

УДК 539.3

ТИСК З ТЕРТЯМ АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОГО ШТАМПА НА ПРУЖНИЙ ПІВПРОСТІР З ТРІЩИНАМИ

М. П. САВРУК¹, А. ТОМЧИК²

¹ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

² Білостоцька політехніка, Польща

Розглянуто взаємодію жорсткого штампа з основою довільної форми з поверхнею пружного півпростору, що містить тріщини, за наявності тертя в зоні контакту. Розв'язок плоскої контактної задачі теорії пружності отримано методом сингулярних інтегральних рівнянь. Детально проаналізовано задачу для параболічної основи штампа і прямолінійної тріщини, що виходить на поверхню півпростору. Досліджено вплив коефіцієнта тертя, довжини тріщини, її орієнтації і місця знаходження на коефіцієнти інтенсивності напружень K_I і K_{II} у вершині тріщини та розподіл контактних напружень під штампом.

Ключові слова: контактна задача, коефіцієнт інтенсивності напружень, пружний півпростір, тріщина, тертя.

У розрахунках на міцність та довговічність контактних пар з позицій механіки руйнування вважають, що в одному чи в обох елементах пари є дефекти типу тріщин. Це призводить до перерозподілу напружень в околі дефектів, що може спричинити пошкодження поверхні контакту чи руйнування таких елементів. Тому такі дослідження завжди актуальні.

Часто в математичному моделюванні контактної взаємодії двох тіл вважають, що одне з них є пружна півплощина, послаблена тріщинами, а друге – жорсткий штамп. У більшості досліджень дію штампа замінюють відповідним розподілом контактного тиску. Такі підходи знаходимо в дослідженнях Хасебе і співавторів [1–7], де до розв'язування задачі використано метод конформних відображень [8]. Розглянуто тут, наприклад, ситуацію, коли на межі півплощини з крайовою тріщиною діє штамп, один із країв якого закруглений, а другий гострий [6]. Вивчено вплив віддаленості тріщини від штампа на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН). Метод сингулярних інтегральних рівнянь використано у працях В. В. Панасюка, О. П. Дацишин і Г. П. Марченка [9, 10] для розв'язування двовимірної задачі про взаємодію жорсткого штампа з довільною випуклою основою з півпростором, послабленим тріщинами, береги яких можуть контактувати. Задачу зведено до сингулярних інтегральних рівнянь, записаних в операторній формі. Числові результати отримано для плоского штампа, що втискується у півплощину без тертя. У працях О. П. Дацишин та співавторів [11–19] метод сингулярних інтегральних рівнянь застосовано також для розв'язування контактних задач такого типу, де основну увагу звернено на побудову траєкторій поширення втомних тріщин за дії модельних контактних навантажень на краю півпростору (півплощини). У працях Гошіми та співавторів [19–24] розглянуто задачу кочення (також з проковзуванням) жорсткого циліндра по поверхні пошкодженого пів-

простору. Враховано як ефекти, пов'язані з втомою матеріалу, так і вплив температури. Проаналізовано пошкоди у вигляді однієї крайової тріщини [19], системи двох тріщин з різними кутами нахилу [20] та періодичної системи крайових тріщин [21, 22]. Пошкоди у вигляді підповерхневої тріщини досліджено як у двовимірному [23], так і в тривимірному [22, 24] формулюваннях.

Нижче до розв'язування контактної задачі з урахуванням тертя про дію жорсткого штампа на пружний півпростір, послаблений тріщинами, використано метод сингулярних інтегральних рівнянь [25]. Визначено КІН у вершинах тріщин та розподіл контактних напружень під штампом. Числові результати отримано для штампа з параболічною основою, що діє на поверхні півплощини з довільно орієнтованою крайовою тріщиною.

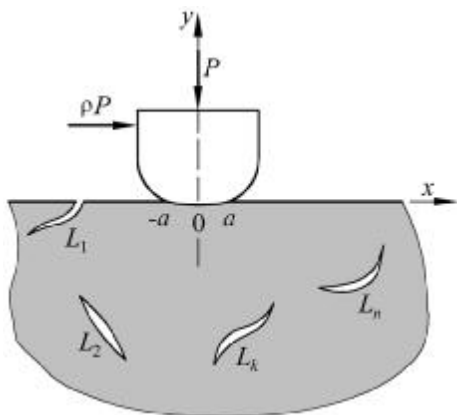


Рис. 1. Схема задачі.

Fig. 1. A scheme of the problem.

Крайові умови на поверхні півпростору $y = 0$ запишемо у вигляді

$$\sigma_{xy} + \rho\sigma_y = 0, \quad v = f(x) + C, \quad x \in L_0 = \{x: -a < x < a\}; \quad (1)$$

$$\sigma_y - i\sigma_{xy} = p_0(x) = 0, \quad x \notin L_0, \quad (2)$$

де σ_y , σ_{xy} – компоненти тензора напруження; v – компонента вектора переміщення в напрямку осі y ; $f(x)$ – функція, що описує форму основи штампа; C – довільна стала.

До берегів тріщин прикладено самозрівноважене навантаження

$$N^\pm(t) + iT^\pm(t) = p(t), \quad t \in L = \bigcup_{k=1}^n L_k, \quad (3)$$

де N і T – нормальне і дотичне напруження, що діють на берегах тріщин; L_k ($k = \overline{1, n}$) – контур k -ої тріщини. Індекси “+” і “-” вказують на граничне значення функції за підходу до контуру L відповідно зліва і справа щодо вибраного додатного напрямку його обходу.

