

ВПЛИВ ДИФУЗІЇ АТОМІВ НА ФОРМУ ЛІНІЇ ТЕМНОГО РЕЗОНАНСУ У ПРОСТОРОВО ОБМЕЖЕНИХ ЛАЗЕРНИХ ПОЛЯХ

В.І. РОМАНЕНКО,¹ О.В. РОМАНЕНКО,² Л.П. ЯЦЕНКО¹

¹Інститут фізики НАН України

(Просп. Науки, 46, Київ 03680; e-mail: vr@iop.kiev.ua)

²Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

(Просп. Академіка Глушкова, 2, корп. 1, Київ 03022)

УДК 535.372
© 2010

Запропоновано дифузійну модель для недавно відкритого дифузійно-індукованого звуження Рамзея, що виникає під час дифузії атомів у комірці з буферним газом у полі лазерного випромінювання. Рівняння дифузії для когерентності метастабільних станів, пов'язаних зі збудженим станом лазерним випромінюванням різної частоти у трирівневій схемі взаємодії атома з полем, отримано у наближенні сильних зіткнень. Досліджено залежність форми лінії поглинання поблизу максимуму пропускання випромінювання однієї з частот від відстроювання від двофотонного резонансу для різних геометричних конфігурацій комірки.

1. Вступ

У трирівневій системі, де діють два лазерних поля, що зв'язують два метастабільних стани (чи метастабільний і стабільний стани) зі збудженим станом, можливе формування темного, або непоглинаючого світла стану – когерентної суперпозиції двох метастабільних станів. Таке явище називається когерентним полоненням населеності (КПН). Умова формування КПН-стану – двофотонний резонанс при взаємодії атома зі світлом, коли різниця частот двох лазерних полів дорівнює частоті переходу між метастабільними станами. Якщо цю умову дотримано, спостерігається різке зменшення інтенсивності флуоресценції атома у полі лазерного випромінювання [1–3]. Завдяки явищу когерентного полонення населеності можна створити вікно прозорості спектра поглинання. У результаті можливе поширення світла майже без втрат через середовище, що за звичайних умов поглинає світло – відоме явище електромагнітно-індукованої прозорості (ЕПП) [4]. Крім того, темні резонанси використовуються для сповільнення світла [5], у побудові компактних лазерних стандартів частоти [6], вони лежать в основі ефективного методу перенесення населеності між різними станами атомів чи

молекул – стимульованого раманівського адіабатичного проходження (СТИРАП) [7]. Ширина резонансу залежить як від швидкості декогерентності нижніх станів, так і від інших факторів, зокрема, характеру руху атомів у комірці з буферним газом. На останньому і буде зосереджено увагу в цій роботі.

Коли атоми рухаються крізь лазерний промінь скінченної ширини, роль часу когерентності відіграє час перебування атома у полі. Якщо, крім активних атомів, у комірці є буферний газ, час перебування атомів у лазерному промені збільшується. У результаті в комірках з буферним газом реєструються вузькі резонанси, з шириною порядку десятків герц [9]. У публікаціях [8–10] наголошується на ролі буферного газу в експериментах, де має місце когерентне полонення населеностей у трирівневій системі, проте вважається, що після того, як атоми залишають область взаємодії з випромінюванням, вони більше туди не повертаються.

Повніший опис процесу взаємодії атома з полем повинен враховувати, що атом, який вийшов з ділянки взаємодії з полем, може туди знову повернутися [11, 12], так що до втрати когерентності атоми можуть взаємодіяти з випромінюванням кілька разів. Таким чином, дифузія атомів у буферному газі суттєво впливає на відгук атомів на резонансне збудження з боку лазерного поля. Якщо час релаксації когерентності метастабільних станів значно перевищує час, що спливає до повторної взаємодії атома з полем, то атом після того, як деякий час перебував у темній області (поза променем), може повертатись назад без втрати когерентності. У результаті слід чекати звуження лінії резонансу. Це явище було названо дифузійно-індукованим рамзеєвським звуженням [13] (за аналогією з методом Рамзея рознесених осцилюючих полів [14, 15]).

Дифузійно-індуковане рамзеєвське звуження спектра пропускання при спостереженні ЕШ було досліджено у роботі [13], де наведено результати експерименту з парою рубідію і неонем, який слугував буферним газом, а також проведено теоретичний розрахунок. Згідно з результатами роботи [13], необхідність врахування процесу дифузії залежить від діаметра лазерного променя – зі зменшенням діаметра променя внесок атомів, що побували за межами променя і повернулися, у сигнал стає визначальним. Пізніше ті ж автори опублікували детальний виклад розвинутої ними теорії [16]. Результати експерименту і теоретичні розрахунки однозначно підтверджують фізичну інтерпретацію явища дифузійного-індукованого рамзеєвського звуження спектра пропускання, яке спостерігалось в роботі [13]. Зокрема, при збільшенні діаметра лазерного променя або збільшенні тиску буферного газу форма спектральної лінії змінюється від нелоренцевої до лоренцевої відповідно до зменшення внеску атомів, що повернулися з області поза лазерним полем. У цитованих роботах рух атомів описано у вигляді рамзеєвських послідовностей, в кожній з яких атом проводить час t_1^{in} у полі випромінювання, рухається у темній області час t_2^{out} , повертається у область випромінювання на час t_3^{in} і так далі. Для пошуку спектра пропускання матриця густини, що описує рамзеєвську послідовність, інтегрувалась з розподілом імовірності, тобто проводилося усереднення за всіма можливими траєкторіями. Розподіл імовірності було знайдено в роботі [16] з рівняння дифузії.

Ми пропонуємо альтернативний підхід для опису дифузійного-індукованого рамзеєвського звуження спектра. Він ґрунтується на рівнянні дифузії, яке впливає з вихідних рівнянь руху для матриці густини на основі наближення сильних зіткнень [8, 17]. Спектр пропускання буде отримано безпосередньо у рівноважному підході замість усереднення за траєкторіями. Порівняно з роботами [13, 16], врахуємо релаксацію на стінках комірки (вважатимемо, що у результаті зіткнення атома зі стінкою когерентність руйнується). Також розглянемо реалістичний (гауссовий) розподіл інтенсивності в радіальному напрямку. Крім того, нами буде враховано обмеженість комірки з газом у напрямку вздовж лазерного променя. Щоб побачити, як розмірність задачі впливає на результат, розглянемо і одновимірний випадок, коли комірка безмежна у напрямку лазерного променя, а сам промінь безмежний вздовж однієї з поперечних координат.

