

КОЛИВАННЯ ШАРУ КРИСТАЛА КУБІЧНОЇ СИМЕТРІЇ ПІД ДІЄЮ ГАРМОНІЧНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ

О. Р. ГРИЦИНА

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

Лінеаризовані співвідношення локально градієнтної теорії неферомагнетних діелектриків застосовано для вивчення механічних коливань безмежного шару кристала кубічної симетрії, що перебуває під дією змінного в часі електричного поля. Показано, що на відміну від класичної теорії п'єзоелектриків локально градієнтна описує п'єзоелектричний ефект у кристалах з високою симетрією. За врахування локального зміщення маси короткі хвилі є дисперсійні, що теж поза увагою лінійної класичної теорії п'єзоелектриків. Порівняно отримані результати із такими, що ґрунтуються на співвідношеннях градієнтної теорії діелектриків Міндліна. Кількісно оцінено деякі параметри моделі.

Ключові слова: *локально градієнтна теорія діелектриків, локальне зміщення маси, гармонічні коливання, п'єзоелектричний ефект, високочастотна дисперсія.*

Можливість деформування кристалів під дією зовнішнього електричного поля теоретично передбачив Габріель Ліппманн [1]. Це явище, яке отримало назву оберненого п'єзоелектричного ефекту, експериментально підтвердили брати Кюрі [2], які спостерігали вібрування кристалів кварцу, спричинене швидкозмінним електричним полем. Відомо, що прямий та обернений п'єзоелектричний ефекти властиві також кристалам з високою симетрією. Однак класична теорія п'єзоелектриків цього не описує [3, 4]. Таку невідповідність між теорією та експериментом долають нелокальні теорії діелектриків, які будують двояко [3–6]: постулюючи функціональний зв'язок між параметрами стану [7], або вводячи у простір параметрів стану градієнти певних величин (наприклад, вектора поляризації, напруженості електричного поля, тензора деформації) [8–12], чи враховуючи залежність локального стану фізично малого елемента тіла від електричних мультипольних моментів вищих порядків [13].

Інший підхід до побудови нелокальних теорій діелектриків запропоновано у працях [14–16] та узагальнено у монографії [17]. Він ґрунтується на врахуванні у модельному описі локального зміщення маси. Теорії, які беруть до уваги цей процес, отримали назву локально градієнтних [6]. Локально градієнтна теорія діелектриків постулює, що зміщення центра маси фізично малого елемента тіла можуть спричинити переміщення (конвекція) цього елемента та зміна його структури, не пов'язана з дифузійними процесами. Наслідком цього є потік маси \mathbf{J}_{ms} неконвективної та недифузійної природи. Таке масоперенесення виявлено під час формування тонких плівок [18]. Результатом врахування у модельному описі локального зміщення маси є нелокальні рівняння стану, які містять градієнт потенціалу $\mu'_\pi = \mu_\pi - \mu$, де μ_π – міра зміни внутрішньої енергії системи, зумовленої локальним зміщенням маси [17], а μ – хімічний потенціал. Співвідношення локально градієнтної теорії діелектриків описують приповерхневу неоднорідність

розподілу фізико-механічних полів у рівноважному стані [14, 16, 19]; високочастотну дисперсію пружних хвиль [20]; аномальну залежність ємності тонких діелектричних плівок від їх товщини [21] тощо.

Покажемо, що, враховуючи локальне зміщення маси, можна у межах лінійної теорії описати зв'язок механічних та електромагнетних полів у кристалах з високою симетрією, а відтак, обґрунтувати обернений п'єзoeлектричний ефект. З цією метою вивчимо вібрацію кристалічного тіла кубічної симетрії під дією гармонічного електричного поля.

Система рівнянь локально градієнтної теорії діелектриків та формулювання задачі. За ізотермічного наближення повна лінеаризована система співвідношень локально градієнтної теорії анізотропних ідеальних діелектриків охоплює [17] рівняння руху, баланс наведеної маси та рівняння Максвелла

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho_0 \mathbf{F}, \\ \frac{\partial \rho_{m\pi}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{ms} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_{es};$$

матеріальні співвідношення для векторів електромагнетного поля

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}; \quad (2)$$

лінійні рівняння стану

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \hat{\mathbf{c}}^{(4)} : \hat{\mathbf{e}} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}^p \rho_m - \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{f}}^{(3)} - \nabla \mu'_\pi \cdot \hat{\mathbf{g}}^{(3)}, \\ \mu'_\pi &= \mu'_{\pi 0} + d_\rho \rho_m - \boldsymbol{\gamma}^E \cdot \mathbf{E} - \boldsymbol{\gamma}^p \cdot \nabla \mu'_\pi - \rho_0^{-1} \hat{\boldsymbol{\alpha}}^p : \hat{\mathbf{e}}, \\ \mathbf{p} &= \hat{\boldsymbol{\chi}}^E \cdot \mathbf{E} - \hat{\boldsymbol{\chi}}^{Em} \cdot (\nabla \mu'_\pi) + \boldsymbol{\gamma}^E \rho_m - \rho_0^{-1} \hat{\mathbf{f}}^{(3)} : \hat{\mathbf{e}}, \\ \boldsymbol{\pi}_m &= -\hat{\boldsymbol{\chi}}^m \cdot (\nabla \mu'_\pi) + \hat{\boldsymbol{\chi}}^{Em} \cdot \mathbf{E} - \boldsymbol{\gamma}^p \rho_m - \rho_0^{-1} \hat{\mathbf{g}}^{(3)} : \hat{\mathbf{e}}, \end{aligned}$$

