

ОСОБЛИВОСТІ АСИМПТОТИК РОЗПОДІЛІВ ГУСТИНИ І ФОРМФАКТОРІВ ЯДЕР ${}^6\text{Li}$ ТА ${}^6\text{He}$ У ТРИЧАСТИНКОВІЙ МОДЕЛІ

Б.Є. ГРИНЮК, І.В. СИМЕНОГ

УДК 539.172
©2010

Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України
(Вул. Метрологічна, 14б, Київ 03143; e-mail: bgrinyuk@bitp.kiev.ua, iusimenog@bitp.kiev.ua)

Досліджено асимптотики структурних функцій ядер ${}^6\text{Li}$ та ${}^6\text{He}$ у моделі α -частинка плюс два нуклони. Вивчено розподіли густини нуклонів гало та α -частинки на великих відстанях у цих ядрах та проведено порівняння з аналітичними асимптотиками. Запропоновано нове зручне представлення формфактора для малих переданих імпульсів. Проаналізовано проблему асимптотичної поведінки формфакторів. Отримані результати показують, що розвинуті числові схеми варіаційного методу з використанням гаусоїдного базису дозволяють вивчати асимптотичну область структурних функцій як в координатному, так і в імпульсному просторах.

тичну поведінку на великих відстанях, особливо для слабкозв'язаних станів. У даній роботі буде досліджено, з якою точністю і до яких відстаней справедливе гаусоїдне представлення хвильових функцій для скінченних розмірностей базисів на прикладі дослідження асимптотик розподілів густини та формфакторів слабкозв'язаних ядер ${}^6\text{Li}$ та ${}^6\text{He}$. У роботі досліджено розподіли густини нуклонів гало та α -частинки в цих ядрах на великих (у ядерних масштабах) відстанях і показано їх узгодженість з асимптотичними оцінками, а також вивчається проблема асимптотики формфакторів при великих переданих імпульсах. Наскільки відомо, у послідовному тричастинковому підході для систем, що розглядаються, ці проблеми, особливо асимптотики розподілів густини систем частинок, не були вирішені раніше. Зауважимо, що для кулонівських систем проблему асимптотик структурних функцій розглянуто в роботі [4].

1. Вступ

Ядра з шести нуклонів ($A = 6$), як надійно встановлено, характеризуються явно вираженою трикластерною структурою (α -частинка плюс два нуклони) і можуть бути описані в межах тричастинкової моделі. Якщо $N\alpha$ -потенціали взаємодії будувати [1, 2] не лише за фазами розсіяння, але й за енергією зв'язку та розмірами досліджуваних ядер, то всі основні структурні характеристики ядер ${}^6\text{Li}$ та ${}^6\text{He}$ узгоджуються з відомими експериментальними даними.

Для дослідження зв'язаних станів ядерних систем використано прецизійні розрахункові схеми на основі варіаційного методу з гаусоїдними базисами. Цей підхід продемонстрував свою високу точність і зручність у користуванні на прикладі багатьох задач на зв'язані стани в системах взаємодіючих частинок різної природи (див. [3]), в тому числі для біляпорогових слабкозв'язаних станів. Разом з тим може виникнути природна підозра, що хвильові функції у гаусоїдному представленні можуть мати неправильну асимпто-

2. Постановка задачі

Ядра ${}^6\text{He}$ (у стані $J^\pi = 0^+$) та ${}^6\text{Li}$ (в основному триплетному стані $J^\pi = 1^+$) дослідимо в межах тричастинкової моделі (α -частинка плюс два нуклони), як це описано в [1, 2]. Гамільтоніан ядра ${}^6\text{Li}$ у тричастинковій моделі вибираємо у вигляді

$$\hat{H} = \frac{\mathbf{p}_p^2}{2m_p} + \frac{\mathbf{p}_n^2}{2m_n} + \frac{\mathbf{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + V_{np}(r_{np}) + \hat{V}_{p\alpha}(r_{p\alpha}) + \hat{V}_{n\alpha}(r_{n\alpha}) + V_C(r_{p\alpha}), \quad (1)$$

де для більшої загальності вважається, що всі три частинки мають різні маси і характеризуються різними

Т а б л и ц я 1. Параметри потенціалів $\hat{V}_{n\alpha}$ та $\hat{V}_{p\alpha}$ і розраховані енергії і середньоквадратичні радіуси ядер ${}^6\text{He}$ та ${}^6\text{Li}$ (енергії і інтенсивності потенціалів вимірюються в МеВ, радіуси – у Фм)