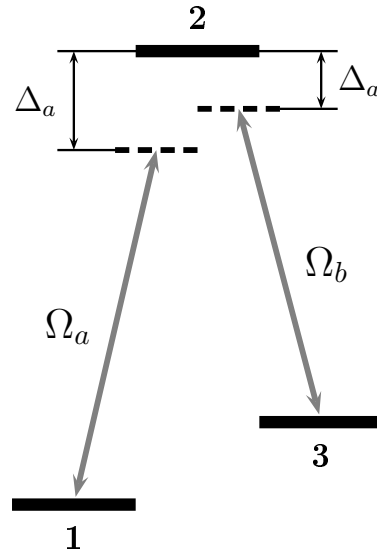


Рис. 1. Трирівнева система: Ω_a та Ω_b – частоти Рабі

2. Основні рівняння

Розглянемо газ трирівневих атомів зі збудженим станом $|2\rangle$ та метастабільними нижніми станами $|1\rangle$ і $|3\rangle$. Поле з частотою ω_a зв'язує стани $|1\rangle$ і $|2\rangle$, а поле з частотою ω_b – стани $|3\rangle$ і $|2\rangle$ (див. рис. 1). Взаємодія цих полів з атомами описується частотами Рабі $\Omega_a = \mu_{12} \cdot \mathbf{E}_a / \hbar$ та $\Omega_b = \mu_{32} \cdot \mathbf{E}_b / \hbar$ відповідно. Оскільки промені a і b обмежені у просторі, то частоти Рабі залежать від положення \mathbf{r} атома у просторі. Хвильові вектори вважатимемо близькими за величиною: $k_a \simeq k_b \simeq k$.

Рівняння для недиагональних елементів матриці густини у наближенні обертової хвилі мають вигляд

$$\dot{\rho}_{12} = i(\Delta_a - kv)\rho_{12} + \frac{i\Omega_a^*}{2}(\rho_{22} - \rho_{11}) - \frac{i\Omega_b^*}{2}\rho_{13} + \left(\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t}\right)_{\text{relax}} + \left(\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t}\right)_{\text{coll}}, \quad (1)$$

$$\dot{\rho}_{23} = -i(\Delta_b - kv)\rho_{23} + \frac{i\Omega_a}{2}\rho_{13} + \frac{i\Omega_b}{2}(\rho_{33} - \rho_{22}) + \left(\frac{\partial \rho_{23}}{\partial t}\right)_{\text{relax}} + \left(\frac{\partial \rho_{23}}{\partial t}\right)_{\text{coll}}, \quad (2)$$

$$\dot{\rho}_{31} = -i(\Delta_a - \Delta_b)\rho_{31} - \frac{i\Omega_a}{2}\rho_{23}^* + \frac{i\Omega_b^*}{2}\rho_{12}^* +$$

$$+ \left(\frac{\partial \rho_{31}}{\partial t} \right)_{\text{relax}} + \left(\frac{\partial \rho_{31}}{\partial t} \right)_{\text{coll}} \quad (3)$$

Тут доданки з індексом “coll” описують релаксаційні процеси за рахунок зіткнень активних атомів (які взаємодіють з полем) з атомами буферного газу, в результаті яких змінюється швидкість, але зберігається когерентність, а доданки з індексом “relax” – решту релаксаційних процесів, $\Delta_a = \omega_{21} - \omega_a$ і $\Delta_b = \omega_{23} - \omega_b$ – однофотонні відстроювання, $\Delta\omega = \Delta_a - \Delta_b$ – двофотонне відстроювання. Будемо вважати, що

$$\left(\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} \right)_{\text{relax}} = -\Gamma_{12}\rho_{12}, \quad \left(\frac{\partial \rho_{23}}{\partial t} \right)_{\text{relax}} = -\Gamma_{23}\rho_{23},$$

де Γ_{12} і Γ_{23} позначають швидкості релаксації когерентності для переходів $2 \rightarrow 1$ та $2 \rightarrow 3$ відповідно. Якщо Γ_{13} і Γ_{23} достатньо великі, то можна знехтувати доданками зіткнень у рівняннях (1) і (2). Для забороненого переходу $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ швидкість релаксації відмінна від нуля завдяки зіткненням між атомами,

$$\left(\frac{\partial \rho_{31}}{\partial t} \right)_{\text{relax}} = -\gamma_{13}\rho_{31}. \quad (4)$$

У загальному випадку вираз для доданку зіткнень [18–20] можна записати так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_{ij}(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t)}{\partial t} \right)_{\text{coll}} &= -\nu \rho_{ij}(\mathbf{v}, \mathbf{v}', t) + \\ &+ \int K_{ij}(\mathbf{v}', \mathbf{v}) \rho_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d\mathbf{v}', \end{aligned} \quad (5)$$

де $K_{ij}(\mathbf{v}', \mathbf{v})$ – ядро зіткнень, ν у загальному випадку – комплексна величина розмірності частоти. Її можна інтерпретувати як частоту зіткнень у випадку, коли амплітуди розсіяння в обох станах i та j однакові (див. [18]).

Для спрощення доданка, пов’язаного із зіткненнями, використовується наближення сильних зіткнень (легкі атоми розсіюються на важких частинках [17]) і вважається, що ν та K_{ij} – дійсні, ядро $K_{ij}(\mathbf{v}', \mathbf{v})$ не залежить від \mathbf{v}' , тобто швидкість атома \mathbf{v} після зіткнення не залежить від його швидкості \mathbf{v}' перед зіткненням. У цьому разі довільний у загальному випадку розподіл швидкостей переходить у розподіл Максвелла всього за кілька зіткнень, тобто атом швидко забуває свою початкову швидкість. Як показано в [17], $K_{ij}(\mathbf{v}) = \nu W(\mathbf{v})$, де $W(\mathbf{v})$ – розподіл Максвелла. Таким чином [20], (5) набуває вигляду

$$\left(\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = -\nu [\rho_{ij} - W(\mathbf{v})N_{ij}],$$

де

$$N_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{v} \rho_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (6)$$

можна інтерпретувати як число атомів, що мають значення ρ_{ij} в одиниці об’єму в околі точки \mathbf{r} , ν означає частоту зіткнень [18].

У такому наближенні зіткнення з буферним газом змінюють лише зовнішні ступені вільності атомів.

У наближенні $\left| \frac{d}{dt} \right| \ll \Gamma_{12}, \Gamma_{23}$ та нехтуючи доданками зіткнень у (1) та (2) можна знайти стаціонарні розв’язки для ρ_{12} і ρ_{23} . Користуючись ними і беручи до уваги, що діагональні елементи ρ_{ii} близькі до рівноважних значень $\rho_{ii}^{(0)}$ (вони відрізняються від останніх на величину другого порядку малості за напруженістю поля), отримуємо рівняння для ρ_{31} :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{31} &= -(\gamma_{13} + i\Delta\omega)\rho_{31} - \\ &- \left[\frac{\Omega_a^* \Omega_a}{\Gamma_{23} - i(\Delta_b - kv)} + \frac{\Omega_b^* \Omega_b}{\Gamma_{12} + i(\Delta_a - kv)} \right] \rho_{31} - \\ &- \frac{\Omega_a \Omega_b^*}{4} \left[\frac{\rho_{11}^{(0)} - \rho_{22}^{(0)}}{\Gamma_{12} + i(\Delta_a - kv)} + \frac{\rho_{33}^{(0)} - \rho_{22}^{(0)}}{\Gamma_{23} - i(\Delta_b - kv)} \right] + \\ &+ \left(\frac{\partial \rho_{31}}{\partial t} \right)_{\text{coll}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Другий доданок правої частини описує польове розширення. Для слабких полів та великих швидкостей релаксації Γ_{ij} ним можна знехтувати.