а також геометричні співвідношення $\hat{\mathbf{e}} = \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] / 2$, які пов'язують компоненти тензора деформації $\hat{\mathbf{e}}$ та вектора переміщення \mathbf{u} . Тут $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор напружень; \mathbf{F} – вектор масових сил; ρ_0 – густина маси тіла у відліковий момент часу; \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} та \mathbf{B} – вектори напруженості та індукції електричного й магнетного полів; ε_0 та μ_0 – електрична та магнетна сталі; $\mathbf{J}_{es} = \partial \mathbf{P} / \partial t$; $\mathbf{J}_{ms} = \partial \boldsymbol{\Pi}_m / \partial t$; $\boldsymbol{\Pi}_m$ та \mathbf{P} – вектори локального зміщення маси [14] та поляризації; $\boldsymbol{\pi}_m = \boldsymbol{\Pi}_m / \rho_0$; $\mathbf{p} = \mathbf{P} / \rho_0$; $\rho_m = \rho_{m\pi} / \rho_0$; $\rho_{m\pi}$ – густина наведеної маси [15]; $\mu'_{\pi 0}$ – значення потенціалу μ'_π безмежного однорідного середовища у природному стані; $\hat{\mathbf{c}}^{(4)}$ – тензор пружних модулів; $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^p$ – тензор об'ємного розширення від локального зміщення маси; $\hat{\mathbf{f}}^{(3)}$ і $\hat{\mathbf{g}}^{(3)}$ – тензори п'єзoeлектричних і п'єзомасових модулів; d_ρ – ізохоричний коефіцієнт залежності потенціалу μ'_π від питомої густини наведеної маси; $\hat{\boldsymbol{\chi}}^E$ – тензор діелектричної сприйнятливості; $\hat{\boldsymbol{\chi}}^m$ і $\hat{\boldsymbol{\chi}}^{Em}$ – тензори, які характеризують залежність векторів локального зміщення маси та поляризації від градієнта потенціалу μ'_π ; $\boldsymbol{\gamma}^p$ й $\boldsymbol{\gamma}^E$ – векторні величини, які характеризують залежність потенціалу μ'_π від його градієнта та напруженості електричного поля; t – час, а ∇ – оператор Гамільтона.

Розглянемо безмежний пружний кристалічний (кубічної симетрії) шар, який у декартовій системі координат займає область $|x| \leq h$. Поверхні $x = \pm h$ діелектричного тіла вільні від силового навантаження і збігаються з гранями кристалів (100). На цих поверхнях розташовані електродні плівки, до яких прикладено різницю потенціалів, що змінюється за гармонічним законом: $\pm V e^{i\omega t}$. Вважаємо ці плівки тонкими, тому їх масу нехтуватимемо.

Для кубічно-симетричних кристалів

$$\gamma^E = 0, \quad \gamma^p = 0, \quad \hat{\mathbf{f}}^{(3)} = 0, \quad \hat{\mathbf{g}}^{(3)} = 0, \quad \alpha_{ij}^p = \gamma_p \delta_{ij}, \quad \chi_{ij}^E = \chi_E \delta_{ij}, \quad \chi_{ij}^m = \chi_m \delta_{ij}, \quad \chi_{ij}^{Em} = \chi_{Em} \delta_{ij},$$

$$c_{ijkl} = (c_{11} - c_{12} - 2c_{44}) \delta_{ijkl} + c_{12} \delta_{ij} \delta_{kl} + c_{44} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Тут δ_{ij} – символи Кронеккера; δ_{ijkl} дорівнюють одиниці, якщо всі індекси однако-ві, та нулеві – в усіх інших випадках. Відтак, у компонентній формі записані вище рівняння стану набувають вигляду

$$\sigma_{ij} = (c_{11} - c_{12} - 2c_{44}) \delta_{ijkl} e_{lk} + c_{12} \delta_{ij} e_{kk} + 2c_{44} e_{ij} - \gamma_p \rho_m \delta_{ij},$$

$$\mu'_\pi = \mu'_{\pi 0} + d_p \rho_m - \rho_0^{-1} \gamma_p e_{kk}, \quad (3)$$

$$p_i = \chi_E E_i - \chi_{Em} \nabla_i \mu'_\pi, \quad \pi_{mi} = -\chi_m \nabla_i \mu'_\pi + \chi_{Em} E_i.$$

Рівняння (3) є нелокальні і, порівняно зі класичною теорією діелектриків, містять нові характеристики матеріалу: γ_p [Pa]; d_p [J/kg]; χ_m [s²] та χ_{Em} [m²/V].