$V_{n\alpha}$ потенціал	$E({}^6\text{He})$	$R_{ch}({}^6\text{He})$	$R_m({}^6\text{He})$	r_{nn}	$r_{n\alpha}$	R_n	R_α
$V_0(r) = -49,813 \exp(-(r/2,334)^2)$, $g = 140,0 \text{ MeV}\cdot\text{Фм}^{-3}$, $u(r) = \pi^{-3/4} \exp(-(r/2,69)^2)$	-0,973	2,068	2,589	4,398	4,221	3,252	1,208
Експеримент	-0,9734(10) [6]	2,068(11) [5]	2,59(5) [7]				
$V_{p\alpha}$ потенціал	$E({}^6\text{Li})$	$R_{ch}({}^6\text{Li})$	$R_m({}^6\text{Li})$	r_{np}	$r_{n\alpha}; r_{p\alpha}$	$R_n; R_p$	R_α
$V_0(r) = -43,605 \exp(-(r/2,323)^2)$, $g = 130,0 \text{ MeV}\cdot\text{Фм}^{-3}$, $u(r) = \pi^{-3/4} \exp(-(r/2,69)^2)$	-3,699	2,560	2,553	3,192	4,201; 4,314	3,020; 3,124	1,322
Експеримент	-3,699(1) [6]	2,56(5) [8]	2,45(7) [9]				

парними потенціалами взаємодії. Аналогічний вигляд має гамільтоніан для ядра ${}^6\text{He}$, але без кулонівського потенціалу V_C . Потенціали взаємодії між нуклонами гало використовуємо у вигляді, запропонованому в [1, 2]. Такі залежні від спіну локальні потенціали дозволяють з достатньою точністю описати фази двонуклонного розсіяння і їхні низькоенергетичні параметри, а також основні параметри дейтрона (енергію зв'язку і зарядовий радіус).

Для опису взаємодії між нуклонами і α -частинкою було вибрано комбіновані потенціали $\hat{V}_{N\alpha}$ з локальним і сепарабельним доданками:

$$\hat{V}_{N\alpha} \psi(r) = V(r)\psi(r) + gu(r) \int u(r_1)\psi(r_1)d\mathbf{r}_1, \quad (2)$$

параметри яких підганяли як за фазою розсіяння при низьких енергіях, так і за енергіями і зарядовими радіусами ядер ${}^5\text{He}$ і ${}^6\text{Li}$. У даній роботі використано потенціали з дещо уточненими параметрами (табл. 1) у зв'язку з новими експериментальними даними для зарядового радіуса ${}^6\text{He}$ ($R_{ch,{}^6\text{He}} = 2,068 \pm 0,011 \text{ Фм}$ [5]). Відповідні $S_{1/2}$ -фази $N\alpha$ -розсіяння, розраховані на основі запропонованого в [2] методу, позбавленого проблем сингулярностей фазового рівняння, узгоджуються з експериментом при енергіях до порога розвалу.

Хвильові функції ядер, що розглядаються, отримано на основі варіаційного методу у гаусоїдному представленні і мають вигляд

$$\Phi = \hat{S} \sum_{k=1}^K D_k e^{-a_k(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)^2 - b_k(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)^2 - c_k(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3)^2}. \quad (3)$$

Належну точність розрахунків отримано з використанням порядку 200 – 300 базисних функцій.

3. Одночастинкові розподіли густини

Розглянемо розподіли густини “точкових” частинок, з яких складаються ядра, що розглядаються у тричастинковій моделі. Вважаємо розподіли нормованими на одиницю.

Розподіл густини α -частинки (точніше, її центра мас) $n_\alpha(r)$ має два режими поведінки (рис. 1): внутрішній “кор” (що походить від так званої конфігурації “сигари” у тричастинковій хвильовій функції) переходить у зовнішнє “гало” (що пов'язано з наявністю у хвильовій функції конфігурації “трикутника” – див. [1, 2]). Асимптотика розподілу густини $n_\alpha(r)$ пояснюється саме властивостями конфігурації “трикутника”, яку можна уявляти як рух α -частинки і дейтронного кластера навколо спільного центра мас.

Отже, коли α -частинка відходить на значні відстані від центра мас системи, хвильова функція ψ ядра ${}^6\text{Li}$ має двокластерну структуру і відповідну асимптотику:

$$\psi(\mathbf{r}_{np}, \boldsymbol{\rho}_\alpha) \xrightarrow{\rho_\alpha \rightarrow \infty} \varphi_d(r_{np})f(\rho_\alpha), \quad (4)$$

де $\varphi_d(r_{np})$ – хвильова функція дейтрона, $f(\rho_\alpha)$ – функція відносного руху α -частинки і центра мас дейтрона (координати Якобі $\mathbf{r}_{np} \equiv \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n$ та $\boldsymbol{\rho}_\alpha \equiv \mathbf{r}_\alpha - \frac{m_p\mathbf{r}_p + m_n\mathbf{r}_n}{m_p + m_n}$). Завдяки присутності кулонівського відштовхування між α -частинкою і дейтроном, асимптотика $f(\rho_\alpha)$ має вигляд

$$f(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} C (2\kappa\rho)^{-1} W_{-\eta, 1/2}(2\kappa\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} C \frac{\exp(-\kappa\rho)}{(2\kappa\rho)^{1+\eta}}, \quad (5)$$