Для спрощення рівняння знехтуємо також доплерівським розширенням у третьому доданку вважаючи, що $\Gamma_{ij} \gg \Delta_{a,b}, \Delta\omega, kv$.

Беручи до уваги, що рівноважні елементи матриці густини ρ_{ii} пропорційні функції розподілу $W(\mathbf{v})$, отримуємо кінетичне рівняння больцманівського типу для ρ_{31} .

У стаціонарному випадку, який нас цікавить, воно має вигляд

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= -(\nu + \gamma + i\Delta\omega)\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \\ &+ W(\mathbf{v})[\lambda(\mathbf{r}) + \nu N(\mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут і далі позначено

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \rho_{31}(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \gamma = \gamma_{13},$$

$$N = N_{31}, \quad W(\mathbf{v}) = W_0 e^{-\mathbf{v}^2/v_0^2},$$

де N_{31} визначається (6); W_0 – стала нормування розподілу Максвелла,

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{4} \left(\frac{\rho_{11}^{(0)}}{\Gamma_{12}} + \frac{\rho_{33}^{(0)}}{\Gamma_{13}} \right) \Omega_a \Omega_b^*. \quad (9)$$

Тут ми взяли до уваги, що $\rho_{22}^{(0)} \ll \rho_{11}^{(0)}, \rho_{22}^{(0)} \ll \rho_{33}^{(0)}$. Як видно з (9), функція $\lambda(\mathbf{r}) \sim \Omega_a(\mathbf{r})\Omega_b^*(\mathbf{r})$ описує поперечний профіль пучків.

Для спрощення позначень уведемо

$$\alpha_0 = \gamma + i\Delta\omega, \quad \alpha = \nu + \gamma + i\Delta\omega = \nu + \alpha_0.$$

Вважаємо, що зіткнення атомів зі стінками приводять до руйнування когерентності між нижніми станами, так що

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v})|_{\mathbf{r} \in S} = 0,$$

де S позначає поверхню, що обмежує комірку з буферним газом.

Форма спектральної лінії визначається функцією $T(\Delta\omega) = \text{Re} [S(\Delta\omega)/S(0)]$, де $S(\Delta\omega)$ має вигляд

$$S(\Delta\omega) = \iint d\mathbf{r} d\mathbf{v} \lambda(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int \lambda(\mathbf{r})N(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (10)$$

Для її визначення треба знайти функцію ρ .

У випадку лазерного променя з гауссовим розподілом інтенсивності в площині, перпендикулярній до напрямку його поширення, вираз для $\lambda(\mathbf{r})$ у циліндричних координатах набуває вигляду

$$\lambda(r, \varphi, z) = \lambda_0 e^{-r^2/a^2}, \quad (11)$$

де λ_0 визначається з (9), \mathbf{r} лежить на осі пучка.

У наближенні сильних зіткнень час між зіткненнями $\tau_\nu = 1/\nu$ малий порівняно з характеристичним часом прольоту атома крізь зону взаємодії $\tau_a = a/v_0$, тому надалі вважаємо, що виконується нерівність $\nu\tau_a \gg 1$.

Далі дослідимо вплив розмірів пучків та відстані до стінок комірки з газом на форму спектральної лінії, що визначається функцією $\text{Re} S(\Delta\omega)$. Також розглянемо вплив розмірності задачі на форму функції $\text{Re} S(\Delta\omega)$.

3. Розв'язок для нескінченної області

Для просторово необмеженої області рівняння (8) можна розв'язати за допомогою перетворення Фур'є по

аргументу \mathbf{r} :

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) = \int \rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad \hat{N}(\mathbf{k}) = \int \hat{\rho}(\mathbf{k}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}.$$

звідки маємо

$$\hat{N}(\mathbf{k}) = \frac{\hat{\lambda}(\mathbf{k})\hat{F}(\mathbf{k})}{1 - \nu\hat{F}(\mathbf{k})}, \quad (12)$$

де функція

$$\hat{F}(\mathbf{k}) = \int \frac{W(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\alpha + i\mathbf{k}\mathbf{v}} = \frac{\sqrt{\pi}}{|k|v_0} e^{\alpha^2/k^2 v_0^2} \text{erfc} \left(\frac{\alpha}{|k|v_0} \right),$$

описує профіль Фойхта. Знайдемо сигнал S_∞ , використовуючи властивості перетворення Фур'є:

$$S_\infty(\Delta\omega) = \int d\mathbf{r} N(\mathbf{r})\lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\mathbf{k} \hat{N}(\mathbf{k})\hat{\lambda}(\mathbf{k}), \quad (13)$$

де n позначає просторову розмірність області (1, 2 або 3). Підставляючи сюди N з (12), знаходимо

$$S_\infty(\Delta\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\hat{\lambda}^2(\mathbf{k})\hat{F}(\mathbf{k})}{1 - \nu\hat{F}(\mathbf{k})} d\mathbf{k}.$$

У деяких випадках завдяки множнику $\hat{\lambda}^2(k)$ значення $S(\Delta\omega)$ в основному визначається малими значеннями k , тому функцію $\hat{F}(k)$ можна замінити асимптотичним розкладом у квадратичному наближенні (див. [21]):

$$S_\infty(\Delta\omega) \simeq \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\hat{\lambda}^2(\mathbf{k}) d\mathbf{k}}{\alpha_0 + \frac{k^2 v_0^2}{2\alpha}}, \quad (14)$$

це справедливо для достатньо малих k , коли $|k|v_0/\nu \ll 1$.

3.1. Одновимірний випадок

У даному випадку $\lambda(x) = \lambda_0 e^{-x^2/a^2}$ і (14) має вигляд

$$\begin{aligned} S_\infty^{(1)}(\Delta\omega) &= \frac{\lambda_0^2 a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\alpha_0 + u^2/\tau_D} du = \\ &= \frac{\pi \lambda_0^2 a^3}{2} \frac{\beta}{\alpha_0} e^{\beta^2 a^2/2} \text{erfc} \left(\frac{\beta a}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\beta^2 = \frac{2\alpha\alpha_0}{v_0^2}, \quad \tau_D = \frac{2\alpha a^2}{v_0^2}, \quad \beta^2 a^2 = \tau_D \alpha_0$$

(величину τ_D буде інтерпретовано далі). У нашому наближенні $\nu \gg \gamma, \Delta\omega$, тому можна вважати $\tau_D = \text{const}$. Праву частину (15) можна подати у вигляді суперпозиції профілів:

$$S_{\infty}^{(1)}(\Delta\omega) \sim \int_{-\infty}^{\infty} s(\Delta\omega, u) g_{\infty}^{(1)}(u) du, \quad (16)$$

де

$$s(\Delta\omega, u) = \frac{\gamma_{\text{eff}}(u)}{\gamma_{\text{eff}}(u) + i\Delta\omega}, \quad \gamma_{\text{eff}}(u) = \gamma + u^2/\tau_D$$

з ваговим множником (що не залежить від ω)

$$g_{\infty}^{(1)}(u) = \frac{1}{\gamma_{\text{eff}}(u)} e^{-u^2/2}. \quad (17)$$

Комбінацію $\tau(u) = \tau_D/u^2$ можна назвати ефективним часом дифузії атома, для “швидких” атомів $\tau(u)$ має більше значення, ніж для “повільних”.

