{d\theta}; \quad n_2(\theta) = -\frac{d\alpha_0(\theta)}{d\theta}.$$

У ядрах, які належать поперечним тріщинам,  $n_1(\theta) = 0$ ,  $n_2(\theta) = 1$ ; повздовжнім –  $n_1(\theta) = 1$ ,  $n_2(\theta) = 0$ . Тоді

$$K_{13}(\alpha_1, \beta_1) = K_{14}(\alpha_2, \beta_2) = \frac{\sin \varphi (1 + 2 \cos^2 \varphi)}{4\pi r};$$

$$K_{15}(\alpha_3, \beta_3) = K_{16}(\alpha_4, \beta_4) = -\frac{\sin \varphi \cos 2\varphi}{4\pi r};$$

$$K_{23}(\alpha_1, \beta_1) = K_{24}(\alpha_2, \beta_2) = -\frac{\cos \varphi \cos 2\varphi}{4\pi r};$$

$$K_{25}(\alpha_3, \beta_3) = K_{26}(\alpha_4, \beta_4) = -\frac{\cos \varphi (1 + 2 \sin^2 \varphi)}{4\pi r};$$

$$K_{1j}(\alpha_{j-6}, \beta_{j-6}) = K_{2j}(\alpha_{j-6}, \beta_{j-6}) = 0, \quad j = \overline{7, 10}.$$

Інші ядра знаходимо аналогічно. Оскільки тріщини ненаскрізні, то в ядрах з'являться додаткові доданки.

Невідомі функції мають такий вигляд:

$$\psi_i = Eh \frac{d[f_i]_{L_0}}{d\theta}; \quad \psi_{i+2} = \frac{Eh}{4} \frac{d[f_1]_{L_i}}{ds}; \quad \psi_{i+4} = \frac{Eh}{4} \frac{d[f_2]_{L_i}}{ds}, \quad i = \overline{1, 2};$$

$$\psi_i = \frac{Eh}{4} \frac{\sqrt{3}(1-\nu)(3+\nu)}{\sqrt{1+\nu}} \left( \frac{h}{6} \frac{d[f_{i-4}]_{L_{i-6}}}{ds} \right), \quad i = \overline{7, 10},$$

де  $[f]_L = f^+ - f^-$  – стрибок функції  $f$  під час переходу через контур зі сторони зовнішньої нормалі;  $f_1 = u$ ;  $f_2 = v$ ;  $f_3 = f_4 = \theta_1$ ;  $f_5 = f_6 = \theta_2$ ;  $u$ ,  $v$  – компоненти вектора переміщень;  $\theta_1, \theta_2$  – кути повороту. Праві частини системи рівнянь (1)  $F_1(\tau)$ ,  $F_2(\tau)$  набудуть такого вигляду:

$$F_1(\tau) = T_1 \cos \varphi, \quad F_2(\tau) = T_2 \sin \varphi,$$

де  $T_1, T_2$  – мембранні зусилля на контурі отвору.

Деформацію в дотичному напрямку, яка характеризує концентрацію напружень на контурі отвору, визначаємо через невідомі функції за формулою:

$$\varepsilon_\tau = \frac{1}{Eh} (n_2 \psi_1 - n_1 \psi_2),$$

де  $E$  – модуль Юнга.

Праві частини системи рівнянь (1)  $F_i(t)$ ,  $i = \overline{3, 10}$  набудуть такого вигляду:

$$F_i(t) = G_i^*(t) + G_i(t); \quad i = \overline{3, 10}.$$

Мембранні зусилля і згинальні моменти на лінії тріщини в пластині, викликані зовнішніми навантаженнями, мають такий вигляд:

$$G_{i+2}^*(t) = T_1^*; G_{i+4}^*(t) = T_2^*; i = \overline{1,2}; G_i^*(t) = 0; i = \overline{7,10}.$$

$G_i(t)$ ,  $i = \overline{3,10}$ , відповідно до моделі лінійних пружин набувають такого вигляду:

$$G_i(t) = -T(t); i = \overline{3,6}; G_i(t) = -M(t); i = \overline{7,10},$$

де  $T(t)$ ,  $M(t)$  спрямовані на змикання тріщин.