За ключові функції приймемо вектор переміщення \mathbf{u} , потенціал $\tilde{\mu}'_\pi = \mu'_\pi - \mu'_{\pi 0}$ та електричний потенціал φ_e , який у разі квазістатичного електричного поля пов'язаний із вектором напруженості електричного поля формулою $\mathbf{E} = -\nabla \varphi_e$ [4]. Розв'язувальну систему рівнянь моделі отримаємо, підставивши матеріальні співвідношення для електромагнетного поля (2), рівняння стану (3) та співвідношення Коші у рівняння (1).

Розв'язок задачі та його аналіз. Шукані функції є гармонічні функції часу і залежать лише від просторової координати x . Тому розв'язок $f(x, t) = \{u(x, t), \tilde{\mu}'_\pi(x, t), \varphi_e(x, t)\}$ сформульованої задачі шукаємо у вигляді $f(x, t) = \underline{f}(x) e^{i\omega t}$. Тут u – x -компонента вектора переміщення. Для знаходження функцій $\underline{f}(x) = \{u(x), \tilde{\mu}'_\pi(x), \varphi_e(x)\}$ маємо:

$$\bar{K} \frac{d^2 u}{dx^2} - K \frac{\alpha_p}{d_p} \frac{d \tilde{\mu}'_\pi}{dx} = -\rho_0 \omega^2 u, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \tilde{\mu}'_\pi}{dx^2} - \lambda_\mu^2 \tilde{\mu}'_\pi = K \lambda_\mu^2 \frac{\alpha_p}{\rho_0} \frac{du}{dx} - \frac{\chi_{Em}}{\chi_m} \frac{d^2 \varphi_e}{dx^2}, \quad (5)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (\varphi_e + \kappa_E \tilde{\mu}'_\pi) = 0. \quad (6)$$

Тут $\bar{K} = K + \frac{4}{3} G - \frac{K^2 \alpha_p^2}{\rho_0 d_p}$; $K = \frac{1}{3} (c_{11} + 2c_{12})$; $G = c_{44}$; $\lambda_\mu^2 = \frac{1}{d_p \chi_m}$; $\kappa_E = \frac{\rho_0 \chi_{Em}}{\varepsilon}$;

$$\gamma_p = K \alpha_p; \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \rho_0 \chi_E.$$

Запишемо крайові умови задачі, які відповідають умові відсутності силового навантаження та задання на поверхнях шару різниці потенціалів:

$$\sigma_{x\alpha} \Big|_{x=\pm h} = 0, \quad \alpha = \{x, y, z\}, \quad \varphi_e \Big|_{x=\pm h} = \pm V. \quad (7)$$

Для коректного порівняння розв'язку сформульованої задачі із отриманим за використання градієнтної теорії діелектриків Міндліна [22, 23] за третю крайову виберемо умову задання на поверхнях шару електричної поляризації, пропорційної до її значення, визначеного на основі класичної теорії, тобто

$$p|_{x=\pm h} = -k\chi \frac{V\varepsilon_0}{h\rho_0}, \quad k = \text{const}, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (8)$$

Тут χ – коефіцієнт діелектричної сприйнятливості, а k – коефіцієнт пропорційності, який Міндлін під час кількісного аналізу вважав рівним 0,1 [4, 22]. Значення $k = 1$ відповідає класичній теорії, а $k = 0$ – умові неперервності поляризації на поверхнях $x = \pm h$ шару [4].

Запишемо крайові умови (7), (8) через розв'язувальні функції u , $\tilde{\mu}'_\pi$ та φ_e :

$$\left(\tilde{K} \frac{\partial u}{\partial x} - K \frac{\alpha_p}{d_p} \tilde{\mu}'_\pi \right) \Big|_{x=\pm h} = 0, \quad \varphi_e|_{x=\pm h} = \pm V, \quad \left(\chi_E \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} + \chi_{Em} \frac{\partial \tilde{\mu}'_\pi}{\partial x} \right) \Big|_{x=\pm h} = k\chi \frac{V\varepsilon_0}{h\rho_0}. \quad (9)$$

Використовуючи формулу (6), надамо рівнянню (5) вигляду

$$\frac{d^2 \tilde{\mu}'_\pi}{dx^2} - \lambda_{\mu E}^2 \tilde{\mu}'_\pi = \lambda_{\mu E}^2 \frac{K\alpha_p}{\rho_0} \frac{du}{dx}, \quad (10)$$

де
$$\lambda_{\mu E}^2 = \lambda_\mu^2 \left(1 - \kappa_E \frac{\chi_{Em}}{\chi_m} \right)^{-1}.$$

Систему рівнянь (4), (6), (10) розв'язуватимемо покроково. Насамперед шукаємо переміщення u та потенціал $\tilde{\mu}'_\pi$ як розв'язки зв'язаних рівнянь (4) та (10), а далі знаходимо функцію φ_e із рівняння (6).