Інтегральні рівняння задачі. Комплексні потенціали напружень [8] для поставленої задачі шукатимемо у вигляді

$$\Phi_1(z) = \Phi_0(z) + \Phi(z), \quad \Psi_1(z) = \Psi_0(z) + \Psi(z), \quad (4)$$

де потенціали $\Phi_0(z)$ і $\Psi_0(z)$ визначають напружений стан півплощини, край якої завантажений зовнішнім зусиллям $p_0(x) = -\sigma(x)(1 + i\rho)$, $x \in L_0$ [8],

$$\Phi_0(z) = \frac{1 + i\rho}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\sigma(t)dt}{t - z}, \quad \Psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \left[\frac{1 - i\rho}{t - z} - \frac{t(1 + i\rho)}{(t - z)^2} \right] \sigma(t)dt, \quad (5)$$

а функції $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ дають інтегральне зображення загального розв'язку задачі для півплощини з криволінійними тріщинами, на берегах яких діє самозрівноважене навантаження [25]

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{\bar{t}-z} \right) g'(t) dt + \frac{t-\bar{t}}{(\bar{t}-z)^2} \overline{g'(t)} dt \right], \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{\bar{t}-z} - \frac{(t-\bar{t})(\bar{t}+z)}{(\bar{t}-z)^3} \right) \overline{g'(t)} dt - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\bar{t}}{(t-z)^2} - \frac{\bar{t}}{(\bar{t}-z)^2} \right) g'(t) dt \right].\end{aligned}\quad (6)$$

Тут $\sigma(t)$ – контактний тиск під штампом, а $g'(t)$ – похідна вектора стрибка переміщень на контурах тріщин.

Запишемо комплексні потенціали (5) і (6) в дещо іншому вигляді:

$$\begin{aligned}\Phi_0(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{L_0} f_{11}(t, z) \sigma(t) dt, \quad \Psi_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_{L_0} h_{11}(t, z) \sigma(t) dt; \\ \Phi(z) &= \frac{1}{\pi} \int_L [f_{21}(t, z) g'(t) dt + f_{22}(t, z) \overline{g'(t)} dt], \\ \Psi(z) &= \frac{1}{\pi} \int_L [h_{21}(t, z) g'(t) dt + h_{22}(t, z) \overline{g'(t)} dt], \\ \Phi_0'(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{L_0} g_{11}(t, z) \sigma(t) dt, \quad \Phi'(z) = \frac{1}{\pi} \int_L [g_{21}(t, z) g'(t) dt + g_{22}(t, z) \overline{g'(t)} dt],\end{aligned}\quad (7)$$

де

$$\begin{aligned}f_{11}(t, z) &= \frac{1+i\rho}{2i} \frac{1}{t-z}; \quad f_{21}(t, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{\bar{t}-z} \right); \quad f_{22}(t, z) = \frac{t-\bar{t}}{2(\bar{t}-z)^2}; \\ h_{11}(t, z) &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1-i\rho}{t-z} - \frac{t(1+i\rho)}{(t-z)^2} \right]; \quad h_{21}(t, z) = -\frac{\bar{t}}{2} \left(\frac{1}{(t-z)^2} - \frac{1}{(\bar{t}-z)^2} \right); \\ h_{22}(t, z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{\bar{t}-z} - \frac{(t-\bar{t})(\bar{t}+z)}{(\bar{t}-z)^3} \right); \quad g_{11}(t, z) = \frac{1+i\rho}{2i} \frac{1}{(t-z)^2}; \\ g_{21}(t, z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(t-z)^2} - \frac{1}{(\bar{t}-z)^2} \right); \quad g_{22}(t, z) = \frac{t-\bar{t}}{(\bar{t}-z)^3}.\end{aligned}\quad (8)$$

Скориставшись співвідношенням між похідною вектора переміщень і комплексними потенціалами напружень (4) та формулами Сохоцького–Племеля для граничних значень інтеграла Коші [8, 26], знайдемо на краю півплощини:

$$\begin{aligned}2G \frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} &= -\frac{\kappa-1}{2} \rho \sigma(x) - \frac{\kappa+1}{2\pi} \int_{L_0} \frac{\sigma(t)}{t-x} dt + \\ &+ \text{Im}[\kappa \Phi(x) - \overline{\Phi(x)} - x \overline{\Phi'(x)} - \overline{\Psi(x)}], \quad x \in L_0.\end{aligned}\quad (9)$$

Тут G – модуль зсуву; $\kappa = 3-4\nu$ – для плоскої деформації, $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ – для плоского напруженого стану, ν – коефіцієнт Пуассона.

Тепер з крайових умов (1), (2) запишемо інтегральне рівняння для визначення контактних напружень під штампом:

$$\begin{aligned} \varepsilon\rho\sigma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{L_0} \frac{\sigma(t)dt}{t-x} - \frac{2}{\kappa+1} \operatorname{Im}[\kappa\Phi(x) - \overline{\Phi(x)} - x\overline{\Phi'(x)} - \overline{\Psi(x)}] = \\ = -\frac{4G}{\kappa+1} f'(x), \quad x \in L_0, \quad \varepsilon = (\kappa-1)/(\kappa+1). \end{aligned} \quad (10)$$

До цього рівняння треба додати ще умову рівноваги штампа

$$\int_{L_0} \sigma(t)dt = P, \quad (11)$$

яка забезпечує однозначність його розв'язку. За відсутності тріщин ($\Phi(x) = \Psi(x) = 0$) рівняння (10) і (11) збігаються з відомими [26].