Вигляд та отримання величин  $T(t)$ ,  $M(t)$  розглянули раніше [3, 4, 7].

Систему (1) розв'язуємо методом механічних квадратур.

Інші ядра в отриманій матриці для тріщин  $K_{ij}$ ,  $i, j = \overline{7,10}$  заповнюємо аналогічно, з урахуванням того, що права частина дорівнюватиме 0.

**Результати та їх обговорення.** У наведених результатах коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ . Деформація в дотичному напрямку, отримана за збільшення відстані між дефектами, коли розглядаються тільки поперечні тріщини за рівномірного розтягу вздовж осі  $Oy$ , збігається з деформацією для ізотропної пластини з круговим отвором [8]. Коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для ізотропної пластини з чотирма поверхневими тріщинами збігаються з результатами праці [4].

Нормований КІН, відповідно до моделі лінійних пружин, набуває виду

$$\frac{K_I}{K_\infty} = \frac{Tg_i(s_i) + \frac{6M}{h}g_b(s_i)}{T_n^*g_i\left(\frac{l_0}{h}\right)}, \quad (2)$$

де невідомі функції  $g_i(s_i)$ ,  $g_b(s_i)$ ,  $s_i = \frac{L_i(x)}{h}$ ,  $i = \overline{1,4}$  наведені в праці [1].

Криві 1–5 на рис. 2 відповідають відстані між дефектами  $\rho = 1/\gamma = l/d$  для рівних за довжиною тріщин  $l_i = l = R$ ,  $i = \overline{1,4}$ . Відносна глибина поверхневої тріщини  $l_0/h = 0,1$ . Не важко помітити, що за розташування дефектів не надто близько один від одного максимальний нормований КІН  $K_I/K_\infty$  залишається в центральній точці. Але що менша відстань між дефектами ( $l/d \rightarrow 1/2$ ), то більше він зміщується.

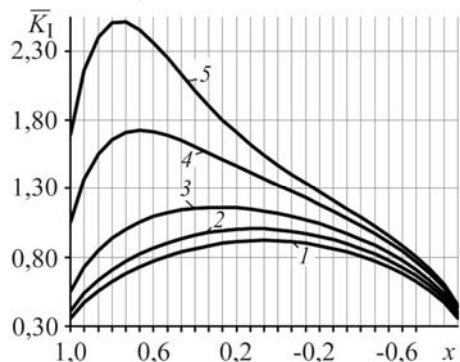


Рис. 2. Зміна нормованих коефіцієнтів інтенсивності напружень  $\overline{K}_I = K_I / K_\infty$  (2) вздовж фронту поверхневої тріщини ( $L_1$ ),  $l_i / R = 1$ ,  $i = \overline{1,4}$ , де відстань між дефектами  $\rho = 0,01$  (1); 0,2 (2); 0,3 (3); 0,4 (4); 0,5 (5).

Fig. 2. Variation of the normalized stress intensity factors  $\overline{K}_I = K_I / K_\infty$  (2) along the surface of the crack front ( $L_1$ ),  $l_i / R = 1$ ,  $i = \overline{1,4}$ , where the distance between defects  $\rho = 0.01$  (1); 0.2 (2); 0.3 (3); 0.4 (4); 0.5 (5).

На рис. 3 криві 1–4 відповідають різним глибинам поверхневих тріщин. Як бачимо, з наближенням дефектів один до одного ( $\rho \rightarrow 0,5$ ) нормовані КІН зростають. Для тріщин меншої довжини ці значення вищі за ближчого розташування до отвору.