Розв'язок системи рівнянь (4), (10) подаємо у вигляді $e^{-i\xi x}$. Для визначення параметра ζ отримаємо бікватратне рівняння

$$\zeta^4 + \left[\lambda_{\mu E}^2 (1 + \mathfrak{M}) - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right] \zeta^2 - \lambda_{\mu E}^2 \frac{\omega^2}{c_1^2} = 0.$$

де $\mathfrak{M} = \frac{K^2 \alpha_p^2}{\tilde{K} \rho_0 d_p}$; $c_1 = \sqrt{\frac{\tilde{K}}{\rho_0}}$, яке має два дійсні, а два уявні корені, тобто $\zeta_1 = \xi_1$;

$\zeta_2 = i\xi_2$; $\zeta_3 = -\xi_1$; $\zeta_4 = -i\xi_2$, де

$$\xi_j = \frac{\lambda_{\mu E}}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(1 + \mathfrak{M} - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2} + (-1)^j (1 + \mathfrak{M} - \Omega^2)}, \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

Тут $\Omega = \omega/(c_1 \lambda_{\mu E})$. Корінь ξ_1 відповідає модифікованій пружній хвилі, яка спричинена гармонічним електричним полем, а корінь ξ_2 зумовлений врахуванням локального зміщення маси. Модифікована пружна хвиля незагасальна, оскільки всі процеси вважаємо оборотними, і дисперсійна. Її фазова швидкість $c_l = \omega/\xi_1$ різна для низьких та високих частот. Зокрема, за умови $\omega \ll c_1 \lambda_{\mu E}$

$$c_l \rightarrow c_1 \sqrt{1 + \mathfrak{M}} = \sqrt{\frac{K + 4/3G}{\rho_0}} \approx c_L.$$

Величина $c_L = \sqrt{\frac{K' + 4/3G'}{\rho_0}}$ у теорії пружності визначає швидкість поширення

поздовжньої хвилі у безмежному середовищі [23] (K' , G' – модулі пружності).

Для частот $\omega \gg c_1 \lambda_{\mu E}$ фазова швидкість $c_l \rightarrow c_1$. Отже, лінійні співвідношення локально градієнтної теорії діелектриків, на відміну від класичної теорії п'єзоелектриків, описують обернений п'єзоелектричний ефект у кристалах з високою симетрією та високочастотну дисперсію пружної хвилі. Зауважимо, що у межах класичної теорії пружна хвиля недисперсійна, її групова $v = d\omega/d\xi_1$ і фазова швидкості однакові [24]. Таким чином, враховуючи локальне зміщення маси, маємо відмінність між груповою та фазовою швидкостями модифікованої по-здовжньої пружної хвилі.

З огляду на симетрію задачі розв'язок системи рівнянь (4), (6), (10) запишемо так:

$$u(x) = \alpha_1 A_1 \cos(\xi_1 x) + \alpha_2 A_2 \operatorname{ch}(\xi_2 x), \quad \tilde{\mu}'_{\pi}(x) = A_1 \sin(\xi_1 x) + A_2 \operatorname{sh}(\xi_2 x),$$

$$\varphi_e(x) = -\kappa_E [A_1 \sin(\xi_1 x) + A_2 \operatorname{sh}(\xi_2 x)] + A_3 x,$$

$$\text{де } \alpha_j = \frac{K\alpha_p}{\widehat{K}d_p} \cdot \frac{\xi_j}{\left[\omega^2/c_1^2 + (-1)^j \xi_j^2\right]}, \quad j=1, 2.$$

Сталі величини A_n ($n = \overline{1, 3}$) визначаємо зі системи рівнянь

$$-\left(\xi_1 \alpha_1 + \frac{K\alpha_p}{\widehat{K}d_p}\right) \sin(\xi_1 h) A_1 + \left(\xi_2 \alpha_2 - \frac{K\alpha_p}{\widehat{K}d_p}\right) \operatorname{sh}(\xi_2 h) A_2 = 0,$$

$$(\kappa_E \chi_E - \chi_{Em}) \xi_1 \cos(\xi_1 h) A_1 + (\kappa_E \chi_E - \chi_{Em}) \xi_2 \operatorname{ch}(\xi_2 h) A_2 - \chi_E A_3 = -k\chi \frac{V\varepsilon_0}{h\rho_0},$$

$$-\kappa_E A_1 \sin(\xi_1 h) - \kappa_E A_2 \operatorname{sh}(\xi_2 h) + A_3 h = V. \quad (12)$$

Резонанс досягається, якщо визначник цієї системи дорівнює нулю, тобто коли частота хвилі, товщина шару та характеристики матеріалу справджують співвідношення

$$\frac{1 - \left(1 - \frac{\chi_{Em}}{\kappa_E \chi_E}\right) \xi_1 h \operatorname{ctg}(\xi_1 h)}{1 - \left(1 - \frac{\chi_{Em}}{\kappa_E \chi_E}\right) \xi_2 h \operatorname{cth}(\xi_2 h)} = \frac{1 + \xi_2^2 c_1^2 / \omega^2}{1 - \xi_1^2 c_1^2 / \omega^2}.$$

