

УДК 536.12:621.891:539.3

ВПЛИВ ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ МАТЕРІАЛІВ НА ТЕМПЕРАТУРУ ПІД ЧАС ТЕРТЯ

О. ЄВТУШЕНКО, М. КУЦІЙ, Е. ОХ

Білостоцька політехніка, Польща

Отримано числово-аналітичний розв'язок нестационарної теплової задачі тертя для двох півпросторів з урахуванням термічної чутливості матеріалів. Лінеаризацію відповідної крайової задачі теплопровідності виконано в два етапи: спочатку часткову лінеаризацію за допомогою підстановки Кірхгофа, а потім остаточну – методами сплайн-апроксимації та простої ітерації. Для фрикційної пари титан–залізний сплав досліджено вплив температурозалежного коефіцієнта теплопровідності на температурне поле трибосистеми.

Ключові слова: *фрикційне нагрівання, термічна чутливість, тепловий контакт.*

Точність оцінювання теплового режиму роботи важконавантажених вузлів тертя машин залежить від врахування у відповідній математичній моделі – теплової задачі тертя – якнайбільшої кількості параметрів, що мають визначальний вплив на розподіл температури [1]. Одним із таких чинників є термічна чутливість матеріалів фрикційної пари – залежність від температури їхніх теплофізичних і механічних властивостей [2]. Матеріали із коефіцієнтами теплопровідності і питомою теплоємністю, що змінюються за підвищення температури, та сталим коефіцієнтом температуропровідності належать до класу матеріалів з простою нелінійністю [3]. Повну лінеаризацію крайової задачі теплопровідності для фрикційної пари, виготовленої із таких матеріалів, можемо здійснити за допомогою підстановки Кірхгофа лише за нагрівання кожного елемента окремо тепловим потоком із інтенсивністю, пропорційною питомій потужності тертя [4, 5]. Тому мета роботи – отримати числово-аналітичний розв'язок теплової задачі тертя для спряження нестационарних температурних полів двох напівобмежених тіл через крайові умови на поверхні контакту та дослідити на цій основі вплив термічної чутливості матеріалів на еволюцію і просторовий розподіл температури. Розв'язок цієї задачі за сталих теплофізичних властивостей матеріалів отримали раніше [6].

Формулювання задачі. Розглянемо два різні півпростори, що стискаються на безмежності зусиллями сталої інтенсивності p , прикладеними паралельно до осі Oz (рис. 1). У початковий момент часу $t = 0$ один із півпросторів починає рухатись зі сталою швидкістю V по поверхні іншого у додатному напрямку осі Oy . Внаслідок тертя на поверхні контакту $z = 0$ генерується тепло і співдотичні тіла нагріваються. Вважаємо, що сума інтенсивностей теплових потоків, напрямлених вздовж нормалі від поверхні контакту всередину кожного півпростору, дорівнює питомій потужності тертя $q = fVp$, де f – коефіцієнт тертя [7]; тепловий контакт тіл недосконалий – через поверхню тертя між ними відбувається теплообмін зі сталим коефіцієнтом контактної провідності h [8]; коефіцієнти теплопровідності K_l і питомою теплоємності c_l матеріалів півпросторів залежать від температури T :

$$K_l(T) = K_{l,0} K_l^*(T), \quad c_l(T) = c_{l,0} c_l^*(T), \quad K_{l,0} \equiv K_l(T_0), \quad c_{l,0} \equiv c_l(T_0), \quad (1)$$

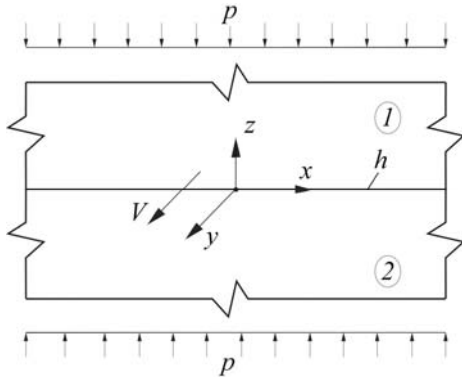


Рис. 1. Схема задачі.

Fig. 1. Scheme of the problem.

причому $K_l^*(T) \approx c_l^*(T)$ і, отже, їхні коефіцієнти температуропровідності $k_l, l = 1, 2$ є сталими; зношуванням співдотичних поверхонь нехтуємо. Усі величини та параметри, що належать до верхнього та нижнього півпросторів, надалі позначатимемо нижніми індексами 1 та 2, відповідно.