З крайової умови на берегах тріщин (3) прийдемо до інтегрального рівняння на контурі L , яке запишемо в компактній формі [25]:

$$\Phi_1(t') + \overline{\Phi_1(t')} + \frac{dt'}{dt} [t' \overline{\Phi_1'(t')} + \overline{\Psi_1(t')}] = p(t'), \quad t' \in L, \quad (12)$$

де $\Phi_1(t')$ і $\Psi_1(t')$ – прямі значення комплексних потенціалів (5), тобто отриманих безпосередньою заміною $z = t'$ у виразах $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$ (5).

До рівнянь (12) необхідно додати ще додаткові умови

$$\int_{L_k} g'(t)dt = 0, \quad k = \overline{2, n}, \quad (13)$$

які забезпечують однозначність переміщень за обходу кожної внутрішньої тріщини (тріщину L_1 вважаємо крайовою (рис. 1)).

Рівняння (10) і (12) становлять систему сингулярних інтегральних рівнянь другого і першого родів для визначення контактних напружень $\sigma(x)$ і похідної від вектора стрибків переміщень на контурах тріщин $g'(t)$. За умов (11) і (13) ця система має єдиний розв'язок для довільної правої частини в класі функцій, що мають інтегровну особливість на кінцях інтервалів інтегрування [3].

Зауважимо, що тут прийнято крайову умову (3) на берегах тріщин, тобто береги тріщин вільні від навантаження або на них діють певні зусилля. Такі крайові умови реалізуються тоді, коли тріщини знаходяться в полі розтягальних напружень. За дії штампа на край півплощини тріщини можуть попадати частково чи повністю в зону стискальних напружень, тобто їх береги контактуватимуть. Якщо контакт реалізується по всій довжині тріщини, то рівняння (10)–(13) можна легко змодифікувати, враховуючи неперервність нормальних переміщень на контурах тріщин та тертя (за законом Кулона–Амонтона) в зоні контакту. В загальному випадку приходимо до мішаної задачі на контурах тріщин, що значно ускладнює її розв'язування. Здебільшого розглядають подібні задачі без урахування контакту берегів тріщин, тобто в наведеному вище формулюванні.

Скориставшись зображенням потенціалів напружень у вигляді (7), від рівнянь у компактній формі (10) і (12) прийдемо до системи сингулярних інтегральних рівнянь у звичайному вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon\rho\sigma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{L_0} \frac{\sigma(t)dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_L [K_1(t, x)g'(t)dt + L_1(t, x)\overline{g'(t)dt}] = \\ = \frac{4G}{\kappa+1} f'(x), \quad x \in L_0, \end{aligned}$$

$$\int_L [K_2(t, t')g'(t)dt + L_2(t, t')\overline{g'(t)}] + \int_{L_0} M(t, t')\sigma(t)dt = \pi p(t'), \quad t' \in L, \quad (14)$$

ядра якої виражають формули

$$\begin{aligned} K_1(t, x) &= \frac{2}{\kappa+1} [\kappa f_{21}(t, x) - \overline{f_{22}(t, x)} - x \overline{g_{22}(t, x)} - \overline{h_{22}(t, x)}], \\ L_1(t, x) &= \frac{2}{\kappa+1} [\kappa f_{22}(t, x) - \overline{f_{21}(t, x)} - x \overline{g_{21}(t, x)} - \overline{h_{21}(t, x)}], \\ K_2(t, t') &= f_{21}(t, t') + \overline{f_{22}(t, t')} + \frac{dt'}{dt} [t' \overline{g_{22}(t, t')} + \overline{h_{22}(t, t')}], \\ L_2(t, t') &= f_{22}(t, t') + \overline{f_{21}(t, t')} + \frac{dt'}{dt} [t' \overline{g_{21}(t, t')} + \overline{h_{21}(t, t')}], \\ M(t, t') &= f_{11}(t, t') + \overline{f_{11}(t, t')} + \frac{dt'}{dt} [t' \overline{g_{11}(t, t')} + \overline{h_{11}(t, t')}]. \end{aligned} \quad (15)$$

Зауважимо, що інтегральні рівняння (14) наведено раніше [27], однак функції (8), через які виражено ядра інтегральних рівнянь (15), подано з описками.

Півпростір з крайовою похилою тріщиною. Нехай єдиним пошкодженням поверхні буде прямолінійна тріщина, що виходить на поверхню півпростору (рис. 2). Введемо параметричний опис контуру тріщини L і ділянки контакту між штампом і півпростором L_0 :

$$\begin{aligned} t &= a\xi, \quad x = a\eta, \quad (t, x \in L_0); \quad t = a\omega(\xi), \\ t' &= a\omega(\eta) \quad (t, t' \in L), \quad -1 < \xi, \eta < 1, \\ \omega(\xi) &= -b^* - (l^*/2)(\xi + 1)e^{i\varphi}, \\ b^* &= b/a, \quad l^* = l/a. \end{aligned}$$

Зведемо систему інтегральних рівнянь (14) і додаткову умову (11) до канонічної форми:

$$\varepsilon p \sigma(\eta) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\xi) d\xi}{\xi - \eta} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-1}^1 [K_1(\xi, \eta) g'(\xi) + L_1(\xi, \eta) \overline{g'(\xi)}] d\xi = F(\eta), \quad |\eta| < 1, \quad (16)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 [K_2(\xi, \eta) g'(\xi) + L_2(\xi, \eta) \overline{g'(\xi)}] d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M(\xi, \eta) \sigma(\xi) d\xi = p(\eta), \quad |\eta| < 1,$$

$$\int_{-1}^1 \sigma(\xi) d\xi = A = -\frac{P}{a}, \quad (17)$$

де $\sigma(a\eta) = \sigma(\eta)$; $g'(a\omega(\xi))\omega'(\xi) = g'(\xi)$; $p(a\omega(\xi)) = p(\eta)$;

$$4G(\kappa+1)^{-1} f'(a\eta) = F(\eta); \quad aK_1(a\omega(\xi), a\eta) = K_1(\xi, \eta); \quad aL_1(a\omega(\xi), a\eta) = L_1(\xi, \eta);$$

$$aK_2(a\omega(\xi), a\omega(\eta)) = K_2(\xi, \eta); \quad aL_2(a\omega(\xi), a\omega(\eta)) = L_2(\xi, \eta); \quad aM(a\xi, a\omega(\eta)) = M(\xi, \eta).$$

