УДК 539.3

КРИВОЛІНІЙНІ ТРІЩИНИ В АНІЗОТРОПНІЙ ПЛОЩИНІ ТА ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ДО ВИРОДЖЕНОГО МАТЕРІАЛУ

М. П. САВРУК [1,2], *А. КАЗБЕРУК* [2]

[1] *Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;*
[2] *Білостоцька політехніка, Польща*

Встановлено зв'язок між сингулярними інтегральними рівняннями першої основної задачі плоскої теорії пружності для анізотропного тіла з криволінійними тріщинами в допоміжній та основній комплексних площинах. За допомогою граничного переходу побудовано інтегральні рівняння задачі для виродженого анізотропного середовища з тріщинами, коли комплексні корені характеристичного рівняння кратні. Отримано формули для визначення напруженого стану та знаходження коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах тріщин через розв'язки інтегральних рівнянь.

Ключові слова: *коефіцієнт інтенсивності напружень, теорія пружності, анізотропне середовище, криволінійна тріщина, метод сингулярних інтегральних рівнянь.*

У механіці руйнування значну увагу приділяють вивченню процесів деформування та руйнування анізотропних тіл з тріщинами. На сьогодні найбільш досліджено плоскі задачі теорії пружності для анізотропних тіл з прямолінійними тріщинами, коли їх розв'язки можна отримати аналогічно, як і для ізотропного середовища. Вперше задачу теорії пружності для анізотропної площини з криволінійними тріщинами звів до інтегрального рівняння в допоміжній комплексній площині Л. А. Фільштинський [1]. Трохи пізніше у дещо іншому вигляді побудували інтегральне рівняння цієї задачі Іоакімідіс і Теокаріс [2]. Анізотропні пластини з криволінійними тріщинами вивчали також методами інтегральних рівнянь, заданих на контурах тріщин в основній комплексній площині [3–5].

Нижче встановлено зв'язок між сингулярними інтегральними рівняннями першої основної задачі плоскої теорії пружності для анізотропного тіла з криволінійними тріщинами в допоміжній та основній комплексних площинах. Побудовано інтегральні рівняння задачі для виродженого анізотропного середовища з криволінійними тріщинами, коли комплексні корені характеристичного рівняння кратні.

Основні співвідношення плоскої задачі теорії пружності для анізотропного середовища [6]. Компоненти тензора деформацій ε_{ij} $(i, j = x, y)$ зв'язані з компонентами тензора напружень σ_{ij} $(i, j = x, y)$ узагальненим законом Гука:

$$\varepsilon_{xx} = a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{16}\tau_{xy},$$
$$\varepsilon_{yy} = a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{26}\tau_{xy},$$
$$2\varepsilon_{xy} = a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{66}\tau_{xy},$$

де a_{mn} $(m, n = 1,2,6)$ – пружні сталі анізотропного матеріалу,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) (i, j = x, y),$$

u_x, u_y – компоненти вектора переміщень.

Контактна особа: М. П. САВРУК, e-mail: savruk@ipm.lviv.ua

За відсутності масових сил у пружному анізотропному тілі функція напружень $F(x, y)$ задовольняє еліптичне диференційне рівняння четвертого порядку

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2a_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0\,, \tag{1}$$

яке відповідає характеристичному

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \tag{2}$$

з двома парами комплексно спряжених коренів $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k \; (\beta_k > 0)$ і $\bar{\mu}_k = \alpha_k - -i\beta_k$ ($k = 1, 2$), оскільки коефіцієнти цього рівняння дійсні.

Коли корені μ_1 і μ_2 різні, загальний розв'язок рівняння (1) можна виразити через дві аналітичні функції $\chi_1(z_1)$ і $\chi_2(z_2)$ комплексних аргументів $z_k = x + \mu_k y$ (k = 1, 2) (у допоміжних комплексних площинах) такою залежністю:

$$F(x, y) = \mathrm{Re}[\chi_1(z_1) + \chi_2(z_2)]\,.$$

Тоді отримуємо подання для напружень

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx} = 2\,\mathrm{Re}\{\mu_1^2\Phi_1(z_1) + \mu_2^2\Phi_2(z_2)\}, \quad \tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\{\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Phi_2(z_2)\};\\
&\sigma_{yy} = 2\,\mathrm{Re}\{\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)\}, \;\; \Phi_1(z_1) = \varphi_1'(z_1) = \chi_1''(z_1), \;\; \Phi_2(z_2) = \varphi_2'(z_1) = \chi_2''(z_2)
\end{aligned} \tag{3}$$

та переміщень

$$\begin{aligned}
u_x(z) &= 2\,\mathrm{Re}[p_1\varphi_1(z_1) + p_2\varphi_2(z_2)],\\
u_y(z) &= 2\,\mathrm{Re}[q_1\varphi_1(z_1) + q_2\varphi_2(z_2)].
\end{aligned} \tag{4}$$

Тут сталі p_k, q_k $(k = 1, 2)$ – комплексні характеристики анізотропного матеріалу:

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k\,, \; q_k = a_{12}\mu_k + a_{22}/\mu_k - a_{26}.$$

Розв'язування плоскої задачі теорії пружності для анізотропного тіла зводять до визначення двох аналітичних функцій $\varphi_1(z_1)$ і $\varphi_2(z_2)$ в областях S_1 і S_2 у допоміжних площинах $z_1 = x + \mu_1 y$ і $z_2 = x + \mu_2 y$, що відповідають у площині $z = x + iy$ області S, зайнятій пружним тілом, використовуючи граничні значення цих функцій на межових контурах L_1, L_2 і L цих областей. Коли на межі тіла (контурі L) задані напруження (перша основна задача), крайова умова має вигляд [2]

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}[(1 + \mu_1^2)\Phi_1(t_1) + (1 + \mu_2^2)\Phi_2(t_2)] + \frac{d\bar{t}}{dt}\{\mathrm{Re}[(1 - \mu_1^2)\Phi_1(t_1) + (1 - \mu_2^2)\Phi_2(t_2)] +\\
&\quad + 2i\,\mathrm{Re}\{\mu_1\Phi_1(t_1) + \mu_2\Phi_2(t_2)\}\} = N(t) + iT(t), \quad t = x + iy \in L,
\end{aligned} \tag{5}$$

де N і T – нормальна і дотична компоненти вектора напружень.

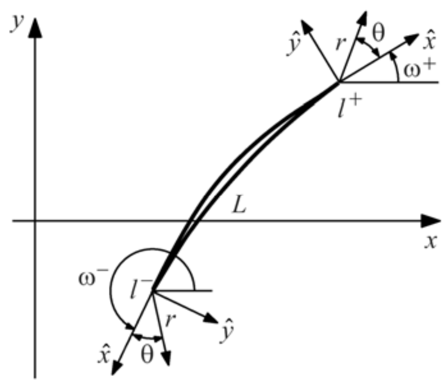
Якщо на контурі L задані переміщення $u_x(t)$ і $u_y(t)$ (друга основна задача), крайову умову за допомогою співвідношень (4) можна записати так:

$$\begin{aligned}
&(p_1 + iq_1)\frac{dt_1}{dt}\Phi_1(t_1) + (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)\frac{d\bar{t}_1}{dt}\overline{\Phi_1(t_1)} + (p_2 + iq_2)\frac{dt_2}{dt}\Phi_2(t_2) +\\
&\quad + (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)\frac{d\bar{t}_2}{dt}\overline{\Phi_2(t_2)} = \frac{du_x(t)}{dt} + i\frac{du_y(t)}{dt}, \;\; t \in L.
\end{aligned}$$

Інтегральні зображення комплексних потенціалів напружень. Розглянемо допоміжну плоску задачу теорії пружності для анізотропної площини, послабленої гладким криволінійним розрізом L у площині z з початком у точці l^- та кінцем у точці l^+ (див. рисунок), коли на розрізі напруження неперервні та задані стрибки похідної вектора переміщень:

$$[N(t)+iT(t)]^{+}-[N(t)+iT(t)]^{-}=0,\ t\in L, \tag{6}$$

$$(d/dt)[(u_x+iu_y)^{+}-(u_x+iu_y)^{-}]=4ia_{11}g'(t),\ t\in L, \tag{7}$$



Криволінійна тріщина
в анізотропній площині.

A curvilinear crack in an anisotropic plane.

причому функція $g(t)$ на кінцях розрізу задовольняє умови $g(l^-)=g(l^+)=0$. Тут верхні індекси "+" і "–" вказують на граничне значення відповідних величин, коли $z\to t\in L$ ($z_1\to t_1\in L_1$, $z_2\to t_2\in L_2$) зліва (+) або справа (–) щодо вибраного додатного напряму обходу контуру L. Напруження та поворот на нескінченності вважаємо рівними нулю.

Записавши крайові умови (6) і (7) через комплексні потенціали напружень $\Phi_1(z_1)$ і $\Phi_2(z_2)$ (3), прийдемо до задачі лінійного спряження:

$$\begin{gathered}
\operatorname{Re}\{(1+\mu_1^2)[\Phi_1^+(t_1)-\Phi_1^-(t_1)]+(1+\mu_2^2)[\Phi_2^+(t_2)-\Phi_2^-(t_2)]\}+\\
+\frac{d\bar{t}}{dt}\{\operatorname{Re}\{(1-\mu_1^2)[\Phi_1^+(t_1)-\Phi_1^-(t_1)]+(1-\mu_2^2)[\Phi_2^+(t_2)-\Phi_2^-(t_2)]\}+\\
+2i\operatorname{Re}\{\mu_1[\Phi_1^+(t_1)-\Phi_1^-(t_1)]+\mu_2[\Phi_2^+(t_2)-\Phi_2^-(t_2)]\}\}=0,\ t\in L,\\
(p_1+iq_1)\frac{dt_1}{dt}[\Phi_1^+(t_1)-\Phi_1^-(t_1)]+(\bar{p}_1+i\bar{q}_1)\frac{d\bar{t}_1}{dt}[\overline{\Phi_1^+(t_1)}-\overline{\Phi_1^-(t_1)}]+\\
+(p_2+iq_2)\frac{dt_2}{dt}\Phi_2^+(t_2)-\Phi_2^-(t_2)]+(\bar{p}_2+i\bar{q}_2)\frac{d\bar{t}_2}{dt}[\overline{\Phi_2^+(t_2)}-\overline{\Phi_2^-(t_2)}]=\\
=ia_{11}g'(t),\ t\in L.
\end{gathered} \tag{8}$$