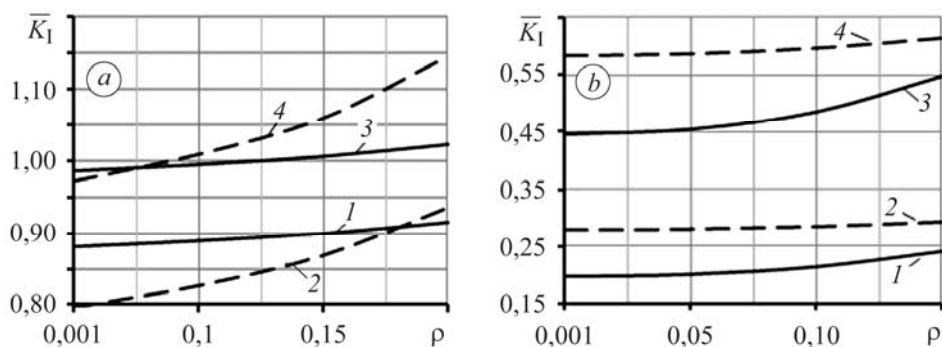


Рис. 3. Залежність нормованих КІН  $\overline{K}_I = K_I / K_\infty$  від параметра  $\rho = l/d$  в центральній точці поверхневої тріщини; контури  $L_3, L_4$ :  $l_1 = l_2 = 1, l_3 = 2l_4 = 1,5R$  (a); контури  $L_1, L_2$ :  $l_3 = l_4 = 1, 2l_1 = l_2 = R$  (b). Відносна глибина поверхневої тріщини: 1, 2 –  $l_0/h = 0,3$ ; 3, 4 –  $0,1$  (a); 1, 2 –  $0,7$ ; 3, 4 –  $0,5$  (b). Суцільні лінії – контури  $L_3$  (a),  $L_1$  (b), пунктирні –  $L_4$  (a),  $L_2$  (b).

Fig. 3. Dependence of the normalized SIF  $\overline{K}_I = K_I / K_\infty$  on the ratio  $\rho = l/d$  at the central point of surface crack, contours  $L_3, L_4$ :  $l_1 = l_2 = 1, l_3 = 2l_4 = 1.5R$  (a); contours  $L_1, L_2$ :  $l_3 = l_4 = 1, 2l_1 = l_2 = R$  (b). The values of the relative surface crack depth are: 1, 2 –  $l_0/h = 0.3$ ; 3, 4 –  $0.1$  (a); 1, 2 –  $0.7$ ; 3, 4 –  $0.5$  (b). Solid lines are contours  $L_3$  (a),  $L_1$  (b), dashed ones are  $L_4$  (a),  $L_2$  (b).

Розглянуто також випадок (рис. 4), коли всі поверхневі тріщини мають однакову довжину  $l_i = l = R, i = \overline{1,4}$ , і пластина знаходиться під дією симетричного зовнішнього навантаження – рівномірний розтяг уздовж осі  $Oy$ .

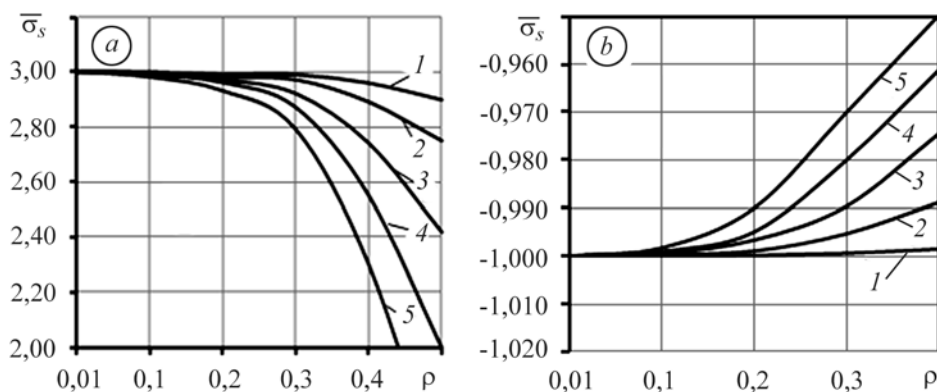


Рис. 4. Залежність відносної напруги  $\overline{\sigma}_s = E h \epsilon_\tau$  від відстані між дефектами для точок контуру  $\tau = 0$  (a),  $\tau = \pi/2$  (b) при  $R/l_i = 1, i = \overline{1,4}$ . Відносна глибина поверхневої тріщини  $l_0/h = 0,1$  (1);  $0,3$  (2);  $0,5$  (3);  $0,7$  (4);  $0,9$  (5).