де $W_{-\eta, 1/2}(z)$ – функція Уїттекера,

$$W_{k,\mu}(z) \equiv$$

$$\equiv \frac{z^k e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + \mu\right)} \int_0^\infty t^{-k-\frac{1}{2}+\mu} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+\mu} e^{-t} dt,$$

$$W_{k,\mu}(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty, |\arg(z)| < \pi} e^{-\frac{z}{2}} z^k \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right), \quad (6)$$

$\eta = \frac{\mu_{\alpha d} Z e^2}{\hbar^2 \kappa} \simeq 0,30024$ – кулонівський параметр (для зведеної маси $\mu_{\alpha d} = \frac{m_\alpha(m_p+m_n)}{m_\alpha+m_p+m_n} \simeq 1248,73172$ MeB/c²), а $\kappa = \sqrt{\frac{2\mu_{\alpha d}|E(^6\text{Li})-E(d)|}{\hbar^2}} \simeq 0,3078$ Фм⁻¹. Тоді розподіл густини $n_\alpha(r)$ для α -частинки дорівнює:

$$n_\alpha(r) = \langle \psi | \delta(\mathbf{r} - (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{R}_{\text{c.m.}})) | \psi \rangle =$$

$$= \lambda_\alpha^3 \int |\psi(\mathbf{r}_{np}, \lambda_\alpha \mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}_{np}, \quad (7)$$

де $\lambda_\alpha = \frac{m_p+m_n+m_\alpha}{m_p+m_n} \simeq 2,9849318$, на великих відстанях набуває вигляду (завдяки співвідношенню (4) і умові нормування $\int |\varphi_d(r)|^2 d\mathbf{r} = 1$):

$$n_\alpha(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} n_{\alpha, \text{asympt}}(r) \equiv$$

$$\equiv C_\alpha(^6\text{Li}) \frac{W_{-\eta, 1/2}^2(2\lambda_\alpha \kappa r)}{(2\lambda_\alpha \kappa r)^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} C_\alpha(^6\text{Li}) \frac{\exp(-2\lambda_\alpha \kappa r)}{(2\lambda_\alpha \kappa r)^{2(1+\eta)}}, \quad (8)$$

причому $2\lambda_\alpha \kappa \simeq 1,8375$ Фм⁻¹. На рис. 1 показано розрахований розподіл густини $n_\alpha(r)$ (суцільна крива), а на вставці показано відношення $n_\alpha(r)$ до його асимптотики (8), а саме комбінацію $C_\alpha^{-1}(^6\text{Li}) (2\lambda_\alpha \kappa r)^2 W_{-\eta, 1/2}^{-2}(2\lambda_\alpha \kappa r) \cdot n_\alpha(r)$ (пунктирна крива). Зауважимо, що на вставці на рисунку показано відношення густини до асимптотики, бо на великих відстанях густина аномально мала. Як видно, це відношення виходить на асимптотичну константу $C_\alpha(^6\text{Li}) \simeq 4,88$ Фм⁻³ вже для $r \sim 2$ Фм і залишається сталим до значних відстаней $r \sim 8$ Фм.

Це означає, що розрахунок $n_\alpha(r)$ (для розмірності базису ~ 300 гаусових функцій) є надійним до відстаней ~ 8 Фм, де густина стає $\sim 10^{-9}$ порівняно з її значеннями поблизу нульових відстаней. Крім того, відзначимо, що показане пунктиром відношення $n_\alpha(r)/n_{\alpha, \text{asympt}}(r)$ на малих відстанях не має особливого змісту, оскільки асимптотичний вираз (8) у цій області недостовірний.

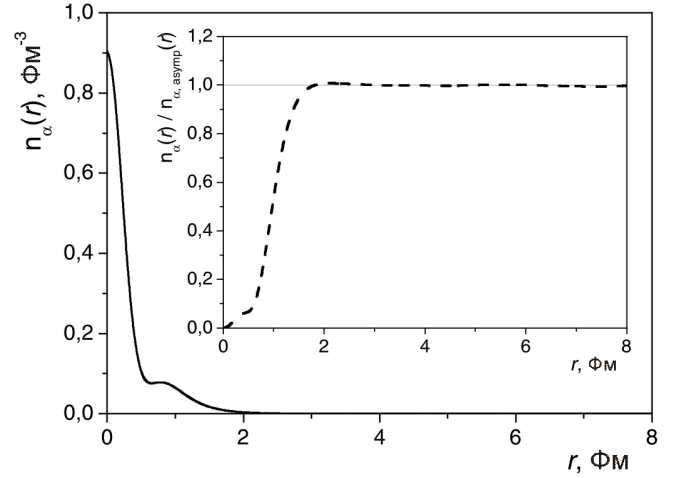


Рис. 1. Розподіл густини $n_\alpha(r)$ для α -частинки в ядрі ^6Li (суцільна крива). Пунктиром на вставці показано відношення $n_\alpha(r)$ до її асимптотики $n_{\alpha, \text{asympt}}(r)$ (8)