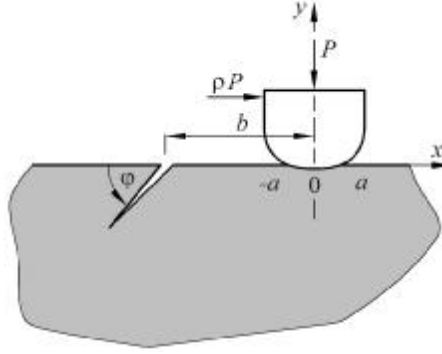


Рис. 2. Схема контактної взаємодії штампа і півпростору з крайовою тріщиною.

Fig. 2. A scheme of contact interaction of a punch and a half-space with an edge crack.

Розв'язок системи інтегральних рівнянь (16), що задовольняє умову (17), шукаємо в класі функцій, що містять інтегровні особливості:

$$\sigma(\xi) = w(\xi)q(\xi), \quad w(\xi) = (1-\xi)^\alpha (1+\xi)^\beta, \quad -1 < \alpha, \beta < 0; \quad g'(\xi) = u(\xi)/\sqrt{1-\xi^2},$$

де $q(\xi)$ і $u(\xi)$ – неперервні функції на проміжку $[-1, 1]$, а параметри α і β ($\alpha = -0,5 + \mu$ і $\beta = -0,5 - \mu$, $\mu = \text{arctg}(\varepsilon\rho)$) – корені характеристичних рівнянь $\text{ctg } \pi\alpha = -\varepsilon\rho$ і $\text{ctg } \pi\beta = \varepsilon\rho$.

Зауважимо, що тільки у вершині крайової тріщини ($\xi = +1$) функція $g'(\xi)$ має кореневу особливість, а в точці її виходу на поверхню півпростору ($\xi = -1$) особливість відсутня. Шукаючи функцію $g'(\xi)$ для крайової тріщини такого ж класу, як і для внутрішньої, потрібно накласти додаткову умову [25]

$$u(-1) = 0,$$

яка знімає особливість функції $g'(\xi)$ у точці $\xi = -1$.

Числове розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь.

Для наближеного розв'язування системи рівнянь (13)–(15) застосуємо метод [25, 29], що ґрунтується на використанні квадратурних формул Гаусса–Чебишова. У результаті отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{mk} q(\xi_k) + \text{Im} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left[b_{1mk} u\left(\frac{\eta_k}{\xi_k}\right) + c_{1mk} \overline{u\left(\frac{\eta_k}{\xi_k}\right)} \right] &= F(\eta_m), \quad m = 1, \dots, n-1, \\ \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left[b_{2mk} u(\xi_k) + c_{2mk} \overline{u(\xi_k)} \right] + \sum_{k=1}^n d_{mk} q(\xi_k) &= p(\eta_m), \quad m = 1, \dots, \frac{n}{2}-1, \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} q(\xi_k) = A, \quad \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (-1)^k \sqrt{\frac{1-\xi_k}{1+\xi_k}} u\left(\frac{\eta_k}{\xi_k}\right) &= 0; \\ \xi_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad \eta_m = \cos \frac{\pi m}{n}; \quad \xi_k = \cos \frac{2k-1}{2\frac{n}{2}} \pi, \quad \eta_m = \cos \frac{\pi m}{\frac{n}{2}}, \end{aligned} \quad (18)$$

з якої обчислимо значення функцій $q(\xi)$ і $u(\xi)$ у вузлах ξ_k і $\frac{\eta_k}{\xi_k}$ ($k = 1, \dots, n$) відповідно.

Коефіцієнти системи рівнянь (18) мають вигляд:

$$\begin{aligned} a_{mk} &= -\frac{1}{n} (-1)^k \sqrt{1-\xi_k^2} \left\{ \frac{X_0}{1-\eta_m} \left[\frac{1}{1-\xi_k} - \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right] + \frac{R_0}{1+\eta_m} \left[\frac{(-1)^n}{1+\xi_k} + \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right] + \right. \\ &+ X_3(\eta_m) + X_4(\eta_m) \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \left. \right\}, \quad a_{nk} = \frac{\pi}{n} \sqrt{1-\xi_k^2} \left[w(\xi_k) - (-1)^k \frac{X_0}{1-\xi_k} + (-1)^{k+n} \frac{R_0}{1+\xi_k} \right]; \\ b_{1mk} &= \frac{1}{n} K_1(\xi_k, \eta_m), \quad b_{2mk} = \frac{1}{n} K_2(\xi_k, \eta_m), \quad c_{1mk} = \frac{1}{n} L_1(\xi_k, \eta_m), \quad c_{2mk} = \frac{1}{n} L_2(\xi_k, \eta_m); \\ d_{mk} &= \frac{1}{n} \sqrt{1-\xi_k^2} \left[M(\xi_k, \eta_m) w(\xi_k) - (-1)^k \frac{X_0 M(1, \eta_m)}{1-\xi_k} + (-1)^{n+k} \frac{R_0 M(-1, \eta_m)}{1+\xi_k} \right]; \\ X_0 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2\alpha}{\sin \pi\alpha} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \right], \quad R_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{2\beta}{\sin \pi\beta} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \right]; \\ X_1(x) &= (1/2) \left[X(x) \cot \pi\alpha - 1/\sin \pi\alpha - R(x) \cot \pi\beta + 1/\sin \pi\beta \right]; \end{aligned}$$