Нестационарне температурне поле $T(z, t)$ знайдемо із розв'язку нелінійної крайової задачі теплопровідності:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[K_1^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} \right] = \frac{c_1^*(T^*)}{k^*} \frac{\partial T^*}{\partial \tau}, \quad (2)$$

$$\zeta > 0, \quad \tau > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[K_2^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} \right] = c_2^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \tau}, \quad \zeta < 0, \quad \tau > 0, \quad (3)$$

$$K_2^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^-} - K_0^* K_1^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^+} = 1, \quad \tau > 0, \quad (4)$$

$$K_2^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^-} + K_0^* K_1^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0^+} = \text{Bi}[T^*(0^+, \tau) - T^*(0^-, \tau)], \quad \tau > 0, \quad (5)$$

$$T^*(\zeta, \tau) \rightarrow T_0^*, \quad |\zeta| \rightarrow \infty, \quad \tau \geq 0, \quad (6)$$

$$T^*(\zeta, 0) = T_0^*, \quad |\zeta| < \infty \quad (7)$$

де, враховуючи залежності (1), позначимо:

$$\zeta = \frac{z}{a}, \quad \tau = \frac{k_2 t}{a^2}, \quad K_0^* = \frac{K_{1,0}}{K_{2,0}}, \quad k^* = \frac{k_1}{k_2}, \quad \text{Bi} = \frac{h a}{K_{2,0}}, \quad T_a = \frac{q a}{K_{2,0}}, \quad T^* = \frac{T}{T_a}, \quad T_0^* = \frac{T_0}{T_a}, \quad (8)$$

T_0 – початкова температура трибосистеми; a – ефективна глибина прогрівання нижнього півпростору [1].

Розв'язок задачі. За допомогою підстановки Кірхгофа [9]

$$\Theta_l(\zeta, \tau) = \int_{T_0^*}^{T^*} K_l^*(T) dT, \quad l = 1, 2 \quad (9)$$

та із урахуванням співвідношень

$$\frac{\partial \Theta_l}{\partial \zeta} = K_l^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial \Theta_l}{\partial \tau} = K_l^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \tau} \approx c_l^*(T^*) \frac{\partial T^*}{\partial \tau}, \quad l = 1, 2, \quad (10)$$

нелінійна крайова задача (2)–(7) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{k^*} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau}, \quad \zeta > 0, \quad \tau > 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau}, \quad \zeta < 0, \quad \tau > 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} - K_0^* \frac{\partial \Theta_1}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 1, \quad \tau > 0, \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial \Theta_2}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} + K_0^* \left. \frac{\partial \Theta_1}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = \text{Bi} \{ T^* [\Theta_1(0, \tau)] - T^* [\Theta_2(0, \tau)] \}, \tau > 0, \quad (14)$$

$$\Theta_l(\zeta, \tau) \rightarrow 0, \quad |\zeta| \rightarrow \infty, \quad \tau \geq 0, \quad l=1,2, \quad (15)$$

$$\Theta_l(\zeta, 0) = 0, \quad |\zeta| < \infty, \quad l=1,2. \quad (16)$$

Лінеаризація крайової задачі теплопровідності (2)–(7) за допомогою перетворення (9), (10) у вигляді (11)–(16) виявилась неповною, оскільки права частина крайової умови (14) містить нелінійні доданки $T^*[\Theta_l(0, \tau)]$. Апроксимували їх за допомогою сплайнів нульового порядку [10]

$$T^*[\Theta_l(0, \tau)] \approx Q_{l,n}(\tau) = T_{l,1}^* + \sum_{j=1}^{n-1} (T_{l,j+1}^* - T_{l,j}^*) H(\tau - \tau_j), \tau > 0, l=1,2, \quad (17)$$

де $T_{l,j}^* \equiv T^*[\Theta_l(0, \tau_j)]$, $\tau_j = j\Delta\tau$, $j=1,2,\dots,n$, $\Delta\tau = \tau/n$, $H(\cdot)$ – функція Гевісайта, крайову умову (14) запишемо у вигляді

$$\left. \frac{\partial \Theta_2}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0^-} + K_0^* \left. \frac{\partial \Theta_1}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0^+} = \text{Bi} [Q_{1,n}(\tau) - Q_{2,n}(\tau)], \tau > 0. \quad (18)$$