Розглянемо розподіл густини $n_p(r)$ протона гало в ядрі ^6Li :

$$n_p(r) = \langle \psi | \delta(\mathbf{r} - (\mathbf{r}_p - \mathbf{R}_{\text{c.m.}})) | \psi \rangle =$$

$$= \lambda_p^3 \int |\psi(\mathbf{r}_{n\alpha}, \lambda_p \mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}_{n\alpha}, \quad (9)$$

де $\lambda_p = \frac{m_p+m_n+m_\alpha}{m_n+m_\alpha} \simeq 1,201046$. Головний внесок в асимптотику $n_p(r)$ при $r \rightarrow \infty$ матимемо від тієї ж конфігурації (4). Якщо врахувати зв'язок між різними наборами координат Якобі, що використовуються в (4) і (9),

$$\mathbf{r}_{np} = \frac{m_\alpha}{m_n + m_\alpha} \mathbf{r}_{n\alpha} + \boldsymbol{\rho}_p,$$

$$\boldsymbol{\rho}_\alpha = \frac{m_n(m_p + m_n + m_\alpha)}{(m_p + m_n)(m_n + m_\alpha)} \mathbf{r}_{n\alpha} - \frac{m_p}{m_p + m_n} \boldsymbol{\rho}_p, \quad (10)$$

то з (4) отримаємо

$$n_p(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty}$$

$$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sim \int \varphi_d^2 \left(\lambda_p \mathbf{r} + \frac{m_\alpha}{m_n + m_\alpha} \mathbf{r}_{n\alpha} \right) \times$$

$$f^2 \left(\frac{m_n(m_p + m_n + m_\alpha)}{(m_p + m_n)(m_n + m_\alpha)} \mathbf{r}_{n\alpha} - \frac{m_p}{m_p + m_n} \lambda_p \mathbf{r} \right) d\mathbf{r}_{n\alpha}. \quad (11)$$

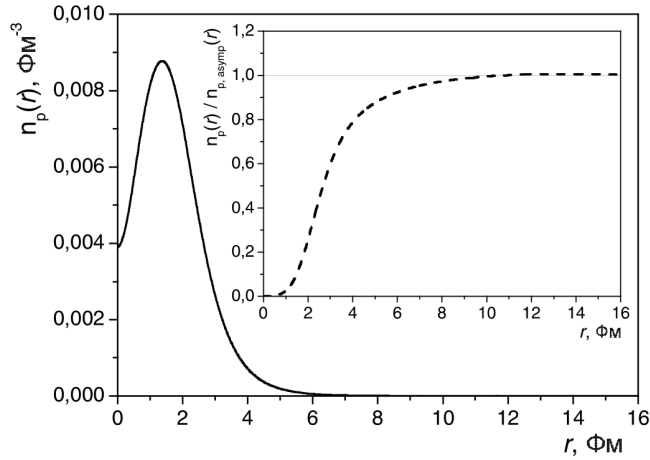


Рис. 2. Розподіл густини $n_p(r)$ для протона гало (суцільна крива) в ядрі ${}^6\text{Li}$. На вставці пунктиром показано відношення розподілу $n_p(r)$ до його асимптотики (14)

Для знаходження головного члена в асимптотиці виразу (11) використаємо метод перевалу (або метод стаціонарної фази). Коли у спадних функціях φ_d або f відповідний аргумент залишатиметься скінченим при $r \rightarrow \infty$, а сама функція незмінною, то такі дві області можуть дати головний внесок в асимптотику $n_p(r)$. Для врахування першої області зручно ввести нову змінну $\mathbf{x} \equiv \mathbf{r}_{n\alpha} + \lambda_p \frac{m_n+m_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{r}$, а для другої – зробити заміну $\mathbf{y} \equiv \mathbf{r}_{n\alpha} - \lambda_p \frac{m_p(m_n+m_\alpha)}{m_n(m_p+m_n+m_\alpha)} \mathbf{r} = \mathbf{r}_{n\alpha} - \frac{m_p}{m_n} \mathbf{r}$. Тоді у границі $r \rightarrow \infty$ отримуємо такі два основні доданки:

$$n_p(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sim f^2 \left(\frac{m_p + m_n + m_\alpha}{m_\alpha} r \right) \int \varphi_d^2 \left(\frac{m_\alpha}{m_n + m_\alpha} x \right) dx + \varphi_d^2 \left(\frac{m_p}{m_n + m_n} r \right) \int f^2 \left(\frac{m_n(m_p + m_n + m_\alpha)}{(m_p + m_n)(m_n + m_\alpha)} y \right) dy, \quad (12)$$