$$X_3(x) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n w(\xi_r) \sqrt{1-\xi_r^2} F(x, \xi_r, \xi_k); \quad X_4(x) = \varepsilon \rho w(x) + X_1(x);$$

$$X(x) = [(1-x)/(1+x)]^\alpha, \quad R(x) = [(1+x)/(1-x)]^\beta;$$

$$F(x, \xi_r, \xi_k) = \begin{cases} \frac{T_n(x)}{(x-\xi_k)(x-\xi_r)}, & x \neq \xi_k, x \neq \xi_r, \xi_k \neq \xi_r, \\ -\frac{n(-1)^r}{\sqrt{1-\xi_r^2}(\xi_r-x)} + \frac{T_n(x)}{(\xi_r-x)^2}, & x \neq \xi_k = \xi_r, \end{cases}$$

де $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ – поліном Чебишова першого роду степеня n .

Використовуючи інтерполяційний поліном Лагранжа з чебишовськими вузлами ξ_k , знайдемо значення функції $q(\xi)$ в довільній точці:

$$q(\xi) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k q(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \frac{T_n(x)}{\xi-\xi_k}.$$

Звідси отримаємо її значення на кінцях проміжку $[-1, 1]$:

$$q(\pm 1) = \mathbf{m} \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{\frac{1 \pm \xi_k}{1 \mp \xi_k}} q(\xi_k).$$

Подібно шукаємо значення функції $u(\xi)$ у вузлах ξ_k . КІН у вершинах тріщини K_I і K_{II} визначимо за формулою [18]

$$K_I - iK_{II} = -\sqrt{\pi a} \left| \omega'(1) \right| \frac{u(1)}{\omega'(1)}.$$

Слід зауважити, що для штампа з плоскою основою розмір ділянки контакту L_0 відомий. Якщо ж основа штампа закруглена біля одного чи обох країв, ці розміри невідомі. Тоді напруження $\sigma(x)$ є обмежене на всьому інтервалі і для визначення однозв'язної ділянки контакту отримуємо одну або дві додаткові умови. Зокрема, якщо основа штампа є закруглена на обох кінцях, маємо додаткові умови

$$q(-1) = q(1) = 0,$$

з яких знаходимо ширину зони контакту $2a$ і відстань від одного з її кінців до тріщини.

Числові результати. На основі описаного підходу виконано числові розрахунки контактного напруження і КІН у вершині тріщини, вільної від навантаження ($p(t) = 0$), для параболічної форми основи штампа ($f(x) = x^2/(2R)$, R – параметр параболи). Досліджено вплив вхідних безрозмірних параметрів l^* , b^* , кута нахилу тріщини φ , коефіцієнта тертя ρ на розподіл безрозмірних контактних напружень $\sigma^* = \sigma a/P$ (рис. 3) та значення безрозмірних КІН $F_I = K_I \sqrt{a}/P$ і $F_{II} = K_{II} \sqrt{a}/P$ (рис. 4–6). Вплив коефіцієнта Пуассона ν на ці величини виявився незначним, тому результати розрахунків наведено для $\nu = 0,3$ (плоска деформація).

Коли кут φ менший за 90 градусів, то тріщина мало впливає на розподіл контактних напружень під штампом. Такий вплив відчутніший, коли $\varphi > 90^\circ$. Однак тоді за малих коефіцієнтів тертя можливий контакт берегів тріщини. На рис. 3а наведено дані для $\rho = 0,75$, коли вершина тріщини перебуває у полі розтягальних напружень. Звідси напрашується висновок про можливість

заміни дії жорсткого параболічного штампа на пружну півплощину з тріщинами відповідним модельним контактним навантаженням, яке отримують з розв'язку задачі для суцільної півплощини без тріщин. На це вказує також те, що наведені залежності КІН від геометричних параметрів задачі мало відрізняються від відповідних, отриманих з використанням герцівських контактних зусиль з дотичним складником [13, 18].

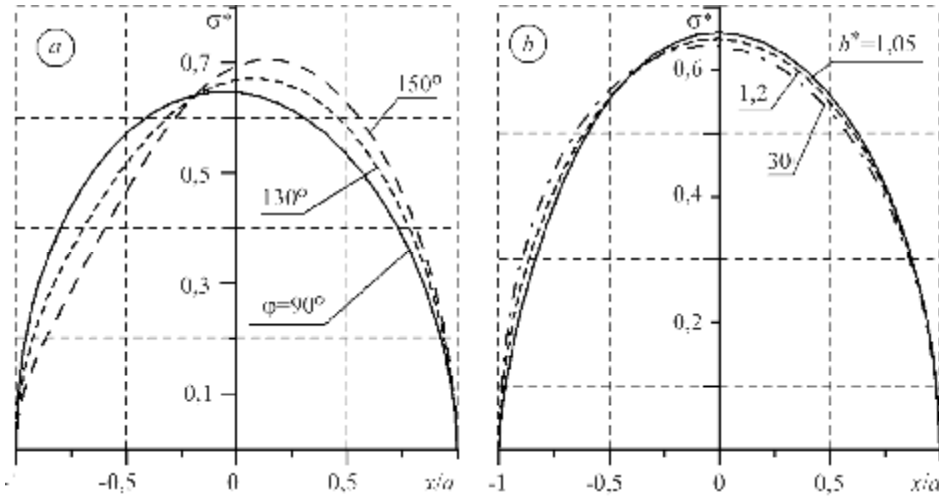


Рис. 3. Розподіл контактної тиску під штампом для різних орієнтацій тріщини (а: $b^* = 1,5$; $l^* = 1$; $\rho = 0,75$) та різних її віддалей від штампа (б: $l^* = 5$; $\varphi = 90^\circ$; $\rho = 0,3$).