Оскільки функції $\Phi_1(z_1)$ і $\Phi_2(z_2)$ кусково-аналітичні у всій площині, крім дуг L_1 і L_2 відповідно, їх можна виразити через інтеграли типу Коші [7]

$$\Phi_1(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\phi_1'(\tau_1)}{\tau_1-z_1}d\tau_1,\quad \Phi_2(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\phi_2'(\tau_2)}{\tau_2-z_2}d\tau_2, \tag{9}$$

граничні значення яких на контурах L_1 і L_2 визначають формули Сохоцького–Племеля:

$$\begin{gathered}
\Phi_k^+(t_k)-\Phi_k^-(t_k)=\phi_k'(t_k),\\
\Phi_k^+(t_k)+\Phi_k^-(t_k)=\frac{1}{\pi i}\int_{L_k}\frac{\phi_1'(\tau_k)}{\tau_k-t_k}d\tau_k,\ t_k\in L_k,\ k=1,2.
\end{gathered} \tag{10}$$

Тепер зі співвідношень (8) приходимо до системи двох комплексних лінійних алгебричних рівнянь для знаходження невідомих густин інтегралів типу Коші (9) (точніше добутку $\phi_k'(t_k)dt_k$, $k=1,2$):

$$\begin{cases}
\sum_{k=1}^{2}\left[(p_k+iq_k)\phi_k'(t_k)dt_k+(\bar{p}_k+i\bar{q}_k)\overline{\phi_k'(t_k)}d\bar{t}_k\right]=4ia_{11}g'(t)dt,\\
\sum_{k=1}^{2}\left[(1+i\mu_k)\phi_k'(t_k)dt_k+(1+i\bar{\mu}_k)\overline{\phi_k'(t_k)}d\bar{t}_k\right]=0.
\end{cases} \tag{11}$$

Тут ураховано співвідношення

$$t_k = \frac{1}{2}\left[(1 - i\mu_k)t + (1 + i\mu_k)\bar{t}\right], \quad \frac{dt_k}{dt} = \frac{1}{2}\left[(1 - i\mu_k) + (1 + i\mu_k)\frac{d\bar{t}}{dt}\right], \quad k = 1, 2 .$$

Розв'язок системи (11) подамо у вигляді

$$\phi_k'(t_k)dt_k = c_{1k}g'(t)dt + c_{2k}\overline{g'(t)}d\bar{t}, \; k = 1, 2, \tag{12}$$

де коефіцієнти c_{ik} знайдено за допомогою символьного числення у комп'ютерній алгебрі (програма "Maxima"):

$$c_{11} = 2(1 - i\mu_1)/\Delta_1, \, c_{21} = 2(1 + i\mu_1)/\Delta_1, \, c_{12} = 2(1 - i\mu_2)/\Delta_2, c_{22} = 2(1 + i\mu_2)/\Delta_2,$$

$$\Delta_1 = (\bar{\mu}_1 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)(\bar{\mu}_2 - \mu_1), \quad \Delta_2 = (\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \bar{\mu}_1)(\bar{\mu}_2 - \mu_2).$$

Тепер з формул (12) отримуємо потенціали (9) у вигляді

$$\Phi_k(z_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{c_{1k}g'(\tau)d\tau + c_{2k}\overline{g'(\tau)}d\bar{\tau}}{\tau_k - z_k}, \; k = 1, 2, \tag{13}$$

що узгоджується з відомими результатами [3–5].

Розв'язок (13) допоміжної крайової задачі (6), (7) можна розглядати як інтегральне зображення загального розв'язку плоскої задачі теорії пружності для анізотропної площини через стрибок переміщень на криволінійному контурі L, який використаємо для зведення до інтегральних рівнянь першої крайової задачі для анізотропної області з розрізами, як це зроблено для ізотропного матеріалу [8].

