

УДК 539.3

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТОЇ СФЕРИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

В. С. МИХАЙЛИШИН

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

Запропоновано підхід до дослідження термомеханічних станів у шаруватих пластично деформованих термочутливих тілах довільної геометричної форми з довільною орієнтацією поверхонь розмежування шарів. Він базується на формулюванні задачі нестационарної теплопровідності, задачі теорії пластичного неізотермічного течіння, розрахункових схемах методу скінченних елементів та відповідному програмному забезпеченні. Вивчено термомеханічну поведінку двошарової сфери за швидкого охолодження від початкової однорідної температури.

**Ключові слова:** шаруваті тіла, температура, напруження, деформації, пластичне деформування, термочутливість, зміцнення, метод скінченних елементів.

Питання про визначення нестационарних температурних полів на основі теорії теплопровідності з урахуванням можливості пластичного деформування простороно неоднорідних тіл, в т. ч. шаруватих, термочутливості і зміцнюваності матеріалів залишаються поза увагою. Проаналізовані [1–3] різні аспекти дослідження термомеханічних процесів у шаруватих тілах. Запропонований підхід дає можливість вивчати ці явища у неоднорідних, в т. ч. шаруватих, тілах складної геометричної форми за нестационарного теплового режиму, довільної орієнтації поверхонь розмежування шарів, урахування зміцнювальних факторів під час пластичного деформування, не функціонально заданого характеру температурної залежності термомеханічних характеристик матеріалу, сумісної дії силового та температурного навантажень.

**Постава задачі.** Розглядувані процеси вважали квазістатичними та геометрично лінійними за можливих великих переміщень. Тіла термочутливі в досліджуваних температурних діапазонах і зміцнюювані під час пластичного деформування. Впливом масових сил нехтували. Формулюючи задачі механіки для шаруватих тіл, припускають [4], що поверхня, яка обмежує тіло, і поверхні розмежування суміжних шарів паралельні до координатних поверхонь. Тут такі обмеження відсутні. Термомеханічні стани вивчали в зайнятій тілом початковій недеформованій області  $\Omega_0$  з межею  $\Gamma_0$  відносно декартової системи координат  $(x_1, x_2, x_3)$ . Тіло складається з  $N$  шарів, розділених поверхнями  $\eta = \eta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N-1$ ). Припускали ідеальний тепловий контакт між шарами і під час деформування включали відрив між шарами та їх проковзування. Нестационарний тепловий процес, спричинений охолодженням від початкової температури  $T_0(\{x\})$  внаслідок конвективного теплообміну зі середовищем, описує рівняння теплопровідності [5] з відповідними початковою та крайовою умовами. За припущення теплового контакту між шарами маємо неперервність температур на розмежувальних поверхнях  $\eta = \eta_k$  та рівність теплових потоків [4] крізь них.

---

Контактна особа: В. С. МИХАЙЛИШИН, e-mail: vira.mykhailyshyn@gmail.com

Задачу про напружено-деформований стан закріпленого на частині  $\Gamma_{0u} \subset \Gamma_0$  шаруватого тіла, що виникає через неоднорідність температурного поля  $T$  і (або) механічних зусиль, прикладених до частини  $\Gamma_{0\sigma} \subset \Gamma_0$  ( $\Gamma_{0u} \cup \Gamma_{0\sigma} = \Gamma_0$ ,  $\Gamma_{0u} \cap \Gamma_{0\sigma} = \emptyset$ ,  $\{u\}$  – вектор переміщень), формулюємо в змінних Лагранжа як систему рівнянь, яка охоплює рівняння рівноваги [6], геометричне лінійне співвідношення [6], рівняння стану теорії пластичного неізотермічного течіння з ізотропно-кінематичним зміцненням [7]