Розв'язавши лінійну крайову задачу (11)–(13), (15), (16) і (18) за допомогою інтегрального перетворення Лапласа, знайдемо такі вирази для функцій Кірхгофа:

$$\Theta_1(\zeta, \tau) = 0,5\varepsilon^{-1} [1 - \text{Bi} \Phi_n(\zeta/\sqrt{k^*}, \tau)], \quad \Theta_2(\zeta, \tau) = 0,5 [1 + \text{Bi} \Phi_n(-\zeta, \tau)], \quad (19)$$

$$\Phi_n(\zeta, \tau) = \tilde{T}_1^* \varphi(\zeta, \tau) + \sum_{j=1}^{n-1} (\tilde{T}_{j+1}^* - \tilde{T}_j^*) \varphi(\zeta, \tau - \tau_j) H(\tau - \tau_j), \quad (20)$$

де $\varphi(\zeta, \tau) = 2\sqrt{\tau} \text{ierfc}(0,5\zeta/\sqrt{\tau})$, $\text{ierfc}(x) = \pi^{-1/2} \exp(-x^2) - x \text{erfc}(x)$, $\text{erfc}(x) = 1 - \text{erf}(x)$, $\tilde{T}_j^* = T_{1,j}^* - T_{2,j}^*$, $\varepsilon = K_0^*/\sqrt{k^*}$, $\text{erf}(x)$ – функція помилок Гаусса [11].

Для лінійної залежності коефіцієнтів теплопровідності матеріалів співдотичних тіл від температури $K_l^*(T) = 1 + \lambda_l(T - T_0)$ (або з урахуванням позначень (8) $K_l^*(T^*) = 1 + \Lambda_l(T^* - T_0^*)$, $\Lambda_l = \lambda_l T_a$, $l=1,2$) з виразу (9) знаходимо зв'язок між безрозмірною температурою T^* та змінними Кірхгофа Θ_l , $l=1,2$ у вигляді

$$T^*(\zeta, \tau) = \Lambda_l^{-1} [\sqrt{1 + 2\Lambda_l \Theta_l(\zeta, \tau)} - 1] + T_0^*, \quad l=1,2. \quad (21)$$

Щоб знайти параметри апроксимації $T_{l,j}^*$ (17), що входять до функцій Кірхгофа (19) і (20), скористаємось методом колокації. Приймаючи у співвідношеннях (19), (20) та (21) $\zeta = 0$, $\tau = \tau_j$, $j=1,2,\dots,n$, отримаємо систему $2n$ нелінійних алгебричних рівнянь для визначення такої ж кількості коефіцієнтів $T_{l,j}^*$, $l=1,2$; $j=1,2,\dots,n$:

$$\begin{cases} T_{1,j}^* = \Lambda_1^{-1} \{ \sqrt{1 + \varepsilon^{-1} \Lambda_1 [(\Psi(\tau_j) - \text{Bi} \Psi_j)] - 1} \} + T_0^*, \\ T_{2,j}^* = \Lambda_2^{-1} \{ \sqrt{1 + \Lambda_2 [\Psi(\tau_j) + \text{Bi} \Psi_j] - 1} \} + T_0^*, \end{cases} \quad (22)$$

де $\Psi_j = \tilde{T}_1^* \psi(\tau_j) + \sum_{k=1}^{j-1} (\tilde{T}_{k+1}^* - \tilde{T}_k^*) \psi(\tau_j - \tau_k)$, $\psi(\tau) \equiv \varphi(0, \tau) = 2\sqrt{\tau/\pi}$.

Систему рівнянь (22) розв'язували методом простої ітерації [12]. Обчислювали за такою схемою: на першому часовому кроці $\tau = \tau_1$ виконували ітерації за i для системи рівнянь

$$\begin{cases} T_{1,1}^{*(i+1)} = \Lambda_1^{-1} \{ \sqrt{1 + \varepsilon^{-1} \Lambda_1 [\psi(\tau_1) - \text{Bi} \Psi_1^{(i)}]} - 1 \} + T_0^*, \\ T_{2,1}^{*(i+1)} = \Lambda_2^{-1} \{ \sqrt{1 + \Lambda_2 [\psi(\tau_1) + \text{Bi} \Psi_1^{(i)}]} - 1 \} + T_0^*, \end{cases}$$