Якщо ж він відмінний від нуля, то розв'язки рівнянь (4), (6), (10), що задовольняють крайові умови (9), мають вигляд

$$u(x) = \alpha_1 A \left[\frac{\cos(\xi_1 x)}{\sin(\xi_1 h)} - \frac{\xi_2}{\xi_1} \frac{\operatorname{ch}(\xi_2 x)}{\operatorname{sh}(\xi_2 h)} \right], \quad (13)$$

$$\tilde{\mu}'_{\pi}(x) = A \left[\frac{\sin(\xi_1 x)}{\sin(\xi_1 h)} - \frac{\alpha_1 \xi_2}{\alpha_2 \xi_1} \frac{\operatorname{sh}(\xi_2 x)}{\operatorname{sh}(\xi_2 h)} \right], \quad (14)$$

$$\varphi_e(x) = A\kappa_E \left[\left(1 - \frac{\alpha_1 \xi_2}{\alpha_2 \xi_1}\right) \frac{x}{h} - \frac{\sin(\xi_1 x)}{\sin(\xi_1 h)} + \frac{\alpha_1 \xi_2}{\alpha_2 \xi_1} \frac{\operatorname{sh}(\xi_2 x)}{\operatorname{sh}(\xi_2 h)} \right] + V \frac{x}{h}, \quad (15)$$

де стала величина A залежить від характеристик матеріалу, товщини шару, частоти ω :

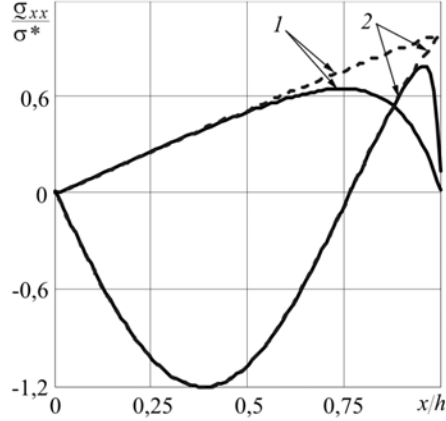
$$A = \frac{V\chi_E(1-k)}{\xi_1 h (\kappa_E \chi_E - \chi_{Em}) \left[\operatorname{ctg}(\xi_1 h) - \frac{\alpha_1 \xi_2^2}{\alpha_2 \xi_1^2} \operatorname{cth}(\xi_2 h) \right] - \kappa_E \chi_E \left(1 - \frac{\alpha_1 \xi_2}{\alpha_2 \xi_1}\right)}.$$

На основі рівнянь стану (3) для ненульової x -компоненти вектора поляризації отримаємо:

$$p(x) = A\xi_1 (\kappa_E \chi_E - \chi_{Em}) \left[\frac{\cos(\xi_1 x)}{\sin(\xi_1 h)} - \frac{\alpha_1 \xi_2^2}{\alpha_2 \xi_1^2} \frac{\text{ch}(\xi_2 x)}{\text{sh}(\xi_2 h)} \right] - \frac{\chi_E}{h} \left[V + A\kappa_E \left(1 - \frac{\alpha_1 \xi_2}{\alpha_2 \xi_1} \right) \right].$$

Отже, наслідком прикладання до поверхонь шару різниці електричного потенціалу $\pm V e^{i\omega t}$ є неоднорідна поляризація тіла та збурення механічних гармонічних коливань $u(x) e^{i\omega t}$, де величина $u(x)$ означена формулою (13).

Криві на рисунку описують розподіл напружень $\underline{\sigma}_{xx} / \sigma^*$, де $\sigma^* = -AK\alpha_\rho d_\rho^{-1} (1 - \xi_1^2 \Omega^{-2} \lambda_{\mu E}^{-2})^{-1}$, у шарах різних товщин. У достатньо товстих тілах (суцільна лінія 2) вплив параметра ξ_2 проявляється лише у вузьких приповерхневих областях тіла (штрихова лінія 2). Із віддаленням від поверхні коливання, пов'язані із параметром ξ_2 , швидко загасають. Однак зі зменшенням товщини тіла (суцільна лінія 1) його вплив стає відчутним практично у всьому перерізі шару (штрихова лінія 1), тобто розв'язок сформульованої задачі враховує масштабний ефект. Отже, уявні хвильові числа $\zeta_2 = i\xi_2$ та $\zeta_4 = -\zeta_2$ пов'язані із приповерхневою неоднорідністю полів.



Розподіл напружень $\underline{\sigma}_{xx} / \sigma^*$ в області $0 \leq x \leq h$, якщо $\Omega = 0,2$, $\mathfrak{M} = 1,91$, $h\lambda_{\mu E} = 5; 35$ (суцільні лінії 1 та 2).

Штрихова лінія відповідає умові $\xi_2 = 0$.

Distribution of stresses $\underline{\sigma}_{xx} / \sigma^*$ in the range $0 \leq x \leq h$ for $\Omega = 0,2$, $\mathfrak{M} = 1,91$, $h\lambda_{\mu E} = 5; 35$ (solid lines 1 and 2).