Профіль $S_{\infty}^{(1)}(\Delta\omega)$ можна описати як ефективний лоренціан з центром у початку координат:

$$S_L(\Delta\omega) = \frac{\Gamma_0}{\Gamma_0 + i\Delta\omega}.$$

Його ширина Γ_0 визначається рівнянням

$$\Gamma_0^2 = -\frac{2S(0)}{S''(0)}.$$

Прості обчислення для $\gamma\tau_D \ll 1$ дають:

$$\Gamma_0^2 = \frac{8}{3}\gamma^2 \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\gamma\tau_D} + \dots \right), \quad (18)$$

звідки для малих γ знаходимо $\Gamma_0 \simeq \sqrt{\frac{8}{3}}\gamma$.

3.2. Двовимірний випадок

Використовуючи аналогічну процедуру для функції $\lambda(\mathbf{r}) = \lambda_0 e^{-r^2/a^2}$ у полярних координатах, отримуємо

$$\begin{aligned} S_{\infty}^{(2)}(\Delta\omega) &= \frac{\pi\lambda_0^2 a^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{ue^{-u^2/2} du}{\alpha_0 + u^2/\tau_D} = \\ &= \frac{\pi\lambda_0^2 a^4}{4\alpha_0} e^{\beta^2 a^2/2} \text{Ei}_1\left(\frac{\beta^2 a^2}{2}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Тут Ei_1 позначає інтегральну експоненту першого порядку¹. Отриманий вираз аналогічний (15) і має таку ж інтерпретацію, у цьому випадку з ваговою функцією

$$g_{\infty}^{(2)}(u) = \frac{1}{\gamma_{\text{eff}}(u)} ue^{-u^2/2}. \quad (20)$$

Ширина ефективного лоренціана для $\gamma\tau_D \ll 1$ має вигляд

$$\Gamma_0^2 = \gamma^2 2[\ln 2 - \gamma_E - \ln(\gamma\tau_D)] + o(\gamma\tau_D). \quad (21)$$

4. Ефективне рівняння дифузії

4.1. Виведення рівняння дифузії

Згідно з (10) комплексний сигнал $S(\Delta\omega)$ можна виразити за допомогою нульового моменту $N(\mathbf{r})$ розподілу $\rho(\mathbf{r})$ відносно \mathbf{v} . Знайдемо рівняння для вищих моментів $N^{(k)}(\mathbf{r})$.

Спочатку розглянемо одновимірний випадок. У цьому разі маємо

$$N^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v^k \rho(x, v) dv, \quad N^{(0)}(x) = N(x).$$

Помножимо рівняння (8), яке у одновимірному випадку має вигляд

$$v \frac{\partial \rho(x, v)}{\partial x} = -\alpha \rho(x, v) + W(v) [\lambda(x) + \nu N^{(0)}(x)], \quad (22)$$

на v^k і проінтегруємо по v . У результаті отримаємо ланцюжок рівнянь для моментів $N^{(k)}(x)$. Записуючи отримані рівняння окремо для парних та непарних k і виконуючи послідовні підстановки наступного рівняння в попереднє m разів, отримуємо рівняння для $N^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \alpha N^{(0)} &= \sum_{k=0}^m \frac{\langle v^{2k} \rangle}{\alpha^{2k}} \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} [\lambda(x) + \nu N^{(0)}(x)] + \\ &+ \frac{1}{\alpha^{2m+1}} \frac{d^{2m+2} N^{(2m+2)}}{dx^{2m+2}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для вищих розмірностей простору результат буде аналогічним, але складнішим, оскільки моменти будуть вже тензорами. Аналогічна процедура дає:

$$\alpha N^{(0)}(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^m \frac{\langle v_{i_1} \dots v_{i_{2k}} \rangle}{\alpha^{2k}} \times$$

¹ Означення: $\text{Ei}_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

$$\times (\nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_{2k}}) [\lambda(\mathbf{r}) + \nu N^{(0)}(\mathbf{r})] + \dots \quad (24)$$

Вирази (23) та (24) є асимптотичними розкладами, у яких для достатньо великих ν (та α) можна залишити тільки перші доданки. Зокрема, доданки другого порядку приводять до рівняння дифузії.

Використовуючи відомі вирази для середніх $\langle v_i v_j \rangle$, матимемо у квадратичному наближенні:

$$N^{(0)} = \left(1 + \frac{\langle v^2 \rangle}{n\alpha^2} \Delta \right) (\lambda + \nu N^{(0)}) + \dots,$$

де n позначає просторову розмірність. Враховуючи рівність $\langle v^2 \rangle = \frac{n}{2} v_0^2$, отримуємо для довільного n (з точністю до доданків порядку $1/\nu$):

$$\alpha_0 N(\mathbf{r}) = \frac{\nu v_0^2}{2\alpha^2} \Delta N(\mathbf{r}) + \lambda(\mathbf{r}), \quad N(\infty) = 0. \quad (25)$$

Це рівняння можна інтерпретувати як рівняння дифузії з коефіцієнтом поглинання $\alpha_0 = \gamma + i\Delta\omega$ та коефіцієнтом дифузії (комплексна величина):

$$\tilde{D} = \frac{\nu v_0^2}{2\alpha^2}. \quad (26)$$

Коефіцієнт дифузії однаковий для всіх розмірностей простору.

Для великих ν вираз (26) стає дійсною величиною і переходить в

$$D = \frac{v_0^2}{2\nu}. \quad (27)$$

Виходячи з формули $a = \sqrt{D\tau_D}$, знаходимо характеристичний час дифузії (приблизний час, за який атом залишає пучок):

$$\tau_D = \frac{a^2}{D} = \frac{2a^2\nu}{v_0^2}. \quad (28)$$

Для подальшого зручно записати рівняння дифузії (25) у вигляді

$$\Delta N(\mathbf{r}) - \beta^2 N(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}), \quad (29)$$

$$\text{де } f(\mathbf{r}) = \frac{\beta^2}{\alpha_0} \lambda(\mathbf{r}), \quad \beta^2 = \frac{2\alpha_0\alpha^2}{\nu v_0^2} \simeq \frac{\alpha_0\tau_D}{a^2}.$$

Розв'язуючи його методом функцій Гріна, можна побачити, що вираз для сигналу, отриманий розв'язком (29) у випадку великих значень ν , буде таким же, як і отриманий раніше безпосереднім обчисленням (14). Також видно, що число доданків, що використано в асимптотичному розкладі $\hat{F}(\mathbf{k})$ виразу (14)

відповідає числу доданків рівняння (24), які потрібно залишити, щоб отримати рівняння дифузії.