$$\begin{aligned} \{d\sigma\} = & \left( [D]^{(k)t+dt} - \frac{9}{4(\bar{\sigma}_i^t)^2} \cdot \frac{[D]^{(k)t+dt} \{\bar{s}\}^t \{\bar{s}\}^{t'} [D]^{(k)t+dt}}{H^{(k)t} + 3G^{(k)t+dt}} \right) (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^T\}) + \\ & + \left( [dD]^{(k)} - \frac{9}{4(\bar{\sigma}_i^t)^2} \cdot \frac{[D]^{(k)t+dt} \{\bar{s}\}^t \{\bar{s}\}^{t'} [dD]^{(k)}}{H^{(k)t} + 3G^{(k)t+dt}} \right) (\{\varepsilon\}^t - \{\varepsilon^P\}^t - \{\varepsilon^T\}^t) + \quad (1) \\ & + \frac{3}{2\bar{\sigma}_i^t} \cdot \frac{[D]^{(k)t+dt} \{\bar{s}\}^t \frac{\partial \tilde{\sigma}_i^t}{\partial T}}{H^{(k)t} + 3G^{(k)t+dt}} dT \end{aligned}$$

з крайовими умовами для заданого статичного механічного навантаження за конкретних умов його закріплення. Крім крайових умов на поверхні  $\Gamma_0$ , яка обмежує тіло, задані умови спряження шарів на поверхнях  $\eta = \eta_k$ . Для жорстко зв'язаних шарів, коли виключаємо їх відрив і проковзування, ці умови записані в праці [4]. У формулі (1) використані позначення  $\{\varepsilon\}$ ,  $\{\varepsilon^P\}$ ,  $\{\varepsilon^T\}$  для векторів повної, пластичної та температурної деформацій Гріна [6];  $\{\sigma\}$  – для вектора напружень Піоли–Кірхгофа другого роду [6];  $\{\bar{s}\}$  – для вектора девіаторних компонент тензора напружень, віднесених до центра поверхні текучості у просторі напружень [7];  $\tilde{\sigma}_i$  – для інтенсивності напружень Коші;  $\bar{\sigma}_i = \sqrt{\frac{3}{2} \{\bar{s}\}^t \{\bar{s}\}^t}$  – для інтенсивності напружень  $\{\bar{s}\}$ . Матриці  $[D]$  і  $[dD]$  – матриці пружних сталей та їх приростів, пов'язаних зі зміною температури;  $H$  – поточне значення тангенса кута нахилу кривої деформування матеріалу;  $G$  – модуль пружності за зсуву. У векторних поданнях тензорних величин для деформацій компоненти тензора розміщені подібно, як у векторі  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}\}^t$ ; у векторних поданнях для напружень – як у векторі  $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^t$ , де “штрих” означає операцію транспонування. Верхні індекси  $t$ ,  $t + dt$  і  $(k)$  відносяться до величин для  $k$ -го шару в моменти деформування  $t$ ,  $t + dt$  відповідно.

Рівняння стану (1) [7] розвинули, використовуючи відомі результати [8], шляхом конкретизації похідних від лівої частини умови текучості. Нижче використовуємо модифіковану для ізотропно-кінематичного зміцнення умову текучості Мізеса [7], записану єдиним виразом у праці [9]:

$$\sqrt{\frac{3}{2} \{\bar{s}\}^t \{\bar{s}\}^t} = \sigma_T + \beta^* b (\varepsilon_i^{Pt})^m, \quad 0 \leq \beta^* \leq 1, \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\{\bar{s}\}^t &= \{\bar{\sigma}\}^t - \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}' \bar{\sigma}_0, & \{\bar{\sigma}\}^t &= \{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t, \\ \bar{\sigma}_0 &= \frac{1}{3} \{1, 1, 1, 0, 0, 0\} \left( \{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t \right).\end{aligned}$$