де $\Psi_1^{(i)} = \tilde{T}_1^{*(i)} \psi(\tau_1)$, $\tilde{T}_1^{*(i)} = T_{1,1}^{*(i)} - T_{2,1}^{*(i)}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, а за нульове ($i = 0$) наближення брали розв'язок крайової задачі (2)–(7) за сталих ($K_l^*(T) = 1$, $l = 1, 2$) теплофізичних властивостей тіл [6]:

$$T_{l,1}^{*(0)} = (1 + \varepsilon)^{-1} [\psi(\tau_1) + \gamma_l \chi(\tau_1)], \quad l = 1, 2, \quad (23)$$

де $\chi(\tau) = 1 - e^{\beta^2 \tau} \text{erfc}(\beta \sqrt{\tau})$, $\beta = 0,5(1 + \varepsilon)\varepsilon^{-1} \text{Bi}$, $\gamma_1 = 0,5(1 - \varepsilon)(\varepsilon\beta)^{-1}$, $\gamma_2 = -\varepsilon\gamma_1$. Після кожної ітерації обчислювали різниці $\Delta_{l,1}^{(i)} = T_{l,1}^{*(i+1)} - T_{l,1}^{*(i)}$, $l = 1, 2$ та перевіряли виконання умови збіжності $\sqrt{[\Delta_{1,1}^{(i)}]^2 + [\Delta_{2,1}^{(i)}]^2} \leq 10^{-6}$. Якщо заданій точності обчислень досягали, наприклад, для $i = m$, то приймали $T_{l,1}^* = T_{l,1}^{*(m)}$, $l = 1, 2$; на наступних кроках $\tau = \tau_j$, $j = 2, 3, \dots$ ітерації виконували для системи рівнянь виду

$$\begin{cases} T_{1,j}^{*(i+1)} = \Lambda_1^{-1} \{ \sqrt{1 + \varepsilon^{-1} \Lambda_1 [\psi(\tau_j) - \text{Bi} \Psi_j^{(i)}]} - 1 \} + T_0^*, \\ T_{2,j}^{*(i+1)} = \Lambda_2^{-1} \{ \sqrt{1 + \Lambda_2 [\psi(\tau_j) + \text{Bi} \Psi_j^{(i)}]} - 1 \} + T_0^*, \end{cases}$$

де $\Psi_j^{(i)} = \tilde{T}_1^* \psi(\tau_j) + \sum_{k=1}^{j-2} (\tilde{T}_{k+1}^* - \tilde{T}_k^*) \psi(\tau_j - \tau_k) + (\tilde{T}_j^{*(i)} - \tilde{T}_{j-1}^*) \psi(\tau_j - \tau_{j-1})$, $\tilde{T}_j^{*(i)} = T_{1,j}^{*(i)} - T_{2,j}^{*(i)}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, а нульові наближення $T_{l,j}^{*(0)}$, $l = 1, 2$ знаходили за формулами (23), замінивши в них τ_1 на τ_j . Збіжність оцінювали так само, як і на першому часовому кроці, шляхом перевірки виконання умови $\sqrt{[\Delta_{1,j}^{(i)}]^2 + [\Delta_{2,j}^{(i)}]^2} \leq 10^{-6}$,

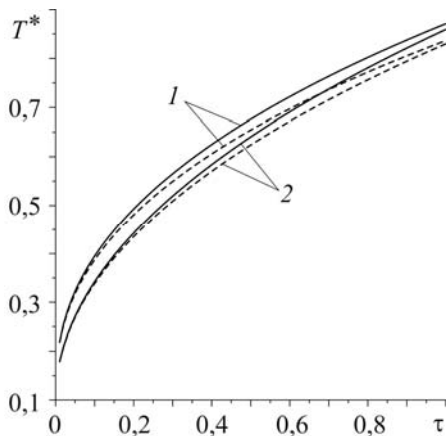


Рис. 2. Еволюція безрозмірної температури робочих поверхонь для $\text{Bi} = 5$: 1 – ВТ-14; 2 – ФЦД 50.

Fig. 2. Evolution of the dimensionless temperature of the working surfaces for $\text{Bi} = 5$: 1 – VT-14; 2 – PhC 50.

де $\Delta_{l,j}^{(i)} = T_{l,j}^{*(i+1)} - T_{l,j}^{*(i)}$.

Маючи значення коефіцієнтів $T_{l,j}^*$, $l = 1, 2$; $j = 1, 2, \dots, n$, зі співвідношень (19) і (20) знаходили функції Кірхгофа $\Theta_l(\zeta, \tau)$, після чого за формулою (21) обчислювали шукане безрозмірне температурне поле $T^*(\zeta, \tau)$.