У випадку обмеженої комірки кінетичне рівняння (8) можна розв'язати формально, якщо інтерпретувати останній доданок правої частини як неоднорідний (див. [22]). Результат буде таким же, як і отриманий з розв'язання (25) з точністю до членів ν^{-2} (з якою, власне, і справедливе рівняння дифузії).

Рух атомів характеризується п'ятьма характеристичними часами:

$$\tau_a = \frac{a}{v_0}, \quad \tau_R = \frac{R}{v_0}, \quad \tau_\gamma = \frac{1}{\gamma},$$

$$\tau_\nu = \frac{1}{\nu}, \quad \tau_D = \frac{a^2}{D} = \nu\tau_a^2, \quad (30)$$

які, згідно зі зробленим наближенням, задовольняють умови:

$$\tau_\nu < \tau_a < \tau_R, \quad \tau_D < \tau_\gamma, \quad \tau_\nu \ll \tau_\gamma, \quad \tau_a < \tau_D. \quad (31)$$

Перша умова впливає з наближення сильних зіткнень та геометричної конфігурації $R > a$ для малих ν та (або) великих R . Наближення, що було використано для виведення рівняння дифузії, виконуватиметься для комірки скінченних розмірів. Друга і третя умови відповідають повільності релаксаційних процесів, остання умова очевидна.

Введемо безрозмірні часові та просторові масштаби $\hat{t} = \gamma t$ та $\hat{r} = r/a$ і означимо безрозмірні швидкість $\hat{v}_0 = v_0/(\gamma a)$, коефіцієнт дифузії $\hat{D} = D/(\gamma a^2)$, частоту зіткнень $\hat{\nu} = \nu/\gamma$ та розмір комірки $\hat{R} = R/a$. Безрозмірні характеристичні часи матимуть вигляд

$$\hat{\tau}_\gamma = 1, \quad \hat{\tau}_\nu = \gamma\tau_\nu = \frac{1}{\hat{\nu}}, \quad \hat{\tau}_D = \gamma\tau_D = \frac{2\hat{\nu}}{\hat{v}_0^2},$$

$$\hat{\tau}_a = \gamma\tau_a = \frac{1}{\hat{v}_0}, \quad \hat{\tau}_R = \gamma\tau_R = \frac{\hat{R}}{\hat{v}_0}. \quad (32)$$

Як буде видно з подальшого розв'язку, форма лінії пропускання в нескінченному випадку повністю визначається двома безрозмірними характеристичними часами $\hat{\tau}_\nu$ та $\hat{\tau}_D$, а для обмеженої комірки вона залежить від розмірів комірки – \hat{R} (ширини) та \hat{l} (довжини, у тривимірному випадку).

Розв'яжемо рівняння дифузії у формі (29) для різних розмірностей простору. Найефективнішим є підхід на основі функцій Гріна. Для спрощення порівняння випадків скінченного R і $R \rightarrow \infty$ при дослідженні впливу просторових обмежень на сигнал результат подамо у формі, максимально схожій на розв'язок для нескінченної комірки.

4.2. Одновимірний випадок

Використовуючи загальний розв'язок одновимірного рівняння дифузії, з крайовими умовами $N(\pm R) = 0$ матимемо

$$S_R^{(1)}(\Delta\omega) = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\lambda}(u/a)\hat{\lambda}_R(u/a) du}{\alpha_0 + u^2/\tau_D}, \quad (33)$$

де $\hat{\lambda}_R(u/a) = \hat{\lambda}(u/R)b^{(1)}(u, R)$, а $b^{(1)}(u, R)$ позначає множник, що залежить від R :

$$b^{(1)}(u, R) = B^{(1)}(u/a, R),$$

$$B^{(1)}(k, R) = \frac{1}{\hat{\lambda}(k)} \int_{-R}^R \lambda(x) \left[e^{-ikx} - e^{-ikR} \frac{\text{ch}(\beta x)}{\text{ch}(\beta R)} \right] dx. \quad (34)$$

Цей вираз означає, що, як і у нескінченному випадку (16), $S_R^{(1)}$ можна записати у формі суперпозиції лоренціанів:

$$S_R^{(1)}(\Delta\omega) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} s(\Delta\omega, u) g_R^{(1)}(u, \Delta\omega) du,$$

однак у випадку скінченного R вагова функція, на відміну від (17), залежить від R і $\Delta\omega$:

$$g_R^{(1)}(u, \Delta\omega) = g_\infty^{(1)}(u) b^{(1)}(u, \Delta\omega, R),$$

причому $\lim_{R \rightarrow \infty} g_R^{(1)}(u, \Delta\omega) = g_\infty^{(1)}(u)$. У випадку $R \rightarrow \infty$ залежність від $\Delta\omega$ зникає. Множник $g_R^{(1)}(u, \Delta\omega)$ не можна інтерпретувати як ваговий через залежність від $\Delta\omega$. Також не можна замінити лоренціан $s(\Delta\omega, u)$ на складніший профіль $s_R(\Delta\omega, u) = s(\Delta\omega, u) \cdot b^{(1)}(u, \Delta\omega, R)$ з метою виділення ваги, як у нескінченному випадку, оскільки такий "профіль" s_R стає сингулярним для деяких значень u (зокрема, для $u \rightarrow \infty$), однак ця сингулярність компенсується другим множником $g_\infty^{(1)}(u)$. Таким чином, інтерпретація $S_R^{(1)}(\Delta\omega)$ як зваженої суперпозиції тут неможлива.