Dashed line corresponds to $\xi_2 = 0$.

Кількісна оцінка параметрів моделі. Для оцінки коефіцієнтів моделі локально градієнтної електромагнетомеханіки використаємо результати праці [22], де електромеханічне вібрування центрально-симетричного кристалічного шару вивчали на основі співвідношень градієнтної теорії діелектриків Міндліна. Порівняємо рівняння (4)–(6) із розв'язувальною системою рівнянь градієнтної теорії діелектриків, яка для сформульованої задачі має вигляд [22]

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho_0 \omega^2 u + d_{11} \frac{d^2 P}{dx^2} = 0, \quad d_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + b_{11} \frac{d^2 P}{dx^2} - a_{11} P - \frac{d\varphi_e}{dx} = 0, \\ \varepsilon_0 \frac{d^2 \varphi_e}{dx^2} - \frac{dP}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Крайові умови, що відповідають задачі, такі:

$$\left(c_{11} \frac{du}{dx} + d_{11} \frac{dP}{dx} \right) \Big|_{x=\pm h} = 0, \quad \varphi_e \Big|_{x=\pm h} = \pm V, \quad P \Big|_{x=\pm h} = -\frac{kV}{a_{11} h}. \quad (17)$$

Тут c_{11} – модуль пружної жорсткості; $\varepsilon_0 a_{11}$ – обернена діелектрична сприйнятливості; b_{11} і d_{11} – величини, які у розвиненні для густини енергії пов'язані з градієнтом вектора поляризації: b_{11} – коефіцієнт біля квадрата градієнта поляризації, а d_{11} – біля згортки тензора деформації та градієнта вектора поляризації [8].

Для коректності порівняння вилучимо із рівнянь (4)–(6) потенціал $\tilde{\mu}'_\pi$, а з розв'язувальної системи рівнянь (16) – вектор поляризації, прийнявши в обох ви-

падках за ключові функції вектор переміщення та електричний потенціал.

У результаті деяких перетворень систему із трьох рівнянь (16) зведемо до системи двох рівнянь вищих порядків:

$$c_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho_0 \omega^2 u + \varepsilon_0 d_{11} \frac{d^3 \varphi_e}{dx^3} = 0. \quad (18)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{d^2 \varphi_e}{dx^2} - \frac{(1 + \varepsilon_0 a_{11})}{\varepsilon_0 b_{11}} \varphi_e + \frac{d_{11}}{b_{11} \varepsilon_0} \frac{du}{dx} \right] = 0. \quad (19)$$

Крайовим умовами (17) надамо вигляду

$$\left(c_{11} \frac{du}{dx} + \varepsilon_0 d_{11} \frac{d^2 \varphi_e}{dx^2} \right) \Big|_{x=\pm h} = 0, \quad \varphi_e \Big|_{x=\pm h} = \pm V, \quad (20)$$

$$\left(\varepsilon_0 b_{11} \frac{d^3 \varphi_e}{dx^3} - \frac{d\varphi_e}{dx} + d_{11} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \Big|_{x=\pm h} = -k \frac{V}{h}.$$

Аналогічно, забравши із розв'язувальної системи рівнянь (4)–(6) локально градієнтної електромеханіки потенціал $\tilde{\mu}'_{\pi}$, одержимо:

$$\left(K + \frac{4}{3} G \right) \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho_0 \omega^2 u + K \alpha_{\rho} \left(\frac{\chi_m}{\kappa_E} - \chi_{Em} \right) \frac{d^3 \varphi_e}{dx^3} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 \varphi_e}{dx^2} - \lambda_{\mu E}^2 \varphi_e + \kappa_E \lambda_{\mu E}^2 \frac{K \alpha_{\rho}}{\rho_0} \frac{du}{dx} \right) = 0. \quad (22)$$

Тепер крайові умови (9) запишемо так:

$$\left[\left(K + \frac{4}{3} G \right) \frac{du}{dx} + \frac{K \alpha_{\rho}}{\kappa_E d_{\rho} \lambda_{\mu E}^2} \frac{d^2 \varphi_e}{dx^2} \right] \Big|_{x=\pm h} = 0, \quad \varphi_e \Big|_{x=\pm h} = \pm V, \quad (23)$$

$$\left(\frac{\chi_{Em}}{\kappa_E \lambda_{\mu E}^2} \frac{d^3 \varphi_e}{dx^3} - \chi_E \frac{d\varphi_e}{dx} + \chi_{Em} \frac{K \alpha_{\rho}}{\rho_0} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \Big|_{x=\pm h} = -k \chi \frac{V \varepsilon_0}{h \rho_0}.$$

Рівняння (18) та (21) описують поздовжню пружну хвилю, модифіковану електричним полем. Для кристалів кубічної симетрії вони містять похідну третього порядку від електричного потенціалу, що свідчить про зв'язок механічних та електричних полів у межах лінійної теорії.