Fig. 3. Contact stress distribution for different crack orientation (a: $b^* = 1.5$; $l^* = 1$; $\rho = 0.75$) and different values of the distance between the crack and the punch (b: $l^* = 5$; $\varphi = 90^\circ$; $\rho = 0.3$).

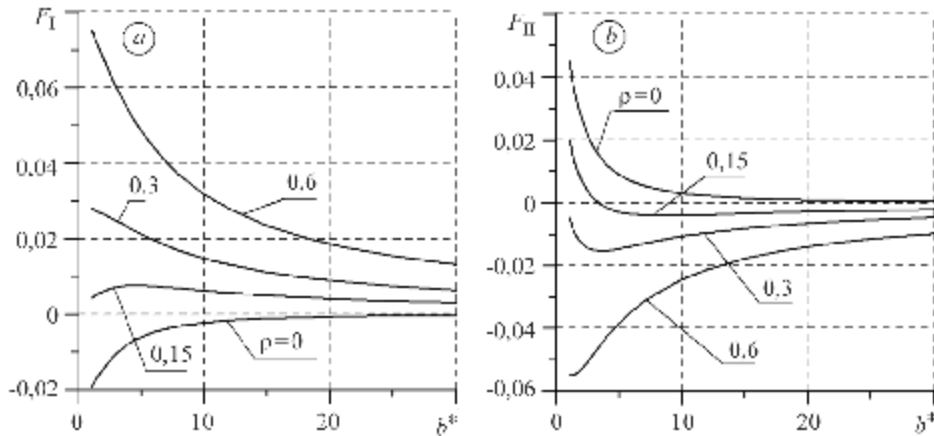


Рис. 4. Залежності безрозмірних КІН F_I (а) і F_{II} (б) від відносної віддалі тріщини від штампа b^* для різних значень коефіцієнта тертя ρ ($l^* = 2$; $\varphi = 30^\circ$).

Fig. 4. Dependences of dimensionless stress intensity factors, F_I , (a) and F_{II} , (b) on relative distance between the crack and the punch b^* for different values of friction coefficient, ρ ($l^* = 2$; $\varphi = 30^\circ$).

Треба зазначити, що ширина ділянки контакту $2a$ мало залежить від віддалі між штампом і тріщиною, її кута орієнтації та коефіцієнта тертя. Відхилення безрозмірного параметра a/a_0 ($a_0 = \sqrt{PR(\kappa+1)/(2\pi G)}$ – півширина контактної зони в суцільній півплощині без тріщини ($b \rightarrow \infty$) за дії на її краю

напруження герцівського типу [8]) від одиниці не перевищує 2% для всіх розглянутих значень параметрів задачі.

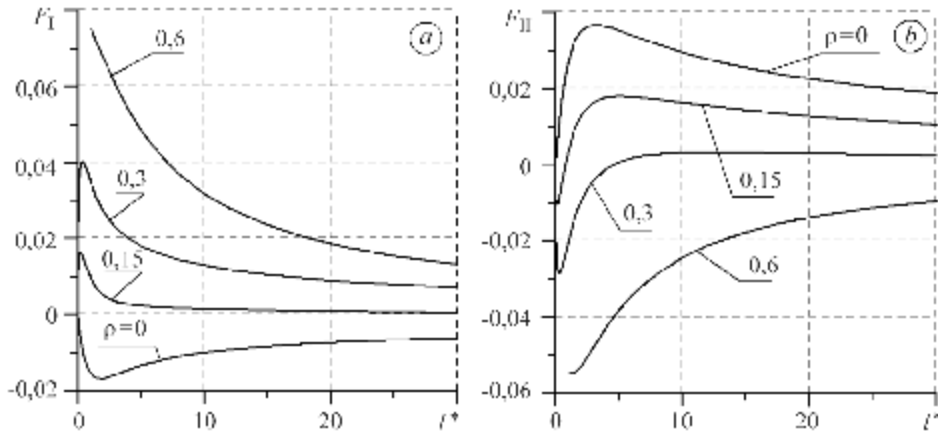


Рис. 5. Залежності безрозмірних КІН F_I (a) і F_{II} (b) від відносної довжини тріщини l^* для різних значень коефіцієнтів тертя ρ ($b^* = 1.5$; $\varphi = 30^\circ$).

Fig. 5. Dependences of dimensionless stress intensity factors, F_I , (a) and, F_{II} , (b) on relative crack length, l^* , for different values of friction coefficient, ρ ($b^* = 1.5$; $\varphi = 30^\circ$).