в яких обидва інтеграли збіжні. Враховуючи відому, незалежну від моделі короткодіяного потенціалу, асимптотику хвильової функції дейтрона, маємо

$$\varphi_d(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} C_d \frac{\exp(-\alpha r)}{\alpha r}, \quad (13)$$

де коефіцієнт C_d безпосередньо пов'язаний з асимптотичною нормувальною константою A_S дейтрона

($A_S = \frac{\sqrt{4\pi}}{\alpha} C_d \simeq 0,88 \text{ ФМ}^{-1/2}$ для вибраного потенціалу), $\alpha = \sqrt{\frac{2\mu_{np}\varepsilon_d}{\hbar^2}} \simeq 0,23163 \text{ ФМ}^{-1}$ ($\mu_{np} = \frac{m_n m_p}{m_n + m_p}$, $\varepsilon_d = 2,224756 \text{ МеВ}$), а також використовуючи асимптотику (5) для $f(\rho)$, замість (12) отримуємо:

$$n_p(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} C_{p1} ({}^6\text{Li}) (2\Lambda_{p1}\kappa r)^{-2} W_{-\eta, 1/2}^2(2\Lambda_{p1}\kappa r) + C_{p2} ({}^6\text{Li}) (2\Lambda_{p2}\alpha r)^{-2} \exp(-2\Lambda_{p2}\alpha r), \quad (14)$$

де $\Lambda_{p1} \equiv \frac{m_p+m_n+m_\alpha}{m_\alpha} \simeq 1,5037956$ і $\Lambda_{p2} \equiv \frac{m_p+m_n}{m_n} \simeq 1,99862348$. Збережено обидва члени в асимптотиці (14), оскільки в даній задачі спостерігається збіг параметрів $\Lambda_{p1}\kappa \simeq \Lambda_{p2}\alpha$ з високою для ядерної фізики точністю ($\Lambda_{p1}\kappa \simeq 0,46286 \text{ ФМ}^{-1}$ і $\Lambda_{p2}\alpha \simeq 0,46294 \text{ ФМ}^{-1}$). У результаті жодним із доданків в асимптотиці (14) для $n_p(r)$ не можна нехтувати в достатньо широкому інтервалі відстаней, що розглядаються. Зауважимо, що збіг $\Lambda_{p1}\kappa \simeq \Lambda_{p2}\alpha$ іншими словами означає, що

$$E ({}^6\text{Li}) \simeq \frac{(m_p + m_n)(m_n + m_\alpha)}{m_n(m_p + m_n + m_\alpha)} E(d) \approx \frac{5}{3} E(d). \quad (15)$$

Підкреслимо, що (15) не встановлює аналітичну залежність між три- та двочастинковими енергіями і масами частинок, а лише відображає збіг деяких комбінацій конкретних фізичних констант. Порівнюючи (14) з розрахованою густиною $n_p(r)$, можна визначити коефіцієнти $C_{p1}({}^6\text{Li})$ і $C_{p2}({}^6\text{Li})$. Як видно з рис. 2, асимптотика у вигляді (14) з коефіцієнтами $C_{p1}({}^6\text{Li}) = 0,565 \text{ ФМ}^{-3}$ і $C_{p2}({}^6\text{Li}) = 0,250 \text{ ФМ}^{-3}$ настає з відстаней $r \sim 10 \text{ ФМ}$ і далі збігається з розрахованою густиною. Чисельно знайдений розподіл густини $n_p(r)$ (із ~ 300 базисними функціями) виявляється надійним до більших відстаней $r \sim 16 \text{ ФМ}$, де $n_p(r)$ набуває величини $\sim 10^{-7}$ порівняно із його максимальним значенням.

Наголосимо, що суттєве пониження на малих відстанях розподілу густини $n_p(r)$ (так само як і $n_n(r)$) зумовлене як наявністю відштовхування на малих відстанях між нуклонами гало, так і суттєвою роллю конфігурації “трикутника” в ядрі ${}^6\text{Li}$, в якій центр мас дейтронного кластера віддалений від центра мас ядра.