Тут  $\beta^*$ ,  $b$ ,  $m$  – параметри ізотропного зміцнення матеріалу;  $\varepsilon_i^{pt} = \sqrt{\frac{2}{3} \{\varepsilon^p\}' \{\varepsilon^p\}}$  – інтенсивність пластичних деформацій;  $\{\gamma\}$  – центр поверхні текучості, яку описує співвідношення (2) і яка обмежує в просторі напружень область пружного деформування. Зміщення центра  $\{\gamma\}$  поверхні текучості є параметром кінематичного зміцнення матеріалу і змінюється за правилом Ціглера [10]:

$$\{d\gamma\} = d\mu \left( \{\sigma\}^t - \{\gamma\}^t \right). \quad (3)$$

Явний вигляд множника  $d\mu$ , отриманий раніше [9] для критерію текучості (2), є аналогом відомого співвідношення [8], записаного в неявній формі. За певних властивих матеріалу значень параметрів  $\beta^*$ ,  $b$ ,  $m$  і змінних згідно з формулою (3) значень  $\{\gamma\}$  прогнозовані результати достатньо добре узгоджуються з експериментальною кривою деформування матеріалу [7]. Тому таке ізотропно-кінематичне наближення зміцнювальних властивостей матеріалу ( $\{\gamma\} \neq 0$  ( $t > 0$ ),  $0 < \beta^* \leq 1$ ) фізично обґрунтоване.

Сформульована задача описує нестационарні теплові процеси і їхній вплив та (або) вплив статичних механічних навантажень на механічні процеси у шаруватих пластично деформованих термочутливих зміцнюваних тілах зі сталими за фіксованої температури та в межах кожного шару тепломеханічними характеристиками.

**Методика розв'язування задач.** Запропонований наближений підхід до розв'язування задач базується на методі скінченних елементів (МСЕ). Програмне забезпечення для розв'язування двовимірних задач про напружено-деформований стан ґрунтується на принципі віртуальної праці [6].

МСЕ для фізично нелінійної задачі про визначення напружено-деформованого стану реалізується для апроксимованої за методом “кроків” лінеаризованої задачі [11]. Деякі принципові аспекти організації обчислювального процесу, зокрема формування послідовності апроксимованих за методом “кроків” задач, лінеаризація рівняння стану за методом змінних параметрів пружності або методом додаткових навантажень, конструювання лінеаризувального ітераційного процесу, отримання ключових рівнянь МСЕ відповідно до рівняння стану (1) висвітлені раніше [11, 12].

**Термомеханічні процеси у двошаровій сфері за охолодження.** Вивчали термомеханічний процес у порожнистій двошаровій сфері з теплоізолюваною внутрішньою поверхнею радіуса  $R_1$  та зовнішньою радіуса  $R_2$  (рис. 1). Сфера охолоджується від початкової однорідної температури  $T_0$  шляхом конвективного теплообміну зі середовищем через зовнішню поверхню.

Досліджували в сферичній системі координат  $(r, \theta, \varphi)$ . Поверхня  $\eta_1 = r_1 = (R_1 + R_2)/2$  розмежує перший зовнішній та другий внутрішній шари. Через симетричність геометричної конфігурації та умов навантаження розраховували в області  $\Omega_0$ , яка є четвертою частиною діаметрального перерізу сфери (рис. 1).

Розв'язували задачу теплопровідності за початкової умови  $T|_{t=0} = T_0$ . За термоізоляції внутрішньої поверхні, конвективного теплообміну через зовнішню

межу  $r = R_2$  і відсутності теплових потоків крізь межі  $\Gamma_{01}$  та  $\Gamma_{02}$  області  $\Omega_0$  крайові умови задачі теплопровідності мають вигляд

$$-\lambda_q^{(1)} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = \beta (T - T_A), \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi/2} = 0,$$

де  $\lambda_q^{(1)}$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу зовнішнього шару;  $\beta$  – коефіцієнт тепловіддачі;  $T_A$  – температура середовища. За ідеального теплового контакту неперервність температур при  $r = r_1$  та рівність теплових потоків через межу  $r = r_1$  описують співвідношення

$$T^{(1)} \Big|_{r=r_1} = T^{(2)} \Big|_{r=r_1},$$

$$\lambda_q^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \lambda_q^{(2)} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} \Big|_{r=r_1},$$

де  $\lambda_q^{(2)}$  – коефіцієнт теплопровідності внутрішнього шару;  $T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$  – температури у зовнішньому та внутрішньому шарах.