Для гауссового розподілу інтенсивності функцію $b^{(1)}(k, R)$ можна виразити через функції похибок:

$$B^{(1.g)}(k, R) = 1 - \frac{\text{erfc}\left(\frac{R}{a} + i\frac{ka}{2}\right) + \text{erfc}\left(\frac{R}{a} - i\frac{ka}{2}\right)}{2}$$

$$- e^{(k^2 + \beta^2)/4} \frac{\cos kR}{\text{ch}\beta R} \frac{\text{erf}\left(\frac{R}{a} + \frac{\beta a}{2}\right) + \text{erfc}\left(\frac{R}{a} - \frac{\beta a}{2}\right)}{2}. \quad (35)$$

У випадку $R \gg a$, $\frac{R}{a} \gg \frac{\beta a}{2}$ можна отримати асимптотичну поведінку $B^{(1)}(k, R)$ для малих k :

$$B^{(1.g)}(k, R) \simeq 1 - e^{(k^2 + \beta^2)a^2/4} \frac{\cos kR}{\text{ch}\beta R}. \quad (36)$$

Графіки $\text{Re } S_R(\Delta\omega)$ і супутні параметри для типових значень

$$\gamma = 1,0 \cdot 10^2 \text{ Гц}, \quad \nu = 1,0 \cdot 10^6 \text{ Гц},$$

$$a = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad v_0 = 2,95 \cdot 10^2 \text{ м/с},$$

та $\tau_D = 2,3 \cdot 10^{-5}$ с з відповідними безрозмірними значеннями

$$\hat{\tau}_D = 2,3 \cdot 10^{-3}, \quad \hat{\tau}_\nu = 1,0 \cdot 10^{-4}$$

наведено на рис. 2. Видно, що лінія буде вузькою для більших значень R (коли імовірність повернення без втрати когерентності більша). На формальному рівні геометричний фактор $g_R^{(1)}(u, \Delta\omega)$ для скінченного R більший за $g_\infty^{(1)}(u)$, тому профіль $\text{Re } S_R(\Delta\omega)$ буде ширшим.

4.3. Двовимірний випадок

Використовуючи аксіально симетричний розв'язок двовимірного рівняння дифузії в області $r < R$ з граничною умовою $N(\mathbf{r})|_{r=R} = 0$, знаходимо

$$S_R^{(2)}(\Delta\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{u \hat{\lambda}(u/a) \hat{\lambda}_R(u/a) du}{\alpha_0 + u^2/\tau_D} b^{(2)}(u, R), \quad (37)$$

де $\hat{\lambda}_R(u/a) = \hat{\lambda}(u/a) b^{(2)}(u, R)$, та

$$b^{(2)}(u, R) = B^{(2)}(u/a, R),$$

$$B^{(2)}(k, R) = \frac{2\pi}{\hat{\lambda}(k)} \int_0^R r \lambda(r) \left[J_0(kr) - J_0(kR) \frac{I_0(\beta r)}{I_0(\beta R)} \right] dr, \quad (38)$$

причому $\lim_{R \rightarrow \infty} b_R^{(2)}(u, R) = 1$.

Як і в одновимірному випадку, ваговий множник біля лоренціану має вигляд $g_R^{(2)}(u, \Delta\omega) =$

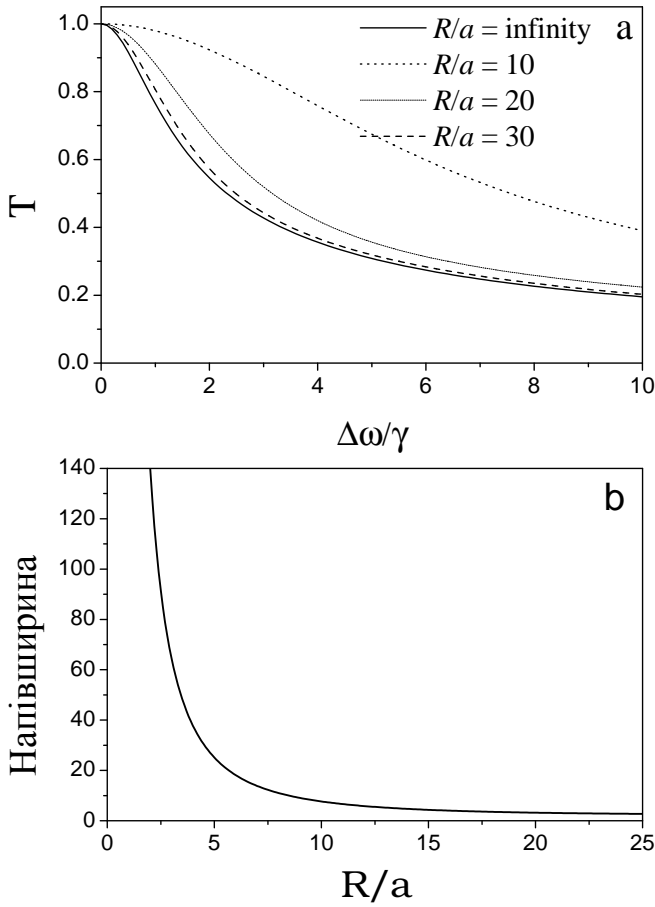


Рис. 2. Одновимірний випадок: залежність нормованого пропускання $T = \text{Re } S(\Delta\omega)/S(0)$ для різних R від $\Delta\omega/\gamma$ (a) і півширини спектра пропускання від R/a (b). Значення параметрів наведено у тексті

$g_\infty^{(2)}(u)b^{(2)}(u, R, \Delta\omega)$. Інтерпретація (38) та порівняння з необмеженим випадком (19) такі ж, як і в однодимірному випадку (35). Графіки $\text{Re } S_R^{(2)}(\Delta\omega)$ на рис. 3 побудовано для тих же значень параметрів, що і на рис. 2.

4.4. Тривимірний випадок

У тривимірному випадку, коли $N(\mathbf{r})$ дорівнює нулю на поверхні циліндра радіусом $r = R$, обмеженого площинами $z = \pm l$, рівняння дифузії те ж, що і в двовимірному випадку, а сигнал має таку форму (це модифікований двовимірний профіль):

$$S_R^{(3)}(\Delta\omega) = \frac{l}{16\pi a^2} \frac{\beta^2}{\alpha_0} \times$$

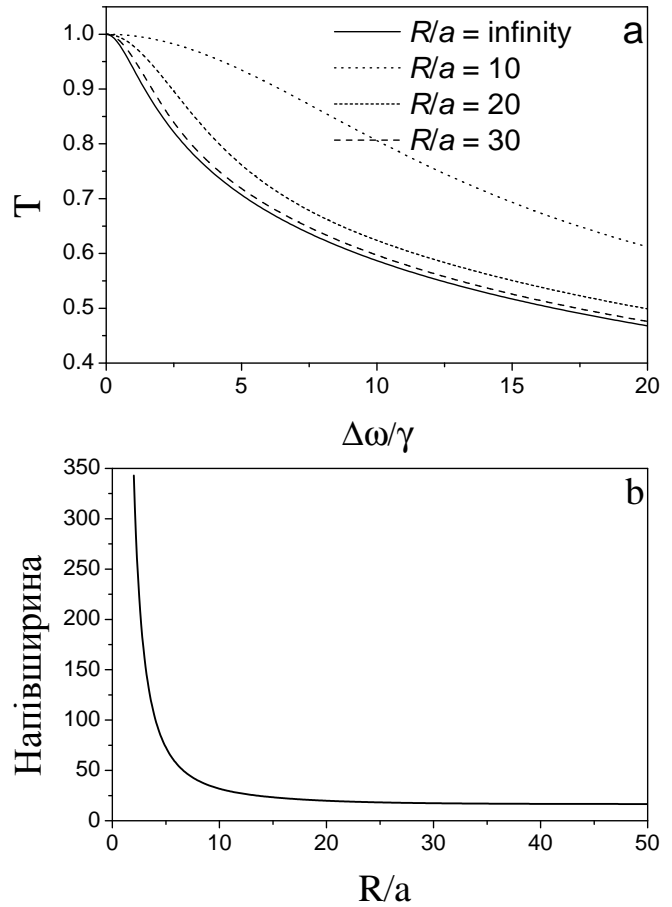


Рис. 3. Двовимірний випадок: залежність нормованого пропускання $T = \text{Re } S_R(\Delta\omega)/S_R(0)$ від $\Delta\omega/\gamma$ для $R = \infty$ і скінченних значень R (a) і півширини спектра пропускання від R/a (b). Значення параметрів такі ж, як і на рис. 2

$$\times \int_0^\infty du \frac{u \hat{\lambda}^2(u/a)}{\alpha_0 + u^2/\tau_D} b^{(2)}(u, R)b^{(3)}(u, l), \quad (39)$$