Аналогічно можна отримати асимптотику розподілу густини $n_n(r)$ для нейтрона гало в ядрі ${}^6\text{Li}$:

$$n_n(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{r \rightarrow \infty} C_{n1} ({}^6\text{Li}) (2\Lambda_{n1} \kappa r)^{-2} W_{-\eta, 1/2}^2 (2\Lambda_{n1} \kappa r) + \\ & + C_{n2} ({}^6\text{Li}) (2\Lambda_{n2} \alpha r)^{-2} \exp(-2\Lambda_{n2} \alpha r), \end{aligned} \quad (16)$$

де $\Lambda_{n1} = \Lambda_{p1}$, а $\Lambda_{n2} \equiv \frac{m_p + m_n}{m_p} \simeq 2,0013784$. Оскільки $\Lambda_{n2} \alpha \simeq 0,46358 \text{ ФМ}^{-1}$, маємо майже таке ж, як і в попередньому випадку, збігання $\Lambda_{n1} \kappa \simeq \Lambda_{n2} \alpha$. Тому знову обидва доданки в (16) дають внесок в асимптотику розподілу $n_n(r)$ в широкому інтервалі відстаней, що розглядаються. Порівнюючи асимптотику (16) з розрахованим розподілом $n_n(r)$, знаходимо $C_{n1} ({}^6\text{Li}) = 0,475 \text{ ФМ}^{-3}$ і $C_{n2} ({}^6\text{Li}) = 0,222 \text{ ФМ}^{-3}$.

Оскільки в ядрі ${}^6\text{Li}$ [2] розподіл нейтронів слабо відрізняється від розподілу протонів (рис. 2), наведемо на рис. 3 відношення n_p/n_n . Це відношення на великих відстанях повинно прямувати до константи, бо в асимптотичних виразах (14), (16) перший (головний) доданок відрізняється лише загальним множником. Другі доданки хоча і важливі на проміжних відстанях, в обох виразах слабо відрізняються показниками в експоненті, тому відношення n_p/n_n повинно відносно швидко виходити на константу. Як видно з рис. 3, починаючи з відстаней $\sim 6 \text{ ФМ}$, це відношення наближається до константи $\sim 1,18$, яка більша за одиницю, бо протон гало в ${}^6\text{Li}$, завдяки кулонівському відштовхуванню від α -частинки, дещо далі розташований від центра ядра, ніж нейтрон, тоді як $n_p < n_n$ на малих відстанях.

Структура ядра ${}^6\text{He}$ у багатьох відношеннях подібна до структури ядра ${}^6\text{Li}$ [1, 2] на відстанях у межах декількох фермі, але асимптотична поведінка розподілів густини нейтронів гало і α -частинки в цих ядрах різна. Це пов'язано з тим, що ядро ${}^6\text{He}$ має тричастинковий поріг розвалу (${}^6\text{He} \rightarrow n+n+\alpha$), а не двочастинковий, як у ${}^6\text{Li}$ (${}^6\text{Li} \rightarrow d+\alpha$). Тому хвильова функція ${}^6\text{He}$ має тричастинкову асимптотику Меркур'єва [10, 11] типу $\sim \frac{\exp(-\sqrt{|E|R})}{R^{5/2}}$, де R – гіперрадіус. Для більш детального аналізу асимптотики розподілу густини $n_\alpha(r)$ для α -частинки в ядрі ${}^6\text{He}$ розглянемо хвильову функцію цієї системи у тричастинковій моделі (з моментом $L = 0$) у змінних r_{nn} (відстань між нейтронами), ρ_α (відстань від α -частинки до центра мас двох нейтронів) і θ (кут між \mathbf{r}_{nn} і $\boldsymbol{\rho}_\alpha$) – поза областю взаємодії між частинками:

$$\Phi(r_{nn}, \rho_\alpha, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \Psi_l(r_{nn}, \rho_\alpha). \quad (17)$$

Перейдемо до змінних $s_{12} = \sqrt{\mu_{nn}} r_{nn}$ та $s_3 = \sqrt{\mu_{(2n)\alpha}} \rho_\alpha$ і запишемо рівняння Шредінгера в асимптотичній області (де зникає взаємодія) окремо для

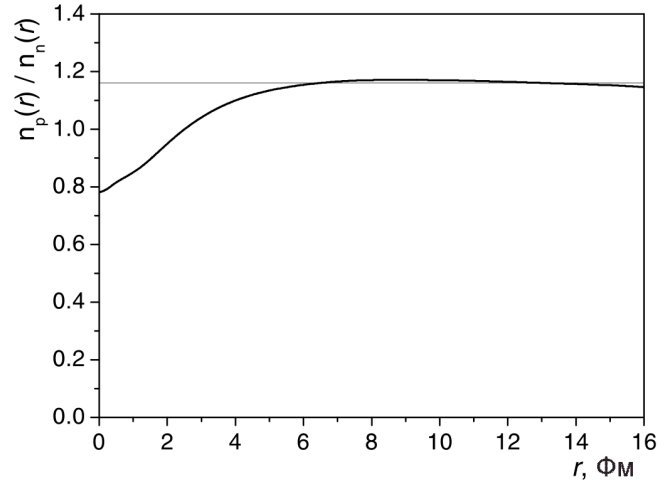


Рис. 3. Відношення розподілів густини $n_p(r)/n_n(r)$ для нуклонів гало в ядрі ${}^6\text{Li}$