Інтегральне рівняння. Розглянемо крайову задачу для нескінченної анізотропної площини, послабленої розрізом (тріщиною) L, на берегах якого задані самозрівноважені зусилля

$$N^+(t) + iT^+(t) = N^-(t) + iT^-(t) = p(t), \; t \in L, \tag{14}$$

причому напруження та поворот на нескінченності відсутні. Вважатимемо також, що береги тріщини не контактують. Інтегральне рівняння задачі можна отримати, використавши подання (10) або (13) та задовольнивши крайову умову (14). Для цього можна застосувати співвідношення (5), однак, тоді отримаємо інтегральне рівняння складної структури. Скориставшись залежністю

$$(\mu_2 - \bar{\mu}_2)\phi_2'(t_2)dt_2 = -(\mu_1 - \bar{\mu}_2)\phi_1'(t_1)dt_1 - (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2)\overline{\phi_1'(t_1)}d\bar{t}_1,$$

яка випливає з умови неперервності напруження за переходу через контур тріщини L, після певних перетворень [2] для визначення невідомої функції $\phi_1'(\tau_1)$ отримаємо простіше сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_1}[K_1(\tau_1, t_1)\phi_1'(\tau_1)d\tau_1 + L_1(\tau_1, t_1)\overline{\phi_1'(\tau_1)}d\bar{\tau}_1] = P_1(t_1), \; t_1 \in L_1, \tag{15}$$

де ядра $K_1(\tau_1, t_1)$ і $L_1(\tau_1, t_1)$ та праву частину $P_1(t_1)$ визначають формули

$$K_1(\tau_1, t_1) = \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{2}\left(\frac{1}{\tau_1 - t_1}\frac{dt_1}{dt} + \frac{1}{\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2}\frac{d\bar{t}_2}{dt}\right),$$

$$L_1(\tau_1, t_1) = -\frac{(\bar{\mu}_1 - \mu_2)}{2}\left(\frac{1}{\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1}\frac{d\bar{t}_1}{dt} - \frac{1}{\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2}\frac{d\bar{t}_2}{dt}\right),$$

$$P_1(t_1) = P(t) = \frac{1}{2}\left[(1 - i\mu_2)p(t) - (1 + i\mu_2)\overline{p(t)}\frac{d\bar{t}}{dt}\right].$$

Інтегральне рівняння (15) у дещо іншому вигляді отримано раніше [1, 2]. Воно має єдиний розв'язок у класі функцій з інтегровною особливістю на кінцях контуру L_1 за додаткової умови

$$\int_{L_1} \phi_1'(\tau_1) d\tau_1 = 0\,, \tag{16}$$

яка забезпечує однозначність переміщень за обходу контуру тріщини L.

Урахувавши співвідношення (12), з рівняння (15) прийдемо до сингулярного інтегрального рівняння відносно похідної стрибка вектора переміщень $g'(t)$ на контурі тріщини L

$$\frac{1}{\pi}\int_L [K(\tau,t) g'(\tau) d\tau + L(\tau,t)\overline{g'(\tau)} d\overline{\tau}] = P(t),\ t \in L\,, \tag{17}$$

ядра якого

$$K(\tau,t) = c_{11} K_1(\tau_1,t_1) + \overline{c}_{21} L_1(\tau_1,t_1),\ L(\tau,t) = \overline{c}_{11} L_1(\tau_1,t_1) + c_{21} K_1(\tau_1,t_1)\,.$$

Умова однозначності переміщень набуває вигляду

$$\int_L g'(\tau) d\tau = 0\,. \tag{18}$$

Інтегральні рівняння (15) і (17) справедливі також і для системи криволінійних тріщин в анізотропній площині. Тоді L означає сукупність контурів тріщин, а умови (16) і (18) повинні виконуватися для кожної тріщини окремо.

Таким чином, установлено зв'язок між інтегральними рівняннями першої основної задачі теорії пружності для анізотропної області з тріщинами в допоміжній (z_1) та основній (z_2) комплексних площинах. Зазначимо, що відомі [3–5] інтегральні рівняння для похідної стрибка вектора переміщень на контурі тріщин (у комплексній площині z) мають дещо складнішу структуру.

Граничний перехід до виродженого матеріалу. Коли корені характеристичного рівняння $\mu_1 = \mu_2$, то анізотропний матеріал називають виродженим [9, 10]. Це широкий клас, до якого належать також ізотропні матеріали ($\mu_1 = \mu_2 = i$). Інтегральні рівняння першої крайової задачі для криволінійної тріщини у площині з такого матеріалу отримаємо за допомогою граничного переходу. Перейдемо у рівняннях (15) і (17) до границі, коли $\mu_2 \to \mu_1$. Уведемо нову шукану функцію

$$\tilde{\phi}_1'(\tau_1) = \lim_{\mu_2 \to \mu_1} [(\mu_1 - \mu_2)\phi_1'(\tau_1)],\ \tau_1 \in L_1 \tag{19}$$

і для її визначення з рівності (15) отримаємо сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_1} [\tilde{K}_1(\tau_1,t_1)\tilde{\phi}_1'(\tau_1) d\tau_1 + \tilde{L}_1(\tau_1,t_1)\overline{\tilde{\phi}_1'(\tau_1)} d\overline{\tau}_1] = \tilde{P}_1(t_1),\ t_1 \in L_1\,, \tag{20}$$

$$\tilde{K}_1(\tau_1,t_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_1 - t_1}\frac{dt_1}{dt} + \frac{1}{\overline{\tau}_1 - \overline{t}_1}\frac{d\overline{t}_1}{dt}\right),$$