Таким чином, розв'язування сформульованої задачі на основі співвідношень локально градієнтної та градієнтної теорій діелектриків зведено до знаходження функцій u та φ_e із однотипних рівнянь (18), (19) чи (21), (22). При цьому крайові умови в обох формулюваннях задачі теж однотипні (див. ф-ли (20) та (23)). Зазначимо, що вказані системи рівнянь різняться лише коефіцієнтами, зставляючи які, одержимо:

$$\lambda_{\mu E}^2 = \frac{1 + \varepsilon_0 a_{11}}{\varepsilon_0 b_{11}}, \quad \mathfrak{M} = \frac{d_{11}^2}{b_{11} c_{11} - d_{11}^2}, \quad c_1^2 = \frac{b_{11} c_{11} - d_{11}^2}{\rho_0 b_{11}},$$

$$K \alpha_{\rho} \chi_{Em} = \frac{\varepsilon d_{11}}{1 + \varepsilon_0 a_{11}}, \quad \frac{K^2 \alpha_{\rho}^2}{\rho_0 d_{\rho}} = \frac{d_{11}^2}{b_{11}}, \quad \frac{\chi_m}{\chi_{Em}^2} = \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left[1 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} (1 + \varepsilon_0 a_{11}) \right],$$

$$d_{\rho}\chi_{Em}^2 = \frac{\varepsilon^2 b_{11}}{\rho_0 (1 + \varepsilon_0 a_{11})^2}, \quad d_{\rho}\chi_m = \frac{b_{11}}{1 + \varepsilon_0 a_{11}} \left(\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon_0 a_{11}} \right).$$

Для хлориду натрію відомо [22, 25]: $c_{11} = 4,83 \cdot 10^{10}$ Па, $\varepsilon_0^{-1} a_{11}^{-1} = 4,6$, $b_{11} = 6,88 \cdot 10^{-1}$ Н·м⁴/С², $d_{11} = 1,4768 \cdot 10^5$ В, $\varepsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{12}$ Ф/м, $\rho_0 = 2,214 \cdot 10^3$ кг/м³. У перерахунку на характеристики локально градієнтної моделі отримаємо: $\lambda_{\mu E} = 4,473 \cdot 10^5$ м⁻¹, $\mathfrak{M} = 1,9095$, $K\alpha_{\rho} \frac{\chi_{Em}}{\varepsilon} = 1,2131 \cdot 10^5$ В, $\frac{K^2 \alpha_{\rho}^2}{\rho_0 d_{\rho}} = 3,17 \cdot 10^{10}$ Па, $c_1 = 2,738 \cdot 10^3$ м/с. Враховуючи формулу (11) та значення параметрів $\lambda_{\mu E}$, \mathfrak{M} і c_1 , для частоти $\omega = 1,67 \cdot 10^6$ Нз одержимо фазову швидкість модифікованої пружної хвилі $4,671 \cdot 10^3$ м/с. Це значення з похибкою до 1% збігається з результатами вимірювання [26] імпульсним ультразвуковим методом швидкості поширення пружної поздовжньої хвилі у кристалах NaCl у напрямку (100). Починаючи від частот порядку 10^9 Нз, фазова швидкість зі зменшенням довжини хвилі також знижується, прямує до значення $2,738 \cdot 10^3$ м/с.

ВИСНОВКИ

На прикладі модельної задачі продемонстровано переваги локально градієнтної теорії діелектриків, лінеаризовані співвідношення якої, на відміну від класичних теорій, враховують взаємовплив механічних та електромагнетних полів і застосовні не лише для низько-, а й для високочастотних хвиль, коли класична теорія не завжди дає задовільний результат. Показано, що співвідношення нелокальної теорії описують механічне вібрування центрально-симетричного кубічного кристалічного шару за прикладання до його поверхонь змінної в часі різниці електричного потенціалу (обернений п'єзоелектричний ефект). Порівняно отримані результати із експериментальними, а також результатами досліджень, що ґрунтуються на градієнтній теорії діелектриків Міндліна. Для хлориду натрію кількісно оцінено деякі параметри локально градієнтної теорії діелектриків. Показано, що у межах цієї теорії модифікована поздовжня механічна хвиля є дисперсійною. Зокрема, у кристалах NaCl зі збільшенням частоти від 10^9 Нз фазова швидкість механічної хвилі зменшується від $4,671 \cdot 10^3$ до $2,738 \cdot 10^3$ м/с.

РЕЗЮМЕ. Лінеаризованные соотношения локально градиентной теории неферромагнитных диэлектриков использованы для изучения механических колебаний безграничного слоя кристалла кубической симметрии, находящегося под воздействием переменного во времени электрического поля. Показано, что в отличие от классической теории пьезоэлектриков локально градиентная описывает пьезоэлектрический эффект в кристаллах с высокой симметрией. С учетом локального смещения массы короткие волны дисперсионные, чего также не описывает линейная классическая теория. Полученные результаты сравнены с результатами, базирующимися на соотношениях градиентной теории диэлектриков Миндлина. Приведена количественная оценка некоторых параметров модели.