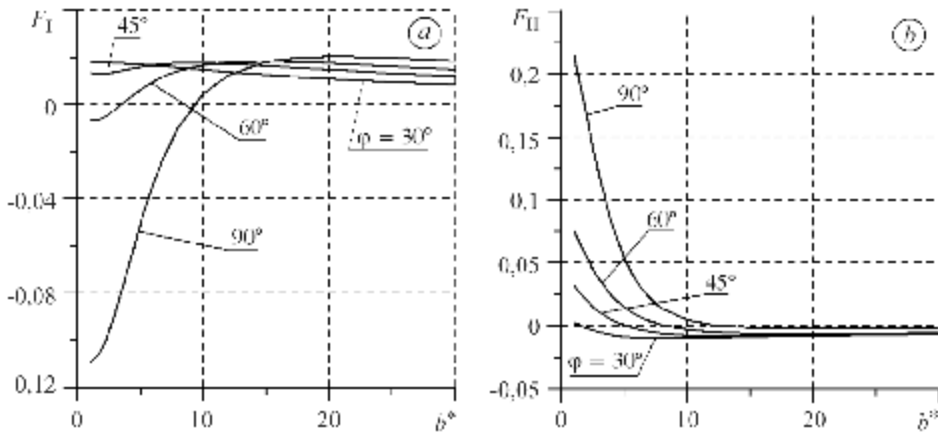


Рис. 6. Залежності безрозмірних КІН F_I (a) і F_{II} (b) від відносної віддалі тріщини від штампа b^* для різних кутів орієнтації тріщини φ ($l^* = 5$; $\rho = 0.3$).

Fig. 6. Dependences of dimensionless stress intensity factors, F_I , (a) and, F_{II} , (b) on relative distance between the crack and the punch b^* for different crack orientation angles, φ ($l^* = 5$; $\rho = 0.3$).

На КІН значно впливає віддаль між тріщиною і штампом. За відсутності тертя навіть тріщини, віддалені від ділянки контакту, можуть перебувати в зоні стискальних напружень ($K_I < 0$). Зі збільшенням коефіцієнта тертя значно зростає значення коефіцієнта інтенсивності K_I (рис. 4a). Треба зауважити, що з посиленням тертя змінюється напрямок поперечного зсуву тріщини (рис. 4b).

Зі збільшенням відносної довжини тріщини l^* зменшуються безрозмірні КІН F_I і F_{II} . Найнебезпечніші короткі тріщини ($l^* < 5$), для яких КІН набувають екстремальних значень (рис. 5). На КІН значно впливає орієнтація тріщини (рис. 6). Коли кут орієнтації φ стає близьким чи більшим за 90° , можливий контакт берегів тріщини, що залежить також від коефіцієнта тертя. Зі зростанням віддалі штампа від тріщини вплив її орієнтації спадає.

ВИСНОВКИ

Методом сингулярних інтегральних рівнянь розглянуто плоску контактну задачу для півплощини зі системою криволінійних тріщин з урахуванням тертя в зоні контакту між жорстким штампом і пружною півплощиною. Числовий розв'язок інтегральних рівнянь отримано методом квадратур. Детально досліджено взаємодію крайової прямолінійної тріщини довільної орієнтації та штампа з параболічною основою. Вивчено вплив коефіцієнта тертя, довжини тріщини та її орієнтації на КІН K_I і K_{II} та розподіл контактної тиску. Виявлено значний вплив коефіцієнта тертя та орієнтації тріщини на КІН для тріщин, близько розташованих від штампа. За тертя значно збільшується діапазон зміни вхідних параметрів задачі, коли тріщина знаходиться в полі розтягальних напружень. Саме для таких значень вказаних параметрів наведено більшість числових результатів, оскільки, формулюючи задачу, вважали, що тріщини не контактують.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрено взаимодействие жесткого штампа с основанием произвольной формы с поверхностью упругого полупространства, содержащего трещины, при наличии трения в зоне контакта. Решение плоской контактной задачи теории упругости получено методом сингулярных интегральных уравнений. Подробно проанализирована задача для параболического основания штампа и прямолинейной трещины, выходящей на поверхность полупространства. Исследовано влияние коэффициента трения, длины трещины, ее ориентации и места расположения на коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} в вершине трещины и распределение контактных напряжений под штампом.

SUMMARY. The interaction of a rigid punch of any shape and a surface of an elastic half-space containing a set of cracks taking into account friction in the contact zone is considered. The solution of a plane contact problem of elasticity was obtained by using singular integral equations method. The case of a half-space weakened by a single edge crack, when the base of the punch is parabolic has been analyzed in detail. The effects of friction, crack length and orientation and also the effect of the distance between the crack and the punch on the stress intensity factors K_I and K_{II} at the crack tip and on the contact pressure distribution have been investigated.

Роботу виконано згідно з планом комплексного наукового проекту S/W/M/2/08 Білостоцької політехніки, Польща.

1. Hasebe N. An edge crack in a semi-infinite plate welded to a rigid stiffener // Proc. Jap. Soc. Civ. Eng. – 1981. – № 314. – P. 149–157.
2. Hasebe N., Okumura M., and Nakamura T. Frictional punch and crack in plane elasticity // ASCE J. Eng. Mech. – 1989. – **115**, № 6. – P. 1137–1149.
3. Okumura M., Hasebe N., and Nakamura T. Crack due to wedge-shaped punch with friction // Ibid. – 1990. – **116**, № 10. – P. 2173–2185.
4. Hasebe N. and Qian J. Circular inclined punch problem with two corners to contact with a half plane with a surface crack // Contact Mechanics II: Computational Techniques: Proc. 2nd Int. Conf. Computational Methods in Contact Mechanics/ Ed. M.H. Aliabadi and C. Alessandri.– Southampton; Boston: Computational Mechanics Publ., 1995. – P. 159–166.
5. Hasebe N. and Qian J. Circular rigid punch with one smooth and another sharp ends on a half-plane with edge crack // J. Appl. Mech. – 1997. – **64**. – P. 73–79.
6. Hasebe N. and Qian J. Edge crack due to circular rigid punch in incomplete contact // Mech. Mater. – 1998. – **28**. – P. 271–279.
7. Qian J. and Hasebe N. Circular rigid punch on a semi-infinite plate with an oblique edge crack subjected to concentrated forces or point dislocations // Proc. Jap. Soc. Civ. Eng. – 1997. – № 570. – P. 149–159.
8. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
9. Панасюк В. В., Даццишин О. П., Марченко Г. П. Контактна задача про дію штампа на границю півплощини, послабленої системою криволінійних тріщин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – **31**, № 6. – С. 7–16.