де
$$\tilde{L}_1(\tau_1,t_1) = \frac{i(\overline{\mu}_1 - \mu_1)}{4(\overline{\tau}_1 - \overline{t}_1)^2}\left[[(\overline{\tau} - \overline{t}) - (\tau - t)]\frac{d\overline{t}_1}{dt} - (\overline{\tau}_1 - \overline{t}_1)\left(\frac{d\overline{t}}{dt} - 1\right)\right], \tag{21}$$

$$\tilde{P}_1(t_1) = \tilde{P}(t) = \frac{1}{2}\left[(1 - i\mu_1) p(t) - (1 + i\mu_1)\overline{p(t)}\frac{d\overline{t}}{dt}\right].$$

Напруження у виродженому анізотропному середовищі визначимо зі співвідношень

$$\sigma_{yy} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{(\tau - z) - (\bar{\tau} - \bar{z})}{(\tau_1 - z_1)^2} \tilde{\phi}_1'(\tau_1) d\tau_1 + \frac{2i}{\mu_1 - \bar{\mu}_1} \frac{\tilde{\phi}_1'(\tau_1) d\tau_1 + \overline{\tilde{\phi}_1'(\tau_1) d\tau_1}}{\tau_1 - z_1} \right] \right\};$$

$$\begin{gathered} \sigma_{xx} = -\mathrm{Re}\left\{ \frac{\mu_1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{(2i + \mu_1)(\tau - z) + (2i - \mu_1)(\bar{\tau} - \bar{z})}{(\tau_1 - z_1)^2} \tilde{\phi}_1'(\tau_1) d\tau_1 - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{2i\mu_1}{\mu_1 - \bar{\mu}_1} \frac{\tilde{\phi}_1'(\tau_1) d\tau_1 + \overline{\tilde{\phi}_1'(\tau_1) d\tau_1}}{\tau_1 - z_1} \right] \right\}; \; \tau_{xy} = \mathrm{Im}\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{2\mu_1}{\mu_1 - \bar{\mu}_1} \frac{\overline{\tilde{\phi}_1'(\tau_1) d\tau_1}}{\tau_1 - z_1} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{(\bar{\mu}_1 - i\mu_1^2)(\tau - z) + (\bar{\mu}_1 + i\mu_1^2)(\bar{\tau} - \bar{z})}{(\mu_1 - \bar{\mu}_1)(\tau_1 - z_1)^2} \tilde{\phi}_1'(\tau_1) d\tau_1 \right] \right\}, \end{gathered} \tag{22}$$

які також одержали граничним переходом з формул (3), коли $\mu_2 \to \mu_1$.

Рівняння (17) після такого ж граничного переходу набуде вигляду

$$\frac{1}{\pi} \int_L [\tilde{K}(\tau, t) g'(\tau) d\tau + \tilde{L}(\tau, t) \overline{g'(\tau) d\tau}] = \tilde{P}(t), \; t \in L, \tag{23}$$

де

$$\begin{gathered} \tilde{K}(\tau, t) = -\frac{(1 - i\mu_1)}{(\bar{\mu}_1 - \mu_1)^2} \left(\frac{1}{\tau_1 - t_1} \frac{dt_1}{dt} + \frac{1}{\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1} \frac{d\bar{t}_1}{dt} \right), \\ \tilde{L}(\tau, t) = \frac{i(1 + i\bar{\mu}_1)}{2(\mu_1 - \bar{\mu}_1)} \left[\frac{(\bar{\tau} - \bar{t}) - (\tau - t)}{(\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1)^2} \frac{d\bar{t}_1}{dt} - \frac{1}{\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1} \left(\frac{d\bar{t}}{dt} - 1 \right) \right] - \\ - \frac{1 + i\mu_1}{(\mu_1 - \bar{\mu}_1)^2} \left(\frac{1}{\tau_1 - t_1} \frac{dt_1}{dt} + \frac{1}{\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1} \frac{d\bar{t}_1}{dt} \right). \end{gathered} \tag{24}$$

Для існування єдиного розв'язку задачі до сингулярних інтегральних рівнянь (20) і (23) слід долучити додаткові умови (16) (замінивши тут шукану функцію $\phi_1'(\tau_1)$ на $\tilde{\phi}_1'(\tau_1)$) і (18).

Тоді напруження у виродженому матеріалі можна визначити з формул (22), врахувавши залежність

$$\tilde{\phi}_1'(\tau_1) dt_1 = \frac{2(1 - i\mu_1)}{(\bar{\mu}_1 - \mu_1)^2} g'(t) dt + \frac{2(1 + i\mu_1)}{(\bar{\mu}_1 - \mu_1)^2} \overline{g'(t) d\bar{t}}, \tag{25}$$

яка випливає зі співвідношень (12) і (19). При цьому у формулі (22) потрібно перейти до інтегрування по контуру *L*. Поклавши у співвідношеннях (20), (21), (23) і (24) $\mu_1 = i$, отримаємо інтегральне рівняння для ізотропної площини з криволінійною тріщиною [8].

