УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ДВОВИМІРНИХ КОМПОЗИТНИХ ТІЛ З ТРІЩИНАМИ

В. М. ЗЕЛЕНЯК

Національний університет "Львівська політехніка"

Наведено короткий огляд досліджень застосування методу сингулярних інтегральних рівнянь для розв'язання двовимірних задач механіки для тіл з тріщинами. Особливу увагу звернено на стаціонарні задачі теплопровідності і термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами.

Ключові слова: *включення, тріщина, температурне поле, метод сингулярних інтегральних рівнянь, коефіцієнт інтенсивності напружень.*

Під час експлуатації елементи багатьох конструкцій часто працюють в умовах нерівномірного нагрівання, що призводить до появи внутрішніх температурних напружень. У разі кусково-однорідних тіл навіть рівномірний розподіл температури може сприяти їх виникненню внаслідок неоднакових коефіцієнтів лінійного теплового розширення компонент тіла. Температурні напруження самі чи в поєднанні із зовнішніми механічними напруженнями у низці випадків можуть спричинити утворення нових і ріст вже існуючих тріщин, тобто призвести до локального або повного руйнування конструкцій чи їх елементів. Тому важливе теоретичне і практичне значення має вивчення розподілу температурних напружень біля вершин тріщин у твердих тілах. Такі дослідження використовують для розрахунків міцності з позицій механіки руйнування та оцінки роботоздатності і довговічності елементів конструкцій з тріщинами. Реалізація цих досліджень в умовах плоскої задачі термопружності значною мірою полегшується завдяки розробці методу сингулярних інтегральних рівнянь (СІР), одному з найзручніших для практичної реалізації. СІР часто застосовують у дослідженнях напруженого стану тіл з тріщинами. Спочатку їх використовували лише для найпростіших прямолінійних та дугоподібних розрізів. Суттєвим кроком уперед стала побудова таких рівнянь для системи довільно розміщених прямолінійних тріщин у пружній площині [1, 2]. Це дало змогу отримати числові та аналітичні розв'язки для плоских і антиплоских задач теорії пружності, стаціонарних задач теплопровідності та термопружності, задач згину тонких пластин і пологих оболонок для областей з розрізами [3]. Пізніше ці результати узагальнили для криволінійних розрізів-тріщин [4] та багатозв'язних областей з отворами і розрізами довільної конфігурації [5]. Однак для кусково-однорідних тіл з тріщинами (розрізами) задачі термопружності ще мало досліджені, зокрема, майже немає розв'язків за некругових (зокрема еліптичних) включень і особливо для багатокомпонентних тіл з тріщинами.

Плоскі задачі теплопровідності та термопружності для напівнескінченного тіла з включеннями і тріщинами. Двовимірні задачі термопружності для напівнескінченних тіл з тріщинами вже розглядали раніше, зокрема, методом СІР досліджували плоский термопружний стан у півпросторі, який нагрівається локально на частині його вільної поверхні тепловим потоком і містить внутрішню чи

Контактна особа: В. М. ЗЕЛЕНЯК, e-mail: v.zelenyak@yandex.ua

крайову довільно орієнтовану прямолінійну тріщину або періодичну систему таких тріщин [6–10]. Нижче вивчено плоску задачу для кусково-однорідних тіл з тріщинами.

Нехай напівнескінченне тіло (півпростір) складається із матриці S і циліндричних макровключень S_n, у яких поперечні перетини поверхонь є гладкими замкненими контурами $L_n (n = \overline{1, M})$. Тіло послаблене N–M криволінійними розрізами $L_n (n = \overline{M+1, N})$, які можуть бути як в матриці, так і у включеннях. Вважаємо, що всі контури $L_n (n = \overline{1, N})$ не мають спільних точок.