Для задачі про температурні напруження, спричинені цим тепловим процесом, крайові умови на перерізах  $\Gamma_{01}$ ,  $\Gamma_{02}$  (рис. 1) мають вигляд

$$u_\theta \Big|_{\theta=0} = 0, \quad u_\theta \Big|_{\theta=\pi/2} = 0,$$

а якщо  $r = R_1$  та  $r = R_2$ , тоді

$$\sigma_r \Big|_{r=R_1} = 0, \quad \sigma_r \Big|_{r=R_2} = 0,$$

що означає відсутність механічних навантажень на внутрішню та зовнішню поверхні сфери. Припускаючи, що шари жорстко зв'язані, умови на розмежувальній поверхні  $r = r_1$  запишемо так:

$$\{u\}^{(1)} \Big|_{r=r_1} = \{u\}^{(2)} \Big|_{r=r_1}, \quad \sigma_r^{(1)} \Big|_{r=r_1} = \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=r_1}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} \Big|_{r=r_1} = \sigma_{r\theta}^{(2)} \Big|_{r=r_1},$$

де індекси (1) та (2) стосуються переміщень та напружень у зовнішньому та внутрішньому шарах відповідно.

Розраховували термомеханічні стани для сфери із внутрішнім радіусом  $R_1 = 0,05$  м, зовнішнім  $R_2 = 0,1$  м. Зовнішній шар виготовлений зі сталі 0X13, внутрішній – зі сплаву ТС-5. Температура середовища  $T_A = 20^\circ\text{C}$ . На термочутливість цих матеріалів вказують відомі довідкові дані [13, 14]. Для сталі температурна залежність межі текучості  $\sigma_T$  проявляється у її лінійному пониженні від 96 МПа при  $20^\circ\text{C}$  [7] до 1 МПа при  $1000^\circ\text{C}$ . Сталими є питома об'ємна теплоємність  $C = 3592,44 \text{ kJ}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$  та коефіцієнт лінійного температурного розширення  $\alpha_T = 11,0\cdot 10^{-6}\cdot\text{K}$ . Параметри ізотропного зміцнення, що входять у праву частину умови текучості (2) [9], такі:  $\beta^* = 0,515$ ;  $b = 2208 \text{ МПа}$ ,  $m = 0,435$  [7]. Параметр кінематичного зміцнення  $\{\gamma\}^t \neq 0$  ( $t > 0$ ) визначає формула (3). Для сплаву питома

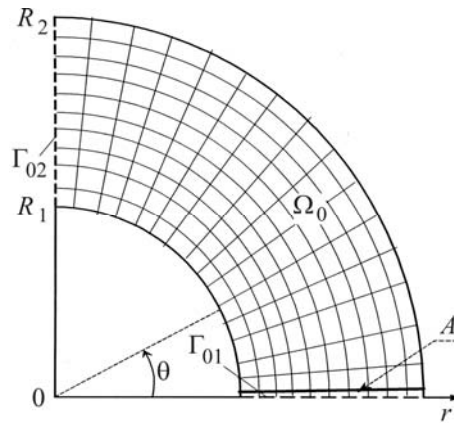


Рис. 1. Розрахункова область та скінченноелементна дискретизація.

Fig. 1. Calculated domain and finite element discretization.

об'ємна теплоємність стала і дорівнює  $2401 \text{ kJ}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$  [14]. Через відсутність довідкових даних сплав змодельовано як ідеальний пружно-пластичний.