Коефіцієнти інтенсивності напруження (КІН). Для тріщини на осі x розподіл напружень біля її вершин визначають за формулами [11]

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_{\mathrm{I}} F_{\mathrm{I}ij}(\theta) + K_{\mathrm{II}} F_{\mathrm{II}ij}(\theta) \right] + O(r^0) \; (i, j = x, y), \tag{26}$$

де $K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{II}}$ – КІН; r – віддаль від вершини тріщини; θ – кут, який відлічують від лінії тріщини;

$$F_{\mathrm{I}xx}(\theta) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left[\frac{\mu_2}{\Delta_2(\theta)} - \frac{\mu_1}{\Delta_1(\theta)} \right] \right\}, F_{\mathrm{II}xx}(\theta) = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[\frac{\mu_2^2}{\Delta_2(\theta)} - \frac{\mu_1^2}{\Delta_1(\theta)} \right] \right\};$$

$$F_{\mathrm{I}yy}(\theta)=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left[\frac{\mu_1}{\Delta_2(\theta)}-\frac{\mu_2}{\Delta_1(\theta)}\right]\right\}, F_{\mathrm{II}yy}(\theta)=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left[\frac{1}{\Delta_2(\theta)}-\frac{1}{\Delta_1(\theta)}\right]\right\};$$

$$F_{\mathrm{I}xy}(\theta)=\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\left[\frac{1}{\Delta_1(\theta)}-\frac{1}{\Delta_2(\theta)}\right]\right\}, F_{\mathrm{II}xy}(\theta)=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left[\frac{\mu_1}{\Delta_1(\theta)}-\frac{\mu_2}{\Delta_2(\theta)}\right]\right\}, \quad (27)$$

$$\Delta_k(\theta)=\sqrt{\delta_k(\theta)},\ \delta_k(\theta)=\cos\theta+\mu_k\sin\theta,\ k=1,2.$$

Співвідношення (26) і (27) описують також розподіл напружень біля вершин криволінійної тріщини у локальних системах координат з початком у вершині тріщини. Тоді комплексні параметри μ_1, μ_2 потрібно замінити на [6]

$$\hat{\mu}_k=\frac{\mu_k\cos\omega^{\pm}-\sin\omega^{\pm}}{\cos\omega^{\pm}+\mu_k\sin\omega^{\pm}}=-\frac{\gamma_k(\omega^{\pm})}{\delta_k(\omega^{\pm})},\ \gamma_k(\omega^{\pm})=\sin\omega^{\pm}-\mu_k\cos\omega^{\pm}, \quad (28)$$

що відповідають новим системам координат з віссю $\hat{x}$, яка проходить по дотичній до контуру L в його кінцях. Тут ω^- і ω^+ – кути між осями x і $\hat{x}$ (див. рисунок).

В околі вершин тріщини комплексний потенціал $\Phi_1(z_1)$ можна подати у вигляді [11]

$$\Phi_1(z_1)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}[K_{\mathrm{I}}^{\pm}+\frac{1}{\mu_2}K_{\mathrm{II}}^{\pm}]\frac{1}{\sqrt{z_1-l_1^{\pm}}}+O(r^0),$$

де верхні індекси (–) і (+) відносять до початку (l_1^-) і кінця (l_1^+) контуру L_1 відповідно. Уважатимемо тепер, що прямолінійна тріщина є під кутом $\omega^{\pm}$ до осі x. Тоді в новій системі координат з віссю $\hat{x}$ вздовж лінії тріщини отримаємо:

$$\hat{\Phi}_1(\hat{z}_1)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_2-\hat{\mu}_1}[K_{\mathrm{I}}^{\pm}+\frac{1}{\hat{\mu}_2}K_{\mathrm{II}}^{\pm}]\frac{1}{\sqrt{\hat{z}_1-\hat{l}_1^{\pm}}}+O(r^0),$$

де величини $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{z}_1, \hat{l}_1^{\pm}$ – відповідні параметри в цій системі. Врахувавши формули перетворення комплексних потенціалів $\hat{\Phi}_1(\hat{z}_1)$ за переходу від однієї системи координат до іншої [6, 12] та використавши залежності (28), для криволінійної тріщини L знайдемо

$$\Phi_1(z_1)=\frac{1}{2}\frac{1}{(\mu_2-\mu_1)\sqrt{\delta_1(\omega^{\pm})}}[-\gamma_2(\omega^{\pm})K_{\mathrm{I}}^{\pm}+\delta_2(\omega^{\pm})K_{\mathrm{II}}^{\pm}]\frac{1}{\sqrt{2\pi(z_1-l_1^{\pm})}}+O(r^0), \quad (29)$$

що узгоджується з відомими результатами [3, 4], одержаними іншим шляхом.