- (Panasyuk V. V., Datsyshyn O. P., and Marchenko H. P. Contact problem for a half plane with cracks subjected to the action of a rigid punch on its boundary // *Materials Science*. – 1995. – **31**, № 6. – P. 667–678.)
10. Panasyuk V. V., Datsyshyn O. P., and Marchenko H. P. Stress state of a half-plane with cracks under rigid punch action // *Int. J. Fract.* – 2000. – **101**, № 4. – P. 347–363.
 11. Panasyuk V. V., Datsyshyn O. P., and Marchenko H. P. The crack propagation theory under rolling contact // *Eng. Fract. Mech.* – 1995. – **52**, № 1. – P. 179–191.
 12. Панасюк В. В., Дацишин О. П., Марченко Г. П. Про ріст тріщин у тілах кочення за умов сухого тертя та зволоження // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2001. – **37**, № 1. – С. 7–16.
(Panasyuk V. V., Datsyshyn O. P., and Marchenko H. P. Crack growth in rolling bodies under the conditions of dry friction and wetting // *Materials Science*. – 2001. – **37**, № 1. – P. 1–11.)
 13. Вплив форми модельного контактного навантаження на коефіцієнти інтенсивності напружень для крайової тріщини / О. П. Дацишин, Р. Є. Пришляк, С. В. Приходьська та ін. // *Пробл. трибології*. – 1998. – № 3. – С. 3–16.
 14. Траєкторії розвитку крайових тріщин у тілах кочення за умов граничного змащування / О. П. Дацишин, В. В. Панасюк, Р. Є. Пришляк, А. Б. Терлецький // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2001. – **37**, № 3. – С. 5–12.
(Paths of edge cracks in rolling bodies under the conditions of boundary lubrication / O. P. Datsyshyn, V. V. Panasyuk, R. E. Pryshlyak, and A. B. Terlets'kyi // *Materials Science*. – 2001. – **37**, № 3. – P. 363–373.)
 15. Datsyshyn O. P. and Panasyuk V. V. Pitting of the rolling bodies contact surface // *Wear*. – 2001. – **251**, № 1–12. – P. 1347–1355.
 16. Дацишин О. П. Довговічність і руйнування твердих тіл під час їх контактної взаємодії // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2005. – **41**, № 6. – С. 5–25.
(Datsyshyn O. P. Service life and fracture of solid bodies under the conditions of cyclic contact interaction // *Materials Science*. – 2005. – **41**, № 6. – P. 709–733.)
 17. Datsyshyn O. P. and Kadyra V. M. A fracture mechanics approach to prediction of pitting under fretting fatigue conditions // *Int. J. Fat.* – 2006. – **28**, № 4. – P. 375–385.
 18. Дацишин О. П., Марченко Г. П. Напружений стан півплощини з крайовою положою тріщиною під герцівським навантаженням (огляд) // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2008. – **44**, №1. – С. 23–34.
(Datsyshyn O. P. and Marchenko H. P. Stressed state of a half plane with shallow edge crack under hertzian loading (a survey) // *Materials Science*. – 2008. – **44**, № 1. – P. 22–34.)
 19. Goshima T. and Keer L. M. Thermoelastic contact between a rolling rigid indenter and a damaged elastic body // *J. Tribol.* – 1990. – **112**. – P. 382–391.
 20. Goshima T. and Kamishima Y. Mutual interference of two surface cracks in a semi-infinite body due to rolling contact with frictional heating by a rigid roller // *JSME Int. J.* – 1996. – **A39**, № 1. – P. 26–33.
 21. Goshima T. and Kamishima Y. Mutual interference of multiple surface cracks due to rolling-sliding contact with frictional heating // *Ibid.* – 1994. – **A37**, № 3. – P. 216–223.
 22. Goshima T. Thermomechanical effects on crack propagation in rolling contact fatigue failure // *J. Therm. Stres.* – 2003. – **26**, № 6. – P. 615–639.
 23. Goshima T. and Soda T. Stress intensity factors of a subsurface crack in a semi-infinite body due to rolling/sliding contact and heat generation // *JSME Int. J.* – 1997. – **A40**, № 3. – P. 263–270.
 24. Goshima T., Hanson M. T., and Keer L. M. Three-dimensional analysis of thermal effects on surface crack propagation in rolling contact // *J. Therm. Stres.* – 1990. – **13**. – P. 237–261.
 25. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
 26. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
 27. Savruk M., Yevtushenko A. Płaskie zagadnienie kontaktowe dla półprzestrzeni ze szczelinami z uwzględnieniem tarcia w strzefie kontaktu // *III Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji*. – Bałystok: Politechnika Białostocka, 2005. – S. 357–360.
 28. Savruk M., Tomczyk A., Yevtushenko A. Płaskie kontaktowe zagadnienie z uwzględnieniem tarcia dla półprzestrzeni ze szczeliną // *Acta Mech. Autom.* – 2007. – **1**, № 2. – S. 41–44.
 29. Savruk M.P., Madenci E., and Shkarayev S. Singular integral equations of the second kind with generalized Cauchy-type kernels and variable coefficients // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1999. – **45**, № 10. – P. 1457–1470.

Одержано 14.01.2010