Розглянемо задачу теплопровідності, коли на замкнених контурах включень L_n існують умови теплового контакту

$$\lambda_n \frac{\partial T^+}{\partial n} = \lambda \frac{\partial T^-}{\partial n}, \qquad T^+ - T^- = 2\gamma_n(t_n), \qquad t_n \in L_n, n = \overline{1, M}, \tag{1}$$

а на берегах тріщин і на краю півплощини L_0 задано теплові потоки

$$\lambda_n^* \frac{\partial T^\pm}{\partial n} = \omega_n(t_n) \pm i\mu_n(t_n), \qquad t_n \in L_n, \; n = \overline{M+1, N}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \omega_0(t_0), \qquad t_0 \in L_0, \tag{3}$$

де n – зовнішня нормаль до замкненого контуру $L_n (n = \overline{1, M})$ або до лівого берега розрізу $L_n (n = \overline{M+1, N})$; λ, λ_n – коефіцієнти теплопровідності матриці і включення S_n, відповідно; t_n – комплексні координати точок на контурах L_n у локальних системах координат; $T(x, y)$ – температура; s_n – дугова абсциса точки t_n; $\lambda_n^* = \lambda$, якщо розріз L_n в матриці; $\lambda_n^* = \lambda_n$, якщо L_n у включенні S_n. Індекси "+" і "–" вказують на граничні значення відповідних величин зліва і справа від контуру L_n, коли $t \to t_n^\pm$.

Сумарний тепловий потік, який виходить через контур $L = L_0 + UL_n$ $(n = \overline{M+1, N})$, вважаємо рівним нулю:

$$2 \cdot \sum_{n=M+1}^{N} \int_{L_n} \mu_n(t_n)\, ds_n + \int_{L_0} \omega_0(t_0)\, ds_0 = 0. \tag{4}$$

Зобразимо загальну температуру $T(x, y)$ в кусково-однорідному півпросторі з розрізами у вигляді суми $T(x, y) = T_0(x, y) + T^*(x, y)$, де $T_0(x, y)$ – температура в однорідному півпросторі без тріщин; $T^*(x, y)$ – збурене температурне поле, викликане включеннями і тріщинами. Температуру $T(x, y)$ подамо у вигляді $T(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z)$, де $f(z)$ – аналітична функція комплексної змінної $z = x + iy$. Узагальнюючи комплексний потенціал температури $F(z) = f'(z)$ для однорідних півплощини з тріщинами та скінченної області з отворами [11], виберемо його для кусково-однорідного тіла у вигляді [12]

$$F(z) = F_0(z) + \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^{N} \int_{L_k} \left[\frac{H_k(t_k)dt_k}{\zeta_k - z} - \frac{\overline{H_k(t_k)dt_k}}{\overline{\zeta}_k - z} \right] - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0(t_0)dt_0}{t_0 - z} \tag{5}$$

де $H_k(t_k) = \gamma'_k(t_k) + i\mu_k(t_k)e^{-i\theta_k}$; $\varsigma_k = t_k e^{i\alpha_k} + z_k^0$; $e^{i\theta_k} = \dfrac{dt_k}{ds_k}$; θ_k – кут між дотатною дотичною до контуру L_k в точці t_k і віссю $O_k x_k$; α_k – кут між віссю Ox та $O_k x_k$, потенціал $F_0(z)$ відповідає температурі $T_0(x, y)$. Тут і далі штрихом позначено похідну, а рискою зверху – спряжену величину.

Задовольнивши крайові умови (1), (2) з використанням потенціалу (5), одержимо систему N сингулярних інтегральних рівнянь першого і другого роду відносно N невідомих функцій $\mu_k (k=\overline{1,M})$ і $\gamma'_k (k=\overline{M+1,N})$ [12]

$$\operatorname{Im}\left[H_n(\tau_n)e^{i\beta_n}\right]-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{L_k}\operatorname{Im}\left[K_{nk}(t_k,\tau_n)H_k(t_k)dt_k-L_{nk}(t_k,\tau_n)\overline{H_k(t_k)dt_k}\right]=$$

$$=\Delta_n\operatorname{Im}\left\{\left[(F_0(\eta_n)-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_0(\tau_0)d\tau_0}{t_0-\eta_n})\right]e^{i(\beta_n+\alpha_n)}\right\};\quad \tau_n\in L_n,\quad n=\overline{1,M}, \qquad (6)$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{L_k}\operatorname{Im}\left[K_{nk}(t_k,\tau_n)H_k(t_k)dt_k-L_{nk}(t_k,\tau_n)\overline{H_k(t_k)dt_k}\right]=\omega_n(\eta_n);\quad n=\overline{M+1,N},$$