Поблизу початку l_1^- та кінця l_1^+ контуру L_1 функцію $\phi_1'(t_1)$ можна подати у вигляді [7]

$$\phi_1'(t_1)=\phi_1^*(t_1)\Big/\sqrt{t_1-l_1^{\pm}}, \quad (30)$$

де функція $\phi_1^*(t_1)$ неперервна в околах вершин $l_1^{\pm}$. Тоді поведінку інтеграла типу Коші (9) біля кінців контуру інтегрування визначає формула

$$\Phi_1(z_1)=\frac{\phi_1^*(l_1^{\pm})}{2\sqrt{z_1-l_1^{\pm}}}+O(r^0). \quad (31)$$

Порівнюючи співвідношення (29) і (31), дістанемо:

$$\frac{-\gamma_2(\omega^{\pm})K_{\mathrm{I}}^{\pm}+\delta_2(\omega^{\pm})K_{\mathrm{II}}^{\pm}}{(\mu_2-\mu_1)\sqrt{2\pi\delta_1(\omega^{\pm})}}=\phi_1^*(l_{\mathrm{I}}^{\pm}).$$

Звідси знайдемо:

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm}=2\,\mathrm{Re}\frac{\phi_1^*(l_{\mathrm{I}}^{\pm})(\mu_2-\mu_1)\sqrt{2\pi\delta_1(\omega^{\pm})}\bar{\delta}_2(\omega^{\pm})}{\mu_2-\bar{\mu}_2},$$
$$K_{\mathrm{II}}^{\pm}=2\,\mathrm{Re}\frac{\phi_1^*(l_{\mathrm{I}}^{\pm})(\mu_2-\mu_1)\sqrt{2\pi\delta_1(\omega^{\pm})}\bar{\gamma}_2(\omega^{\pm})}{\mu_2-\bar{\mu}_2}. \tag{32}$$

Виразимо КІН $K_{\mathrm{I}}^{\pm}$ і $K_{\mathrm{II}}^{\pm}$ (32) безпосередньо через числовий розв'язок інтегрального рівняння (15), яке зводять до канонічної форми за допомогою параметризації:

$$t_k=\omega_k(\xi)=x(\xi)+\mu_k y(\xi), k=1,2;\quad t=\omega(\xi)=x(\xi)+iy(\xi), -1\le\xi\le 1.$$

При цьому невідому функцію $\phi_1'(\xi)=\phi_1'(t_1)\omega_1'(\xi)$ шукають у вигляді

$$\phi_1'(\xi)=u_1(\xi)\Big/\sqrt{1-\xi^2}, \tag{33}$$

де $u_1(\xi)$ – неперервна функція. Скориставшись співвідношеннями (30), (32) і (33), отримаємо:

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm}=\mp 2\sqrt{\pi}\,\mathrm{Im}\frac{(\mu_2-\mu_1)u_1(\pm1)\bar{\omega}_2'(\pm1)}{(\mu_2-\bar{\mu}_2)\,|\,\omega'(\pm1)\,|\sqrt{|\,\omega'(\pm1)\,|}},$$
$$K_{\mathrm{II}}^{\pm}=\mp\sqrt{\pi}\,\mathrm{Re}\frac{(\mu_2-\mu_1)u_1(\pm1)\left[(1+i\bar{\mu}_2)\bar{\omega}'(\pm1)-(1-i\bar{\mu}_2)\omega'(\pm1)\right]}{(\mu_2-\bar{\mu}_2)\,|\,\omega'(\pm1)\,|\sqrt{|\,\omega'(\pm1)\,|}}, \tag{34}$$

де величини $u_1(\pm1)$ знаходять безпосередньо з числового розв'язку інтегрального рівняння (15) [8].

Зі співвідношень (34) граничним переходом, коли $\mu_2\to\mu_1$, знайдемо КІН для виродженого анізотропного матеріалу:

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm}=\pm 2\sqrt{\pi}\,\mathrm{Im}\frac{\tilde{u}_1(\pm1)\bar{\omega}_1'(\pm1)}{(\mu_1-\bar{\mu}_1)\,|\,\omega'(\pm1)\,|\sqrt{|\,\omega'(\pm1)\,|}},$$
$$K_{\mathrm{II}}^{\pm}=\pm\sqrt{\pi}\,\mathrm{Re}\frac{\tilde{u}_1(\pm1)\left[(1+i\bar{\mu}_1)\bar{\omega}'(\pm1)-(1-i\bar{\mu}_1)\omega'(\pm1)\right]}{(\mu_1-\bar{\mu}_1)\,|\,\omega'(\pm1)\,|\sqrt{|\,\omega'(\pm1)\,|}}, \tag{35}$$

де $\quad \tilde{u}_1(\pm1)=\lim\limits_{\mu_2\to\mu_1}[(\mu_1-\mu_2)u_1(\pm1)],\ \tilde{u}_1(\xi)\Big/\sqrt{1-\xi^2}=\tilde{\phi}_1'(\xi)=\tilde{\phi}_1'(t_1)\omega_1'(\xi).$