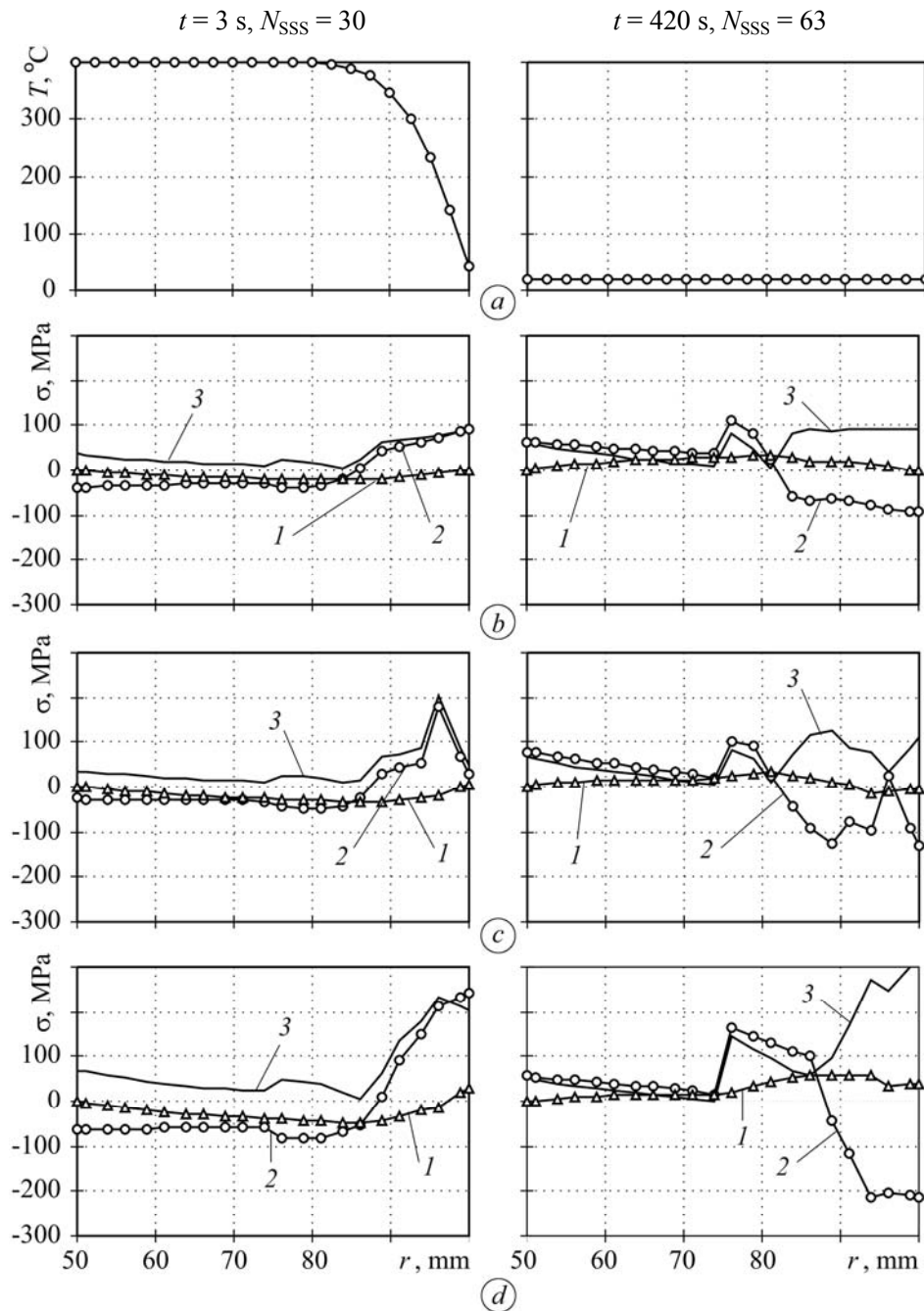


Рис. 2. Розподіл за радіальною координатою  $r$  температури (а) та напружень у двохшаровій сфері зі сталі 0X13 за моделювання матеріалу ідеальним (б), кінематично (с) та ізотропно-кінематично (д) зміцнюваним: 1, 2 – напруження  $\sigma_r$  і  $\sigma_\varphi \approx \sigma_\theta$ ; 3 – інтенсивність напружень  $\sigma_i$ ;  $\beta = 56 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ .

Fig. 2. Distribution by the radial coordinate  $r$  of temperature (a) and stresses in a two-layer sphere of 0X13 steel for modelling the material by ideal (b), kinematic (c) and isotropic-kinematic (d) hardened: 1 – stresses  $\sigma_r$  and  $\sigma_\varphi \approx \sigma_\theta$ ; 3 – stress intensity  $\sigma_i$ ;  $\beta = 56 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ .

Розв'язували задачу за дискретизації області  $\Omega_0$  сіткою зі 150 скінченних елементів (див. рис. 1). Сітка утворена перетином концентричних дуг радіальними прямими за рівномірного поділу відрізка  $[R_1, R_2]$  на 10 відрізків і рівномірного поділу кута  $[0, \pi/2]$  на 15 кутів. Для температури  $T_0 = 400^\circ\text{C}$  проаналізовано результати впливу на напружено-деформований стан нестационарного режиму охолодження сфери через поверхню  $r = R_2$  з коефіцієнтом тепловіддачі  $\beta = 56 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ . Розглянуті випадки модельного наближення матеріалу ідеальним пружно-пластичним, кінематично та ізотропно-кінематично зміцнюваним (рис. 2).

У результаті розв'язування задачі теплопровідності з початковим кроком за часом  $(\Delta t)_0 = 1 \text{ s}$  і укрупненими часовими кроками в подальших обчисленнях отримали за дискретизації на  $N_T = 680$  кроків нестационарне віднесення до вузлів скінченноелементної сітки температурне поле. Тривалість теплового процесу  $t^* = 7 \text{ min}$ . Наприкінці реалізується практично рівномірний розподіл температури  $T \approx 20^\circ\text{C}$ . Укрупнення інтервалів часу зі зменшенням градієнтності температурного поля пов'язане із недоцільністю більшої кількості розрахунків зі збереженням приблизно такої ж точності. Результати розрахунку температурного поля проілюстровані для моменту  $t = 3 \text{ s}$  та кінцевого  $420 \text{ s}$ . Інформація про тепловий режим у вигляді розподілів температури для дискретних моментів часу є вхідною для задачі про напруження.

Задачу теплопровідності і задачу визначення напружено-деформованого стану розв'язували за різної дискретизації часу охолодження. Розрахункові температурні напруження отримані впродовж  $N_{SSS} = 63$  кроків, для яких прирости часу є більші, ніж для задачі теплопровідності. Укрупнювали проміжки часу, щоб забезпечити вищу швидкість обчислень за збереження точності. Отримали розподіл напружень у сфері, поданий на рис. 2, вздовж перерізу А (рис. 1), який перетинає точки інтегрування скінченних елементів.

Встановлено, що за цих умов охолодження пластичне деформування матеріалу починається на початкових кроках і спричинене високими градієнтами температур в околі поверхні  $r = R_2$ . Суттєві напруження локалізовані в цій зоні як для ідеальних матеріалів, так і для модельованих наближень зміцнювальних властивостей. Однак для ідеальних матеріалів вони є найменшими, а для ізотропно-кінематично зміцнюваного – найбільшими (рис. 2). Результати на основі моделі ізотропно-кінематичного зміцнення фізично обґрунтованіші, оскільки узгоджуються з експериментальними кривими деформування матеріалів. В околі поверхні розмежування  $r = r_1$  характер поведінки напруженого стану помітно змінюється, і суттєвіше – для залишкових напружень, набутих внаслідок повного охолодження. Однак максимальні залишкові напруження, локалізовані поблизу зовнішньої поверхні, є стискальними і тому менш небезпечні, ніж розтягальні залишкові в зоні контакту шарів (рис. 2).

## ВИСНОВКИ

Сформульовано задачу термомеханіки для неоднорідних, у т. ч. шаруватих, пластично деформованих термочутливих зміцнюваних тіл. Розроблено наближену методику її розв'язання та відповідне програмне забезпечення. Встановлено закономірності виникнення напруженого стану у двошаровій сфері за швидкого охолодження через зовнішню поверхню від початкової температури  $400^\circ\text{C}$  до температури середовища. Ці закономірності полягають у помітній зміні напружень в околі поверхні розмежування  $r = r_1$  та формуванні значних стискальних напружень поблизу поверхні  $r = R_2$  з інтенсивною віддачею тепла.