де $\delta_n=\begin{cases}1, & n=\overline{1,M}\\ 0, & n=\overline{M+1,N}\end{cases}$; $\eta_n=\tau_n e^{i\alpha_n}+z_n^0$; $e^{i\beta_n}=\dfrac{d\tau_n}{ds_n}$; $K_{nk}(t_k,\tau_n)=\dfrac{\Delta_n e^{i(\beta_n+\alpha_n)}}{i(\zeta_k-\eta_n)}$;

$L_{nk}(t_k,\tau_n)=\dfrac{\Delta_n e^{i(\beta_n+\alpha_n)}}{i(\bar{\zeta}_k-\eta_n)}$; $\Delta_n=(\dfrac{\lambda_n-\lambda}{\lambda_n+\lambda}-1)\delta_n+1$.

Для системи рівнянь (6) з довільною правою частиною існує єдиний розв'язок у класі функцій, які мають на кінцях розрізів інтегровні особливості, за умов

$$\int_{L_n}\gamma'_n(t_n)dt_n=0,\ n=\overline{M+1,N}, \qquad (7)$$

що забезпечують неперервність температури за обходу контурів тріщин.

Вище розглянули задачу теплопровідності, коли на межі області та тріщинах заданий тепловий потік. Аналогічно, за використання відповідного комплексного потенціалу температури можна одержати систему СІР, коли на вказаних контурах задана температура [12].

У задачі термопружності вважаємо, що пружний півпростір з включеннями та тріщинами перебуває під дією стаціонарного температурного поля $T(x, y)$, на поверхнях з'єднання матеріалів матриці та включень виконуються умови спряження (напруження неперервні, а переміщення мають розрив)

$$[N(t_n)+iT(t_n)]^+=[N(t_n)+iT(t_n)]^-,$$

$$(u_n+iv_n)^+-(u_n+iv_n)^-=g_n^*(t_n),\quad t_n\in L_n,\ n=\overline{1,M}, \qquad (8)$$

а береги тріщин під час деформації не контактують і на них задане самозрівноважене навантаження

$$[N(t_n)+iT(t_n)]^{\pm}=p_n^*(t_n),\ n=\overline{M+1,N}, \qquad (9)$$

де $N(t_n)$, $T(t_n)$ – нормальна і дотична компоненти напружень; u_n, v_n – компоненти переміщень. Вважаємо також, що поверхня півпростору вільна від силових навантажень, а температура і напруження на безмежності відсутні. Задачу розглянемо для плоскої деформації тіла.

Подібно, як і в задачі теплопровідності, інтегральні зображення комплексних потенціалів напружень $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ виберемо [12] на основі узагальнення відомих комплексних потенціалів для однорідних півплощини з тріщинами і скінченної області з отворами [11]. Задовольнивши з їх допомогою крайові умові (8), (9), одержимо систему N сингулярних інтегральних рівнянь першого і другого роду відносно N невідомих функцій $Q_k(t_k)$ [12]

$$A_nQ_n(\tau_n)+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{L_k}\left[R_{nk}(t_k,\tau_n)Q_k(t_k)dt_k+S_{nk}(t_k,\tau_n)\overline{Q_k(t_k)dt_k}\right]=P(\tau_n),$$

$$\tau_n\in L_n,\ n=\overline{1,M}.$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{L_k}\left[R_{nk}(t_k,\tau_n)Q_k(t_k)dt_k+S_{nk}(t_k,\tau_n)\overline{Q_k(t_k)dt_k}\right]=p_n^*(\eta_n)\,,\ n=\overline{M+1,N}\,,(10)$$