Числовий аналіз. Безрозмірні вхідні параметри задачі такі: просторова змінна ζ , час (число Фур'є) τ та число Біо Bi . Обчислення виконано для фрикційної пари титан ВТ-14 ($K_{1,0} = 7,83 \text{ W/(mK)}$, $k_1 = 3,68 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\lambda_1 = 1,18 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$) і залізний сплав серії ФЦД 50 ($K_{2,0} = 27,54 \text{ W/(mK)}$, $k_2 = 7,63 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\lambda_2 = -0,54 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$) для $q = 1 \text{ MW/m}^2$, $a = 0,5 \text{ cm}$, $T_0 = 20^\circ\text{C}$ [13]. Ці матеріали

використовують під час виготовлення накладок (ВТ-14) та дисків (ФЦД 50) галь-

мівних систем [2, 14]. Криві (рис. 2–4) побудовані як з урахуванням термочутливості матеріалів (штрихові лінії), так і без нього (суцільні).

Зі збільшенням температури коефіцієнт теплопровідності титану лінійно зростає, а залізного сплаву, навпаки, зменшується. Оскільки швидкість збільшення теплопровідності титану є суттєво (на порядок) вищою від швидкості зменшення теплопровідності сплаву, то врахування термочутливості матеріалів цієї фрикційної пари призводить до відносного охолодження їхніх робочих поверхонь (рис. 2). Із віддаленням від поверхні тертя вплив термічної чутливості матеріалів на температуру зменшується (рис. 3). На відстані $\zeta \geq 1$ ($z \geq a = 0,5$ cm) температури, знайдені з урахуванням термічної чутливості матеріалів та без нього, практично збігаються.

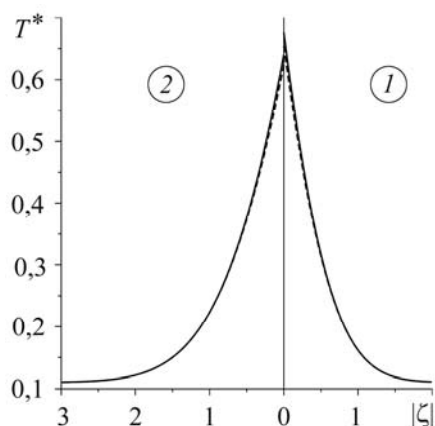


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Зміна безрозмірної температури із віддаленням від поверхні контакту для $\tau = 0,5$, $Bi = 5$: 1 – ВТ-14; 2 – ФЦД 50.

Fig. 3. Variation of the dimensionless temperature at the distance from the surface of contact for $\tau = 0.5$, $Bi = 5$: 1 – ВТ-14; 2 – ФЦД 50.

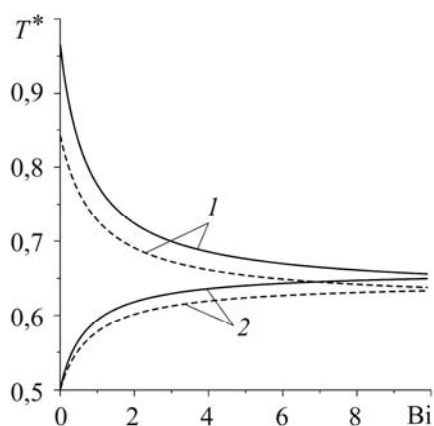


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 4. Залежність безрозмірної температури робочих поверхонь від числа Біо для $\tau = 0,5$: 1 – ВТ-14; 2 – ФЦД 50.

Fig. 4. Dependence of the dimensionless temperature of the working surfaces on the Biot number for $\tau = 0.5$: 1 – ВТ-14; 2 – ФЦД 50.

Врахування термоопору поверхні контакту у крайовій умові (5) призводить до появи на ній стрибка температур поверхонь півпросторів (рис. 4). Найбільшу різницю температур співдотичних тіл виявили для $Bi \rightarrow 0$, коли термоопір поверхні контакту є настільки значний, що дає змогу розглядати задачу про фрикційне нагрівання кожного півпростору окремо. Зі зменшенням термоопору (збільшенням теплопровідності контакту – числа Біо) температури поверхонь півпросторів вирівнюються. Коли $Bi \geq 10$, тепловий контакт тіл можна вважати досконалим.