**РЕЗЮМЕ.** Предложен подход к исследованию термомеханических состояний в слоистых пластически деформируемых термочувствительных телах произвольной геометрической конфигурации с произвольной ориентацией поверхностей разграничения слоев. Он базируется на формулировании задачи нестационарной теплопроводности, задачи теории пластического неизоэтермического течения, расчетных схемах метода конечных элементов и соответствующем программном обеспечении. Изучено термомеханическое поведение двухслойной сферы при быстром охлаждении от начальной однородной температуры.

**SUMMARY.** The approach to investigation of the thermomechanical states in the layered plastic deformable thermal sensitive solids with arbitrary geometric configuration and arbitrary orientation of the layers delimiting surfaces is proposed. The approach is based on the formulation of the nonstationary heat conductivity problem, the problem of plastic non-isothermal yielding, computation finite element schemes and suitable software. The thermomechanical behaviour of the two-layer sphere under quick cooling from the initial temperature is investigated.

**Дослідження виконано за часткової фінансової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень (проект № Ф41.2/001).**

1. *Fiolka M. and Matzenmiller A.* On the resolution of transverse stresses in solid-shells with a multi-layer formulation // *Communications in Numerical Methods in Engng.* – 2007. – **23**, № 4. – P. 313–326.
2. *Григоренко Я. М., Будаков В. Д., Григоренко О. Я.* Розв’язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів: Навч. пос. – Миколаїв: Іліон, 2010. – 294 с.
3. *Феденко В. И.* Неупругая деформация многослойного материала при растяжении вдоль его слоев // *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* Зб. наук. пр. Дніпропетр. нац. ун-ту. – Дніпропетровськ, 2011. – Вип. 17. – С. 254–260.
4. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Задачи теории упругости неоднородных тел / Отв. ред. В. Г. Карнаухов. – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.
5. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. – К.: Вищ. шк., 1975. – 216 с.
6. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
7. *Морозов Е. М., Никишков Г. П., Черныш Т. А.* Неизоэтермическая модель упругопластического тела с комбинированным законом упрочнения и ее применение для МКЭ-расчета тел с трещинами // *Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости.* – Свердловск: Уральск. науч. центр АН СССР, 1986. – С. 87–94.
8. *Allen D. H. and Haisler W. E.* A theory for analysis of thermoplastic materials // *Comput. & Struct.* – 1981. – **13**, № 1. – P. 129–135.
9. *Гачкевич О. Р., Михайлишин В. С.* Математичне моделювання і дослідження напруженого стану тіл у процесі охолодження при високотемпературному відпалі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2004. – **47**, № 3. – С. 186–198.
10. *Ziegler H.* A modification of Prager’s hardening rule // *Quart. Appl. Math.* – 1959. – **17**. – P. 55–65.
11. *Михайлишин В. С.* Ітераційні процедури для задач неізотермічної пружно-пластичності з ізотропно-кінематичним зміцненням // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 1999. – **35**, № 4. – С. 102–112.  
(*Mykhailyshyn V. S.* Iterative procedures for problems of nonisothermal elastoplasticity with isotropic kinematic hardening // *Materials Science.* – 1999. – **35**, № 4. – P. 561–571.)
12. *Гачкевич О., Михайлишин В., Равська-Скотнічна А.* Числова методика розв’язування задач термомеханіки тіл у разі охолодження в процесі високотемпературного відпалювання // *Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика.* – 2007. – Вип. 12. – С. 78–92.
13. *Францевич И. Н., Воронов Ф. Ф., Бакута С. А.* Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов: Справ. / Под ред. И. Н. Францевича. – К.: Наук. думка, 1982. – 288 с.
14. *Лившиц Б. Г., Крапошин В. С., Липецкий Я. Л.* Физические свойства металлов и сплавов. – М.: Металлургия, 1980. – 320 с.

*Одержано 18.12.2012*