де $\hat{\lambda}(k)$ позначає двовимірне перетворення Фур'є від $\lambda(\mathbf{r})$, $b^{(2)}(u, R)$ є множником з двовимірного випадку, що залежить від R (див. (38)) та

$$b^{(3)}(u, l, \Delta\omega) = 1 - \frac{\tanh \xi(u, \Delta\omega)}{\xi(u, \Delta\omega)},$$

$$\xi(u, \Delta\omega) = \frac{l}{a} \sqrt{u^2 + \beta^2 a^2}. \quad (40)$$

Ваговий множник біля лоренціанів для тривимірному випадку (39) має вигляд

$$g_{R,l}^{(3)}(u, \Delta\omega) = g_R^{(2)}(u)b^{(3)}(u, l) =$$

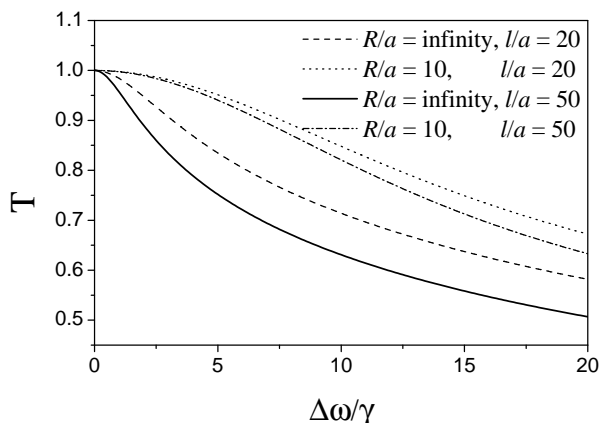


Рис. 4. Тривимірний випадок. Залежність $T = \text{Re } S_R^{(3)}(\Delta\omega)/S_R^{(3)}(0)$ від $\Delta\omega/\gamma$ для різних просторових параметрів

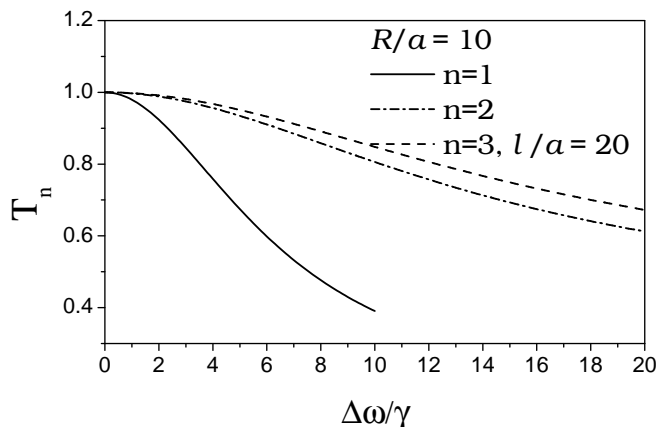


Рис. 6. Функції $T_n = \text{Re } S_R^{(n)}(\Delta\omega)/S_R^{(n)}(0)$, $n = 1, 2, 3$, для $R/a = 10$

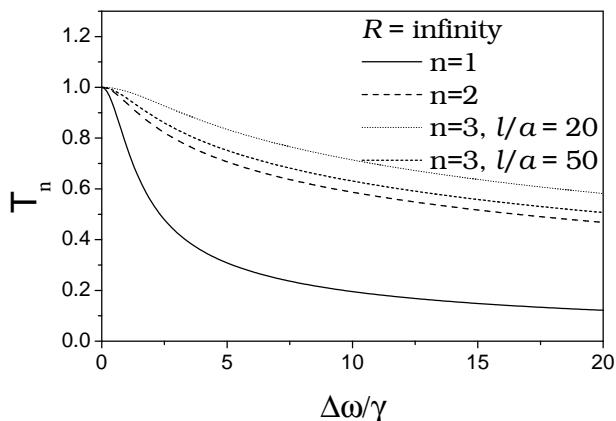


Рис. 5. Порівняння функцій $T_n = \text{Re } S_\infty^{(n)}(\Delta\omega)/S_\infty^{(n)}(0)$, $n = 1, 2, 3$

$$= g_\infty^{(2)}(u)b^{(2)}(u, R, \Delta\omega)b^{(3)}(u, l, \Delta\omega).$$

Його властивості аналогічні одно- та двовимірним випадкам. Зазначимо, що його залежність від розмірів комірки R і l фігурує у вигляді незалежних множників.

Спектри пропускання, нормовані на одиницю в максимумі, для різних значень просторових параметрів наведено на рис. 4. Як і слід було чекати, зменшення l приводить до розширення спектра. На рис. 5 та 6 наведено спектри пропускання для всіх розмірностей у випадку нескінченної комірки та комірки з розміром $R/a = 10$. Видно, що для одновимірного випадку спектр найвужчий, а для тривимірного – найширший. Значення параметрів при побудові графіків на рис. 4–6 такі ж, як і на рис. 2.

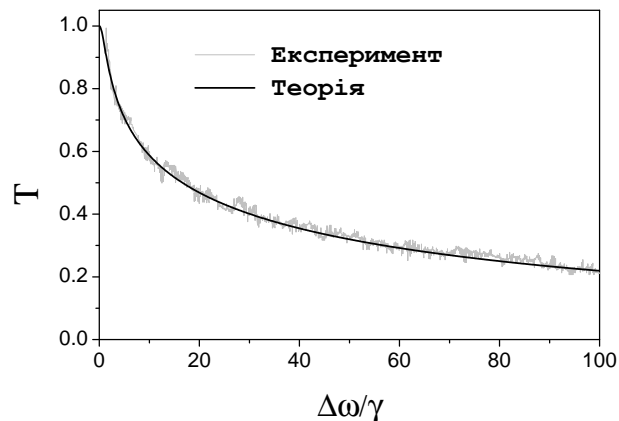


Рис. 7. Нормоване пропускання $T = \text{Re } S_R^{(3)}(\Delta\omega)/S_R^{(3)}(0)$ – порівняння з експериментом

5. Порівняння з експериментом

На рис. 7 наведено порівняння числових обчислень з експериментальними даними [13]. Для обчислень було взято безрозмірні параметри:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_a &= 3,39 \cdot 10^{-4}, & \hat{\tau}_r &= 1,69 \cdot 10^{-3}, \\ \tau_\nu &= 1,00 \cdot 10^{-4}, & \hat{\tau}_D &= 2,30 \cdot 10^{-3}, \\ \hat{v}_0 &= 2,95 \cdot 10^3, & \hat{D} &= 4,35 \cdot 10^2, \\ \hat{R} &= 5, & \hat{l} &= 5, \end{aligned}$$

що близькі до експериментальних умов. Видно, що теоретичні обчислення досить добре узгоджуються з експериментальними вимірюваннями.