де ядра $R_{nk}(t_k,\tau_n)$ і $S_{nk}(t_k,\tau_n)$ визначені раніше [12], $P(\tau_n)=[\Gamma_n\beta^t f^-(\eta_n)-$ $-\beta_n^t f^+(\eta_n)]+2G_n g_n^{*'}(\eta_n)$, $A_n=i[1+\chi_n+\Gamma_n(1+\chi)]/2$, $\Gamma_n=G_n/G$,

$$Q_k(t_k)=\begin{cases} g_k(t_k),\ t_k\epsilon L_k,\ k=\overline{1,M}; \\ g_k^{'}(t)+\dfrac{i\beta_*}{1+\chi_*}\left[f^+(t_k)-f^-(t_k)\right],\ t_k\epsilon L_k,\ k=\overline{M+1,N}, \end{cases}$$

$\chi=3-4\mu$, $\beta^t=\alpha^t E$ ($\chi_n=3-4\mu_n$, $\beta_n^t=\alpha_n^t E_n$, $n=\overline{1,M}$) – для плоскої деформації; α^t, E, μ, G (α_n^t, E_n, μ_n, G_n) – коефіцієнт лінійного теплового розширення, модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, модуль зсуву матриці (включення), відповідно. $f^{\pm}(t_k)$ – граничне значення потенціалу $f(z)$ на контурі L_k.

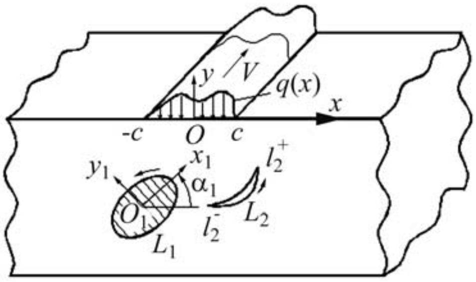

Рис. 1. Геометрія півпростору з включенням і тріщиною.

Fig. 1. Geometry of a half-space containing an inclusion and a crack.

Для системи рівнянь (10) з довільною правою частиною існує єдиний розв'язок у класі функцій, які мають на кінцях розрізів інтегровні особливості, за умов

$$\int_{L_k} g_k^{'}(t_k)dt_k=0\,,\ k=\overline{M+1,N}\,,\quad (11)$$

що забезпечують однозначність переміщень за обходу контурів тріщин.

Коефіцієнти інтенсивності напружень, які характеризують напружено-деформований стан в околі вершин тріщин, знаходимо за формулою

$$K_{\mathrm{I_k}}^{\pm}-iK_{\mathrm{II_k}}^{\pm}=\mp\lim_{t_k\to l_k^{\pm}}\left[\sqrt{2\pi\,|\,t_k-l_k^{\pm}\,|}Q_k(t_k)\right],\quad k=\overline{M+1,N}\ ,$$

де дійсні величини $K_{\mathrm{I_k}}^{\pm}$ і $K_{\mathrm{II_k}}^{\pm}$ з індексом "–" відповідають початку тріщини ($t_k=l_k^-$), а з індексом "+" – кінцю ($t_k=l_k^+$).

На основі інтегральних рівнянь знайдено методом механічних квадратур [5] числові розв'язки плоских задач теплопровідності і термопружності для півпростору з циліндричним включенням еліптичного або кругового профілю та тріщиною (рис. 1), який перебуває в умовах локального нагріву поверхні тепловим потоком [12, 13]. Зі застосуванням апарату СІР побудували також інтегральні рівняння теплопровідності та термопружності для різних задач, а саме: скінченна [14] та нескінченна [15] кусково-однорідна площина з криволінійними тріщинами, дві спаяні різнорідні півплощини з включеннями і тріщинами [16], періодична система включень та тріщин [17]. Аналогічні задачі теорії пружності дослідили раніше [18, 19]. Методом функцій комплексної змінної отримали інтегро-диференційні рівняння задачі теплопровідності та СІР задачі термопружності для площини або півплощини з круговим включенням, послабленим термоізольованими чи теплопроникними тріщинами [20, 21] та термічними циліндричними включеннями і тріщинами [22].

Плоскі задачі термопружності та пружності для трикомпонентних тіл з тріщинами. В цих задачах застосували підхід, який дає змогу понизити порядок вихідної системи СІР за колової або прямолінійної лінії поділу неоднорідних матеріалів. Це дає можливість ефективніше знаходити їх числовий розв'язок, а також порівняно легко розглянути тріщини, які виходять на край кругового отвору.