ВИСНОВКИ

Побудовано числово-аналітичний розв'язок теплової задачі тертя для двох півпросторів із урахуванням термічної чутливості їхніх матеріалів та неповного теплового контакту. Досліджено просту нелінійність, коли коефіцієнти теплопровідності та питомої теплоємності матеріалів залежать від температури, а коефіцієнт температуропровідності залишається сталим. Часткову лінеаризацію крайової задачі теплопровідності виконано із допомогою підстановки Кірхгофа, а остаточну – методами сплайн-апроксимації та простої ітерації. Числовий аналіз виконано для матеріалів фрикційної пари титан–залізний сплав, що мають лінійну за-

лежність коефіцієнта теплопровідності від температури. Показано, що вплив термічної чутливості матеріалів цієї пари на температуру зростає зі збільшенням часу тертя та зменшується із віддаленням від поверхні контакту. Отже, під час оцінювання температурного режиму роботи вузла тертя термочутливість матеріалів слід враховувати, в першу чергу, під час визначення температури робочих поверхонь. Зменшення термічного опору поверхні контакту (збільшення її контактної провідності) зумовлює вирівнювання температур співдотичних поверхонь як для сталей, так і залежних від температури властивостей матеріалів.

РЕЗЮМЕ. Получено численно-аналитическое решение нестационарной тепловой задачи трения для двух полупространств с учетом термической чувствительности материалов. Линеаризацию соответствующей краевой задачи теплопроводности выполнено в два этапа: сначала частичную линеаризацию с помощью подстановки Кирхгофа, а потом окончательную – методами сплайн-аппроксимации и простой итерации. Для фрикционной пары титан–железный сплав исследовано влияние температурозависимого коэффициента теплопроводности на температурное поле трибосистемы.

SUMMARY. The numerical-analytical solution of the transient heat problem of friction for two semi-spaces with account of the thermal sensitivity of materials was obtained. Linearization of the corresponding boundary-value problem of heat conduction has been completed in two stages: at first, a partial linearization by means of the Kirchhoff substitution and then the final one by the methods of the spline-approximation and a simple iteration. For friction pairs of titanium–iron alloy the influence of the dependence of the temperature dependent coefficient of heat conductivity on a temperature field of the tribosystem has been investigated.

Роботу виконано в межах гранту № 2011/01/B/ST8/07446 Національного Центру Науки Республіки Польща.

1. *Расчет, испытание и подбор фрикционных пар /* А. В. Чичинадзе, Э. Д. Браун, А. Г. Гинзбург, З. В. Игнатьева. – М.: Наука, 1979. – 268 с.
2. *Чичинадзе А. В., Матвеевский Р. М., Браун Э. Д.* Материалы в триботехнике нестационарных процессов. – М.: Наука, 1986. – 248 с.
3. *Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл /* Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. Т. 3: Термопружність термочувливих тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с.
4. *Коздоба Л. А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Наука, 1975. – 228 с.
5. *Abdel-Aal H. A. and Smith S. T.* On friction-induced temperatures of rubbing metallic pairs with temperature-dependent thermal properties // *Wear.* – 1998. – **216**, № 1. – P. 41–59.
6. *Євтушенко О, Куцей М., Євтушенко Ол.* Моделювання фрикційного нагрівання під час гальмування // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2012. – **48**, № 5. – С. 27–33.
(*Evtushenko O., Kuciej M., and Yevtushenko Ol.* Modeling of frictional heating in the process of braking // *Materials Science.* – 2013. – **48**, № 5. – P. 582–590.)
7. *Гриліцький Д. В.* Термопружні контактні задачі в трибології. – К.: Ін-т змісту і методів навчання Міністерства освіти України, 1996. – 204 с.
8. *Підстригач Я. С.* Умови теплового контакту тіл // *Доп. АН УССР.* – 1963. – № 7. – С. 872–874.
9. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
10. *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
11. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
12. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. – **2**. – 620 с.
13. *Yevtushenko A. A. and Grzes P.* Axisymmetric finite element model for the calculation of temperature at braking for thermosensitive materials of a pad and a disc // *Numerical Heat Transfer, P.: A.* – 2012. – **62**, № 3. – P. 211–230.
14. *Thermophysical properties of automotive metallic brake disk materials /* S. W. Kim, K. Park, S. H. Lee, K. H. Kang, and K. T. Lim // *Int. J. Thermophys.* – 2008. – **29**, № 6. – P. 2179–2188.

Одержано 25.06.2013