SUMMARY. The linearized equations of the local-gradient theory of non-ferromagnetic dielectrics have been applied to describe the mechanical vibrations induced by the oscillating electric field in an infinite crystal layer of cubic symmetry. It has been demonstrated that contrary to the classical linear theory of piezoelectricity, the local-gradient theory enables to describe piezoelectric effect in highly symmetric materials. When local mass displacement is taken into account, short waves become dispersive—the conclusion which could not be derived from linear classical theory of piezoelectricity. The obtained results are compared with previously published results, which are based on Mindlin's gradient theory of dielectrics. Some model parameters are quantitatively estimated.

1. *Lippmann G.* Principe de la conversation de l'électricité // Ann. de Chim. et de Phys. (IV). – 1881. – 24. – P. 145–178.

2. Curie J. and Curie P. Contractions et dilatations produits par des tensions électriques dans les cristaux hémihédres a faces inclinées // Compt. Rend. – 1881. – **93**. – P. 1137–1140.
3. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред. – М.: Мир, 1991. – 560 с.
4. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1984. – 159 с.
5. Yang J. Review of a few topics in piezoelectricity // Appl. Mech. Rev. – 2006. – **59**. – P. 335–345.
6. Кондрат В., Грицина О. Лінійні теорії електромагнітомеханіки діелектриків // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 7–46.
7. Eringen A. C. Theory of nonlocal piezoelectricity // J. Math. Phys. – 1984. – **25**, № 3. – P. 717–727.
8. Mindlin R. D. Polarization gradient in elastic dielectrics // Int. J. Solids and Struct. – 1968. – **4**. – P. 637–642.
9. Yang J. S. and Yang X. M. Electric field gradient effect and thin film capacitance // World J. Eng. – 2004. – **2**. – P. 41–45.
10. Yang J. S. An introduction to the theory of piezoelectricity. – New York: Springer, 2005. – 313 p.
11. Таганцев А. К. К теории флексоэлектрического эффекта в кристаллах // Журн. эксперимент. и техн. физики. – 1985. – **88**, вып. 6. – С. 2108–2122.
12. Majdoub M. S., Sharma P., and Çagin T. Enhanced size-dependent piezoelectricity and elasticity in nanostructures due to the flexoelectric effect // Phys. Rev. B. – 2008. – **77**. – P. 125424(9).
13. Kafadar C. B. Theory of multipoles in classical electromagnetism // Int. J. Eng. Sci. – 1971. – **9**. – P. 831–853.
14. Бурак Я. Й., Кондрат В. Ф., Грицина О. Р. Приповерхневі механоелектромагнетні явища у термопружних поляризованих тілах за локального зміщення маси // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 4. – С. 5–17.
(Burak Ya. I., Kondrat V. F., and Hrytsyna O. R. Subsurface Mechanoelectromagnetic Phenomena in Thermoelastic Polarized Bodies in the Case of Local Displacements of Mass // Materials Science. – 2007. – **43**, № 4. – P. 449–463.)
15. Кондрат В., Грицина О. Рівняння електромагнітотермомеханіки поляризованих неферромагнітних тіл за врахування локального зміщення маси // Фіз.-матем. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 69–83.
16. Burak Ya., Kondrat V., and Hrytsyna O. An introduction of the local displacements of mass and electric charge phenomena into the model of the mechanics of polarized electromagnetic solids // J. Mech. Mat. and Struct. – 2008. – **3**, № 6. – P. 1037–1046.
17. Бурак Я., Кондрат В., Грицина О. Основи локально градієнтної теорії діелектриків. – Ужгород: Поліграфцентр “Ліра”, 2011. – 208 с.
18. Марченко И. Г., Неклюдов И. М., Марченко И. И. Коллективные процессы атомного упорядочения при низкотемпературном осаждении пленок // Доп. НАН України. – 2009. – № 10. – С. 97–103.
19. Kondrat V. and Hrytsyna O. Electromagnetic solids with irreversible process of local mass displacement // Archives of Mech. – 2011. – **63**, № 3. – P. 255–266.
20. Кондрат В. Ф., Грицина О. Р. Механоелектромагнітна взаємодія в ізотропних діелектриках з урахуванням локального зміщення маси // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 1. – С. 150–158.
21. Кондрат В. Ф., Грицина О. Р. До опису аномалії Міда у тонких діелектричних плівках // Доп. НАН України. – 2009. – № 3. – С. 84–89.
22. Mindlin R. D. Electromechanical vibrations of centrosymmetric cubic crystal plates // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1971. – **35**, № 4. – P. 404–408.
23. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
24. Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике. – М.: Наука, 1985. – 512 с.
25. Askar A., Lee P. C. Y., and Cakmak A. S. Lattice dynamics approach to the theory of elastic dielectrics with polarization gradient // Phys. Rev. B. – 1970. – **1**. – P. 3525–3537.
26. Беломестных В. Н., Соболева Э. Г. Акустические, упругие и неупругие свойства кристаллов галогенатов натрия. – Томск: Изд-во Томск. политехн. ун-та, 2009. – 276 с.

Одержано 28.05.2012