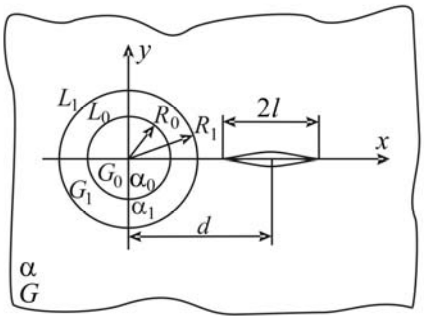

Рис. 2. Fig. 2.

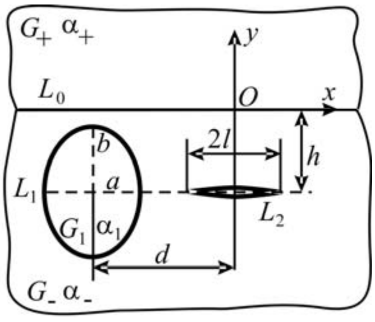

Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 2. Геометрія площини з двокомпонентним круговим включенням і тріщиною.

Fig. 2. Geometry of the plane containing a two-component circular inclusion and a crack.

Рис. 3. Геометрія спаяних різнорідних півплощин з включенням і тріщиною.

Fig. 3. Geometry of the bonded heterogeneous half-planes containing an inclusion and a crack.

Нехай нескінченне тіло (площина) складається з пружної матриці S та двокомпонентного включення, обмеженого гладкими контурами L_0 і L_1 відповідно. При цьому S_0 є кругове включення (диск) радіуса R_0, S_1 – кругове кільце з внутрішнім і зовнішнім радіусами R_0 і R_1 зі спільним центром на початку координат xOy (рис. 2). Матриця містить тріщини $L_n \ \ (n = \overline{2, N})$. Вибравши інтегральні зображення комплексних потенціалів температури та напружень, в яких враховано точне задоволення умов спряження на круговому контурі L_0, і задовольнивши крайові умови на замкненому L_1 (включення) та розімкнених $L_n \ \ (n = \overline{2, N})$ (тріщини) контурах, одержимо систему модифікованих СІР виду (6) і (10) відповідних задач теплопровідності і термопружності, в яких виключені невідомі функції на круговому контурі L_0. Таким підходом із використанням методу механічних квадратур [5] отримали числові розв'язки задач термопружності для нескінченної площини з двокомпонентним включенням і тріщиною (рис. 2) та спаяних різнорідних півплощин з еліптичним включенням і тріщиною в одній з них (рис. 3) за сталої рівномірної температури у всій області [23–25], а також для двошарового кільця з крайовою тріщиною [26]. Аналогічні задачі теорії пружності цим методом розглянули раніше [27–29]. Метод СІР є також ефективним під час дослідження плоского термопружного стану в обмеженій або напівобмеженій області з тріщиною, зумовленого джерелом тепла. Зокрема, цим методом розв'язано задачі теплопровідності та термопружності для кругового диска з центральною або крайовою тріщиною [30, 31] чи півплощини з крайовою тріщиною [32]. Відзначимо, що розв'язки плоскої стаціонарної задачі теплопровідності для тіл з тріщинами можна застосовувати також для вивчення інших стаціонарних процесів, наприклад, для визначення полів переміщень і напружень у тілах з включеннями і тріщинами за повздовжнього зсуву [33], оскільки ці задачі аналогічні.

РЕЗЮМЕ. Приведен краткий обзор исследований по применению метода сингулярных интегральных уравнений для решения двумерных задач механики для тел с трещинами. Особое внимание уделено стационарным задачам теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородных тел с трещинами.

SUMMARY. A brief survey of investigations on application of the singular integral equations method to solving two-dimensional problems of mechanics for bodies with cracks is pre-

sented. A special attention is given to the case of steady heat conductivity and thermoelasticity for piecewise-homogeneous bodies with cracks.