Fig. 4. Dependence of the relative stress  $\overline{\sigma}_s = E h \epsilon_\tau$  on the distance between defects for contour points  $\tau = 0$  (a),  $\tau = \pi/2$  (b) at  $R/l_i = 1, i = \overline{1,4}$ . Relative surface crack depth  $l_0/h = 0.1$  (1);  $0.3$  (2);  $0.5$  (3);  $0.7$  (4);  $0.9$  (5).

## ВИСНОВКИ

Вперше розв'язано задачу про взаємовплив поверхневих тріщин і кругового отвору в нескінченній тонкій пластині методом граничних інтегральних рівнянь. Обчислено КІН вздовж фронтів поверхневих тріщин і коефіцієнти концентрації напружень на контурі кругового отвору. Збільшення глибини поверхневих тріщин істотно позначається на коефіцієнтах концентрації напружень у нескінченній тонкій ізотропній пластині: зі збільшенням  $\rho$  коефіцієнти зменшуються в точці  $\tau = 0$ , а в точці  $\tau = \pi/2$  – зростають. Що більша глибина поверхневої тріщини, то сильніший ефект. З наближенням дефектів один до одного (ненаскрізнних тріщин до отвору) нормовані КІН зростають, але зі збільшенням відносної глибини поверхневих тріщин вони зменшуються.

*РЕЗЮМЕ.* Рассмотрено взаимодействие четырех поверхностных трещин и кругового отверстия в тонкой изотропной пластине. Для решения задачи использованы метод граничных интегральных уравнений и модель линейных пружин. Система граничных интегральных уравнений для этой задачи решена численно методом механических квадратур. Установлено взаимодействие дефектов при их близком расположении. Вычислены коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещин и коэффициенты концентрации напряжений на контуре отверстия.

*SUMMARY.* The case of interaction of four surface cracks and a circular hole in a thin isotropic plate was considered. To solve this problem, the method of the boundary integral equations and the line-spring model were applied. The system of the boundary integral equations for this problem was solved numerically by the method of mechanical quadratures. The influence of defects on each other are demonstrated when they are close together. The stress intensity factors at the crack tip and the stress concentration factors at the hole contour are calculated.

1. Joseph P. F. and Erdogan F. Surface crack problems in plates // Int. J. of Fract. Mech. – 1989. – **41**. – P. 105–131.
2. Rainah I. and Cartmell M. P. An analysis of the effects of the orientation angle of a surface crack on the vibration of an isotropic plate // J. of Physics: Conference Series. – 2012. – **382**, № 1. – P. 012007.
3. Rice J. R. and Levy N. The part-Through Surface Crack in an Elastic Plate // ASME J. of Applied Mechanics. – 1972. – **39**. – P. 185–194.
4. Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Яртемик В. В. Оболочка произвольной кривизны с системой трещин различного типа и геометрии // Прикладная механика. – 2011. – **47**, № 4. – С. 89–98.
5. Божидарник В. В., Максимович О. В. Визначення напруженого стану біля крайових тріщин у пластині з отвором складної форми // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 19–26.  
(Bozhydarnik V. V. and Maksymovych O. V. Determination of the stressed state near edge cracks in a plate containing a hole of complex shape // Materials Science. – 2010. – **46**, № 1. – P. 16–26.)
6. Довбня Е. Н. Система граничных интегральных уравнений для ортотропных оболочек нулевой и отрицательной кривизны, ослабленных разрезами и отверстиями // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: природничі науки. – 1998. – Вип. 2. – С. 45–52.
7. Довбня Е. Н., Крупко Н. А. Математическая модель изотропной пластины с круговым отверстием и несквозными трещинами // Вестник ХНТУ. – 2012. – № 2 (45). – С. 130–134.
8. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.

Одержано 12.02.2013