Зазначимо, що з наведеними на рис. 7 експериментальними даними також добре узгоджується теорети-

чний розрахунок спектра пропускання, отриманий за допомогою усереднення за траєкторіями атомів. Це свідчить про те, що запропонована нами модель також добре узгоджується з моделлю, в основі якої лежить усереднення за траєкторіями [13, 16], в усякому разі у випадках, де ці теорії можна коректно зіставляти. Запропонована нами модель має ширші межі застосування, оскільки модель з усереднення за траєкторіями, в усякому разі у сьогодинньому її вигляді, можна застосовувати лише для безмежної комірки.

6. Висновки

Побудовано модель для опису явища дифузійно-індукованого звуження Рамзея спектра пропускання атомів у комірці з буферним газом для випадку слабких полів у межах наближення сильних зіткнень. Модель може використовуватись для довільного розподілу інтенсивності лазерних пучків у напрямку, ортогональному до їх поширення. Як ілюстрацію загальної теорії, ми провели обчислення для гауссового розподілу інтенсивності.

Отримані за допомогою ефективного рівняння дифузії аналітичні вирази для спектрів пропускання якісно узгоджуються з експериментальними даними та результатами, отриманими за допомогою усереднення по траєкторіях атомів. Запропонована модель дає можливість дослідити залежність форми спектра пропускання не тільки від розподілу інтенсивності у площині лазерного променя, а й від розмірів комірки з буферним газом. Було розглянуто різні геометричні конфігурації (одно-, дво- та тривимірні). Порівнюючи спектри для одно-, дво- та тривимірної моделей можна бачити, що лінія стає ширшою для вищого виміру.

Роботу виконано за проектами Ф28.2/035 та РФФД/1-09-25.

1. G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, *Nuovo Cimento B* **36**, 5 (1976).
2. E. Arimondo and G. Orriols, *Lett. Nuovo Cimento* **17**, 333 (1976).
3. H.R. Gray, R.W. Whitley, and C.R. Stroud, Jr., *Opt. Lett.* **3**, 218 (1978).
4. S.E. Harris, *Phys. Today* **50**, 36 (1997).
5. L.V. Hau, S.E. Harris, Z. Dutton, and C.H. Behroozi, *Nature (London)* **397**, 594 (1999).
6. S. Knappe, R. Wynands, J. Kitching, H.G. Robinson, and L. Hollberg, *J. Opt. Soc. Am. B* **18**, 1545 (2001).

7. K. Bergmann, H. Theur, and B.W. Shore, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 1003 (1998).
8. W.W. Quivers, Jr., *Phys. Rev. A* **34**, 3822 (1986).
9. M. Erhard and H. Helm, *Phys. Rev. A* **63**, 043814 (2001).
10. E. Arimondo, *Phys. Rev. A* **54**, 2216 (1996).
11. A.S. Zibrov and A.B. Matsko, *Phys. Rev. A* **65**, 013814 (2001).
12. A.S. Zibrov, I. Novikova, and A.B. Matsko, *Opt. Lett.* **17**, 1311 (2001).
13. Y. Xiao, I. Novikova, D.F. Phillips, and R.L. Walsworth, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 043601 (2006).
14. Н. Рамзей, *Молекулярные пучки* (Издательство иностранной литературы, Москва, 1960), 411 с.
15. N.F. Ramsey, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 541 (1990).
16. Y. Xiao, I. Novikova, D.F. Phillips, and R.L. Walsworth, *Optics Express* **16**, 14128 (2008).
17. С.Г. Раутиан, И.И. Собельман, *УФН* **90**, 209, (1966).
18. В.А. Алексеев, Т.Л. Андреева, И.И. Собельман, *ЖЭТФ* **62**, 614 (1972).
19. В.А. Алексеев, Т.Л. Андреева, И.И. Собельман, *ЖЭТФ* **64**, 813 (1973).
20. С.Г. Раутиан, *УФН* **161**, 151 (1991).
21. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, под ред. М. Абрамовица и И. Стигана (Наука, 1979), 832 с.
22. P.M. Morse, N. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, part 2* (McGraw-Hill, New York, 1953).

Одержано 15.10.09

ВЛИЯНИЕ ДИФУЗИИ АТОМОВ НА ФОРМУ ЛИНИИ ТЕМНОГО РЕЗОНАНСА В ПРОСТРАНСТВЕННО ОГРАНИЧЕННЫХ ЛАЗЕРНЫХ ПОЛЯХ

В.И. Романенко, А.В. Романенко, Л.П. Яценко

Резюме

Предложена диффузионная модель для недавно открытого диффузионно-индуцированного сужения Рамзея, возникающего при диффузии атомов в ячейке с буферным газом в поле лазерного излучения. Уравнение диффузии для когерентности метастабильных состояний, связанных с возбужденным состоянием лазерным излучением разной частоты в трехуровневой схеме взаимодействия атома с полем, получено в приближении сильных столкновений. Исследована зависимость формы линии поглощения вблизи максимума пропускания излучения одной из частот от отстройки от двухфотонного резонанса для разных геометрических конфигураций ячейки.

INFLUENCE OF DIFFUSION OF ATOMS ON THE DARK
RESONANCE LINESHAPE IN SPATIALLY BOUNDED
LASER FIELDS

V.I. Romanenko¹, A.V. Romanenko², L.P. Yatsenko¹

¹Institute of Physics, Nat. Acad. of Sci. of Ukraine
(46, Nauky Ave., Kyiv 03680, Ukraine; e-mail: vr@iop.kiev.ua),

²Taras Shevchenko National University of Kyiv
(2, Academician Glushkov Ave., Kyiv 03022, Ukraine)

S u m m a r y

We propose a diffusion model for the recently discovered diffusion-induced Ramsey narrowing arising when atoms diffuse in a buffer-

gas cell in the laser radiation field. The diffusion equation for the coherence of metastable states coupled with an excited state by laser radiation of different frequencies in a three-level scheme of the atom-field interaction is obtained in the strong-collision approximation. The dependence of the shape of an absorption line near the transmission maximum of one of the frequencies on the two-photon resonance detuning for various geometries of the cell is investigated.