1. *Дацышин А. П., Саврук М. П.* Система произвольно ориентированных трещин в упругих телах // Прикл. математика и механика. – 1973. – **37**, № 2. – С. 326–332.
2. *Дацышин А. П., Саврук М. П.* Интегральные уравнения плоской задачи теории трещин // Там же. – 1974. – **38**, № 4. – С. 728–737.
3. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
4. *Саврук М. П.* О построении интегральных уравнений двумерных задач теории упругости для тела с криволинейными трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1976. – **12**, № 6. – С. 111–113.
5. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
6. *Конечны С., Евтушенко А., Зеленяк В.* Влияние формы распределения фрикционного теплового потока на напряженное состояние полупространства с приповерхностным разрезом // Трение и износ. – 2002. – **23**, № 2. – С. 115–119.
7. *Конечны С., Евтушенко А., Зеленяк В.* Фрикционный нагрев полупространства с краевыми трещинами // Там же. – 2001. – **22**, № 1. – С. 39–45.
8. *Евтушенко А. А., Зеленяк В. М.* Тепловая задача трения для полупространства с трещиной // Инж.-физ. журнал. – 1999. – **72**, № 1. – С. 164–169.
9. *Matysiak S., Yevtushenko A., and Zelenjak V.* Frictional heating of a half-space with cracks. I. Single or periodic system of subsurface cracks // Tribology Int. – 1999. – **32**. – P. 237–243.
10. *Matysiak S., Yevtushenko A., and Zelenjak V.* Frictional heating of a half-space with an adge crack // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 2. – С. 127–134.
11. *Панасюк В. В., Саврук М. П.* Плоские задачи теплопроводности и термоупругости для тел с трещинами // Успехи механики. – 1984. – **7**, № 2. – С. 75–115.
12. *Зеленяк В. М., Євтушенко О. О.* Інтегральні рівняння стаціонарних задач теплопровідності і термопружності для півпростору з циліндричними включеннями та криволінійними тріщинами // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 140–146.
13. *Матисяк С. Й., Євтушенко О. О., Зеленяк В. М.* Нагрівання півпростору з включенням і тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 4. – С. 34–40.

    (*Matysiak S. I., Evtushenko O. O., Zeleniak V. M.* Heating of a half-space containing an inclusion and a crack // Materials Science. – 2004. – **40**, № 4. – P. 467–474.)
14. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Плоская задача теплопроводности и термоупругости для конечного кусочно-однородного тела с трещинами // Там же. – 1987. – **23**, № 5. – С. 70–78.

    (*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* The plane problem of thermal conductivity and thermal elasticity for a finite piecewise uniform body with cracks // Materials Science. – 1987. – **23**, № 5. – P. 502–510.)
15. *Саврук М. П., Зеленяк В.М.* Сингулярные интегральные уравнения плоских задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородной плоскости с трещинами // Там же. – 1986. – **22**, № 3. – С. 82–88.

    (*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* Singular integral equations of plane problems of thermal conductivity and thermoelasticity for a piecewise-uniform plane with cracks // Materials Science. – 1986. – **22**, № 3. – P. 297–307.)
16. *Зеленяк В. М., Саврук М. П.* Периодическая задача термоупругости для кусочно-однородной плоскости с криволинейными разрезами // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. – 1988. – № 1. – С. 133–139.
17. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Плоская задача теплопроводности и термоупругости для двух спаянных разнородных полуплоскостей с криволинейными включениями и трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1988. – **24**, № 2. – С. 23–28.

    (*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* Plane problem of thermal conductivity and thermal elasticity for two joined dissimilar half-planes with curved and cracks // Materials Science. – 1988. – **24**, № 2. – P. 124–129.)
18. *Саврук М. П., Тимошук М. В.* Плоская задача теории упругости для кусочно-однородной полубесконечной пластины с упругими включениями и трещинами // Там же. – 1987. – **23**, № 2. – С. 55–61.

(*Savruk M. P. and Tymoshuk N. V.* The plane problem of the theory of elasticity for a piesewise-uniform semiinfinite plate with elastic inclusions and cracks // Materials Science. – 1987. – **23**, № 2. – P. 160–165.)