У цьому разі розподіл напружень в околі вершини тріщини визначають залежності (26), де функції $F_{\mathrm{I}ij}(\theta)$, $F_{\mathrm{II}ij}(\theta)$ (27) мають інший вигляд:

$$F_{\mathrm{I}xx}(\theta)=-\mathrm{Re}\left[\frac{\mu_1^2(2\cos\theta+\mu_1\sin\theta)}{2\Delta_1^3(\theta)}\right],\ F_{\mathrm{II}xx}(\theta)=-\mathrm{Re}\left[\frac{4\mu_1\cos\theta+3\mu_1^2\sin\theta}{2\Delta_1^3(\theta)}\right];$$
$$F_{\mathrm{I}yy}(\theta)=\mathrm{Re}\left[\frac{2\cos\theta+3\mu_1\sin\theta}{2\Delta_1^3(\theta)}\right],\qquad F_{\mathrm{II}yy}(\theta)=\mathrm{Re}\left[\frac{\sin\theta}{2\Delta_1^3(\theta)}\right]; \tag{36}$$
$$F_{\mathrm{I}xy}(\theta)=-\mathrm{Re}\left[\frac{\mu_1^2}{2}\frac{\sin\theta}{\Delta_1^3(\theta)}\right],\qquad F_{\mathrm{II}xy}(\theta)=\mathrm{Re}\left[\frac{\mu_1\sin\theta+2\cos\theta}{2\Delta_1^3(\theta)}\right].$$

Використавши залежності (12) і (25), легко записати формули для визначення КІН (34) і (35) через значення $u(\pm1)$ і $\bar{u}(\pm1)$ функції $u(\xi)=g'(\xi)\sqrt{1-\xi^2}$.

Поклавши у співвідношеннях (35) і (36) $\mu_1 = i$, отримаємо відомі результати для ізотропного матеріалу [8].

ВИСНОВКИ

Установлено зв'язок між сингулярними інтегральними рівняннями плоскої задачі теорії пружності для анізотропного тіла з криволінійними тріщинами, записаними у допоміжній та основній комплексних площинах, коли корені характеристичного рівняння різні. За допомогою граничного переходу, коли ці корені прямують один до одного, побудовано аналогічні рівняння для виродженого анізотропного середовища з тріщинами. Наведено формули для визначення КІН у вершинах криволінійних тріщин для анізотропного тіла та для виродженого анізотропного матеріалу через розв'язки інтегральних рівнянь. Інтегральні рівняння записано у формі, зручній для числової реалізації. Їх структура така ж, як і у відповідних задачах теорії пружності ізотропного тіла, що дає змогу для їх числового розв'язування використати раніше розроблені підходи.

РЕЗЮМЕ. Установлена связь между сингулярными интегральными уравнениями первой основной задачи плоской теории упругости для анизотропного тела с криволинейными трещинами в вспомогательной и основной комплексных плоскостях. С помощью граничного перехода построены интегральные уравнения задачи для вырожденной анизотропной среды с трещинами, когда комплексные корни характеристического уравнения кратные. Получены формулы для определения напряженного состояния и коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещин через решения интегральных уравнений.

SUMMARY. The relationship between the singular integral equations of the first basic boundary value problem of the plane theory of elasticity for an anisotropic body with curvilinear cracks in the auxiliary and main complex planes is established. The integral equations of the problem for degenerate anisotropic medium with cracks are constructed when the complex roots of the characteristic equation are multiple. The formulas for determining the stress state and the stress intensity factors at the crack tips in the terms of the integral equations solutions are obtained.

Робота виконана за проектом № 2011/03/B/ST8/06456, що фінансується Національним центром науки (Польща).

1. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 5. – С. 91–97.
2. *Ioakimidis N. I. and Theocaris P. S.* The problem of the simple smooth crack in an infinite anisotropic elastic medium // Int. J. Solids Struct. – 1977. – **13**, № 4. – P. 269–278.
3. *Божидарнік В. В., Максимович О. В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
4. *Божидарнік В. В., Андрейків О. Є., Сулим Г. Т.* Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів: у 2-х т. – Луцьк: Надстир'я, 2007. – **2**. – 424 с.
5. *Максимович О. В.* Розрахунок на міцність та довговічність композитних пластинчастих елементів конструкцій складної форми з тріщинами: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Луцьк, 2010. – 40 с.
6. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
8. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
9. *Ting T. C. T.* Anisotropic Elasticity: Theory and Applications. – Oxford: Oxford University Press., 1996. – 588 p.
10. *Hwu C.* Anisotropic Elastic Plates. – New York e.a.: Springer, 2010. – 674 p.
11. *Sih G. C., Paris P. C., and Irwin G. R.* On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // Int. J. Fract. Mech. – 1965. – **1**, № 3. – P. 189–203.
12. *Tvardovsky V. V.* Further results on rectilinear line cracks and inclusions in anisotropic medium // Theor. Appl. Fract. Mech. – 1990. – **13**, № 3. – P. 193–207.

Одержано 15.08.2013