19. *Саврук М. П., Тимошук Н. В.* Сингулярные интегральные уравнения плоской задачи теории упругости для бесконечного кусочно-однородного тела с трещинами // Там же. – 1984. – **20**, № 6. – С. 73–79.

(*Savruk M. P. and Tymoshuk N. V.* Singular integral equations of the plane problems of the theory of elasticity for an infinite piesewise-uniform body with cracks // Materials Science. – 1984. – **20**, № 6. – P. 574–579.)

20. *Кит Г. С., Зашкильняк И. М.* Термоупругое состояние плоскости с круговым включением, ослабленным трещинами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1976. – № 7. – С. 630–633.
21. *Зашкильняк И. М.* Термоупругое состояние полуплоскости с включением и криволинейными трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – № 22. – С. 60–65.
22. *Кіт Г.* С., *Черняк М. С.* Напружений стан тіл з термічними циліндричними включеннями та тріщинами (плоска деформація) // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 3. – С. 30–37.

(*Kit H. S., Chernyak M. S.* Stressed state of bodies with thermal cylindrical inclusions and cracks (plane deformation) // Materials Science. – 2010. – **46**, № 3. – P. 315–324.)

23. *Зеленяк В., Слободян Б.* Моделювання термопружного двовимірного стану спаяних різнорідних півплощин із включеннями та тріщинами // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 94–101.
24. *Зеленяк В., Мартиняк Р., Слободян Б.* Температурні напруження у кусково-однорідній трикомпонентній області з тріщиною // Машинознавство. – 2007. – № 11. – С. 13–17.
25. *Зеленяк В. М.* Термопружна взаємодія двокомпонентного кругового включення і тріщини в пластині // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 3. – С.40–45.

(*Zelenyak V. M.* Thermoelastic interaction of a two-component circular inclusion with a crack in the plate // Materials Science. – 2012. – **48**, № 3. – P. 301–307.)

26. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Термопружний стан двокомпонентного порожнистого циліндра з крайовими радіальними тріщинами // Там же. – 1994. – **30**, № 4. – С.76–80.

(*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* Thermoelastic state of a two-component hollow cylinder with edge radial cracks // Materials Science. – 1994. – **30**, № 4. – P. 470–474.)

27. *Зеленяк В., Мартиняк Р., Слободян Б.* Напруження в спаяних різнорідних півплощинах з включенням і тріщиною за дії розтягу // Вісник НУ “Львівська політехніка”. Фізико-математичні науки. – 2008. – № 625. – С. 54–58.
28. *Xiao Z. M. and Chen B. J.* Stress intensity factor for a Griffith crack interacting with a coated inclusion // Int. J. Fract. – 2001. – **108**. – P. 193–205.
29. *Зеленяк В., Слободян Б.* Напруження в пластині з тріщиною і двокомпонентним круглим включенням за дії розтягу // Машинознавство. – 2007. – № 2. – С. 23–26.
30. *Зеленяк В. М.* Температурні напруження в круглій пластині з центральною тріщиною, зумовлені джерелом тепла // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. – **30**, № 2. – С.125–127.

(*Zelenyak V. M.* Temperature stresses in a circular plate with a central crack induced by a heat source // Materials Science – 1994. – **30**, № 2. – 272–275.)

31. *Зеленяк В. М., Лібацький Л. Л.* Термопружний стан круглого диску чи півплощини, послаблених крайовою тріщиною, зумовлений точковим джерелом тепла // Вісник держ. ун-ту “Львівська політехніка”. Диференціальні рівняння та їх застосування. – 1995. – № 286. – С.56–61.
32. *Матысяк С. Я., Евтушенко А. А., Зеленяк В. М.* Термоупругое состояние полубесконечной пластинки с краевой трещиной, обусловленное источником тепла // Инж.-физ. журнал. – 2003. – **76**, № 2. – С. 134–137.
33. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Продольный сдвиг кусочно-однородного тела с криволинейными разрезами // Физ.-хим. механика материалов. – 1984. – **20**, № 5. – С. 72–77.

(*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* Longitudinal shear of a piecewise-uniform body with curvilinear incisions // Materials Science. – 1984. – **20**, № 5. – P. 473–478.)

Одержано 03.07.2013