нульового члена $\Psi_0(s_{12}, s_3)$ з розкладу (17). Якщо ввести $\varphi(s_{12}, s_3) \equiv s_{12}s_3\Psi_0(s_{12}, s_3)$, отримаємо рівняння

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial s_{12}^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_3^2}\right)\varphi = -\kappa^2\varphi, \quad (18)$$

де $-\kappa^2 \equiv \frac{2E({}^6\text{He})}{\hbar^2}$. У змінних $s_{12} = R \cos \alpha$, $s_3 = R \sin \alpha$ (аналогічні змінні використані у відомій роботі Єфімова [12]) для функції $u \equiv \sqrt{R}\varphi$ замість (18) отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{4}\right) u = \kappa^2 u. \quad (19)$$

Розв'язком цього рівняння, що спадає на великих відстанях (при $\rho_\alpha \rightarrow \infty$, коли одночасно і $R \rightarrow \infty$, оскільки $R = \sqrt{\mu_{nn}r_{nn}^2 + \mu_{(2n)\alpha}\rho_\alpha^2}$), буде

$$u(R, \alpha) = C \exp(-\kappa R) \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \delta\right) \quad (20)$$

для довільного δ . Повертаючись до початкових змінних, для Ψ_0 в асимптотичній області маємо

$$\begin{aligned} \Psi_0(r_{nn}, \rho_\alpha) & \sim \\ & \sim \frac{\exp(-\kappa\sqrt{\mu_{nn}r_{nn}^2 + \mu_{(2n)\alpha}\rho_\alpha^2})}{r_{nn}\rho_\alpha(\mu_{nn}r_{nn}^2 + \mu_{(2n)\alpha}\rho_\alpha^2)^{1/4}} \times \\ & \times \sin\left(\frac{1}{2} \arctg\left(\sqrt{\frac{\mu_{(2n)\alpha}}{\mu_{nn}} \frac{\rho_\alpha}{r_{nn}}}\right) + \delta\right). \end{aligned} \quad (21)$$

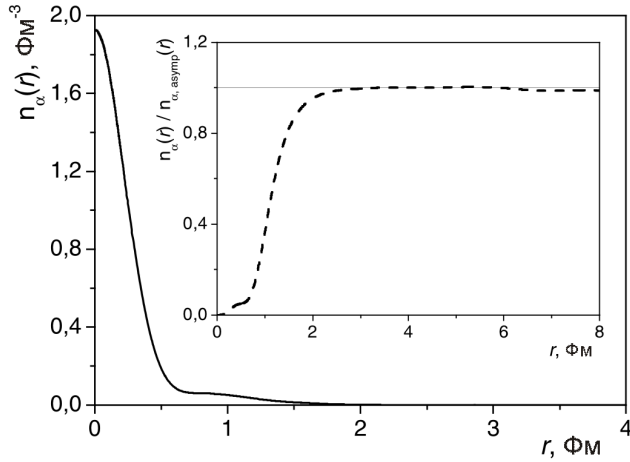


Рис. 4. Розподіл густини $n_\alpha(r)$ α -частинки в ядрі ${}^6\text{He}$ (суцільна крива). На вставці пунктиром показано відношення $n_\alpha(r)$ до $n_{\alpha,\text{asymp}}(r)$ (23)

Цей вираз дає свій внесок в асимптотику розподілу густини $n_\alpha(r)$ в ядрі ${}^6\text{He}$. Підставляючи (21) в (7) (де замість λ_α слід брати $\tilde{\lambda}_\alpha \equiv \frac{2m_n+m_\alpha}{2m_n} \simeq 2,98356566$ для ядра ${}^6\text{He}$) при $\rho_\alpha \rightarrow \infty$ отримуємо таку оцінку:

$$\begin{aligned} & \int |\Psi_0(r_{nn}, \tilde{\lambda}_\alpha r)|^2 dr_{nn} \xrightarrow{\rho_\alpha \rightarrow \infty} \\ & \xrightarrow{\rho_\alpha \rightarrow \infty} \sim \frac{e^{(-2\kappa \sqrt{\mu(2n),\alpha} \rho_\alpha)}}{\rho_\alpha^3} \times \\ & \times \int \frac{e^{(-2\kappa(\sqrt{\mu_{nn}r_{nn}^2 + \mu(2n),\alpha} \rho_\alpha^2 - \sqrt{\mu(2n),\alpha} \rho_\alpha))}}{r_{nn}^2} dr_{nn} \xrightarrow{\rho_\alpha \rightarrow \infty} \\ & \xrightarrow{\rho_\alpha \rightarrow \infty} \sim \frac{e^{(-2\kappa \sqrt{\mu(2n),\alpha} \rho_\alpha)}}{\rho_\alpha^3} \times \\ & \times \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\kappa \mu_{nn} r_{nn}^2}{\sqrt{\mu(2n),\alpha} \rho_\alpha}\right) dr_{nn} \xrightarrow{\rho_\alpha \rightarrow \infty} \\ & \xrightarrow{\rho_\alpha \rightarrow \infty} \sim \frac{e^{(-2\kappa \sqrt{\mu(2n),\alpha} \tilde{\lambda}_\alpha r)}}{r^{5/2}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Зрозуміло, що в асимптотиці $n_\alpha(r)$ будуть присутні і подальші члени розкладу за оберненими степенями відстані:

$$n_\alpha(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-ar}}{(ar)^{5/2}} \left(C_{\alpha 0} + \frac{C_{\alpha 1}}{ar} + \dots \right), \quad (23)$$

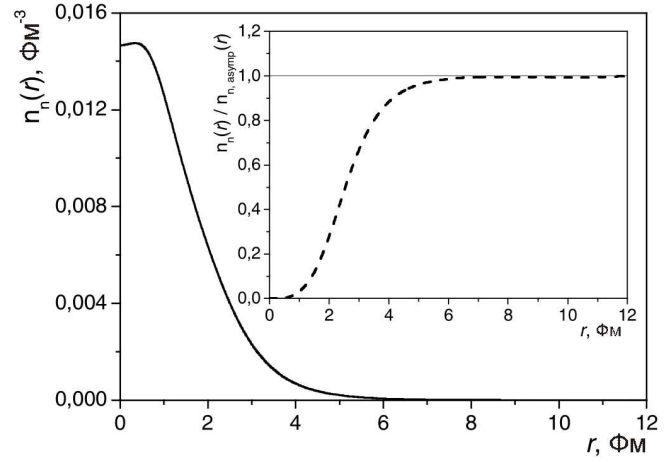


Рис. 5. Розподіл густини $n_n(r)$ нейтронів гало в ядрі ${}^6\text{He}$ (суцільна крива). На вставці пунктиром показано відношення $n_n(r)$ до його асимптотики (24)

де $a \equiv 2\kappa \sqrt{\mu(2n),\alpha} \tilde{\lambda}_\alpha \simeq 1,49133 \text{ Фм}^{-1}$. Порівнюючи (23) з розрахунком розподілу густини (див. рис. 4), врахуємо, крім першого, також другий член розкладу, бо константа $C_{\alpha 0} = 0,10 \text{ Фм}^{-3}$ виявляється малою порівняно з $C_{\alpha 1} = 2,43 \text{ Фм}^{-3}$, і в досліджуваній області не дуже великих r обидва доданки важливі. Як видно, асимптотика (23) настає від $r \sim 2 \text{ Фм}$ і підтверджується числовими розрахунками (~ 350 базисних функцій) до відстаней $r \sim 8 \text{ Фм}$, де $n_\alpha(r)$ набуває значень $\sim 10^{-9}$ порівняно зі значеннями на нульових відстанях.

Розглянемо асимптотику розподілу густини нейтронів гало $n_n(r) = \langle \psi | \delta(\mathbf{r} - (\mathbf{r}_n - \mathbf{R}_{\text{с.м.}})) | \psi \rangle$ в ядрі ${}^6\text{He}$. Використовуючи викладки, подібні до (22), для $n_n(r)$ отримуємо (аналогічна асимптотика спостерігається і для тринуклонних ядер [13]):

$$n_n(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-br}}{(br)^{5/2}} \left(C_{n0} + \frac{C_{n1}}{br} + \dots \right), \quad (24)$$

де $b \equiv 2\kappa \sqrt{2m_n} \simeq 0,61303 \text{ Фм}^{-1}$. Порівнюючи асимптотичний вираз (24) з розрахунком $n_n(r)$ для ядра ${}^6\text{He}$ (див. рис.5), знаходимо $C_{n0} = 0,04 \text{ Фм}^{-3}$ і $C_{n1} = 0,11 \text{ Фм}^{-3}$. Як видно, асимптотика (24) вступає в силу з відстаней $\sim 6 \text{ Фм}$, і до відстаней $\sim 12 \text{ Фм}$ розрахунок $n_n(r)$ залишається надійним (з ~ 250 функціями базису, симетризованими відносно перестановки координат нейтронів гало).

Таким чином, асимптотики хвильових функцій і розподілів густини можна досліджувати за допомогою варіаційних розрахунків з гаусоїдним базисом, і на основі таких розрахунків можна впевнено визначати асимптотичні константи. Асимптотики розподілів

густини носять, як правило, універсальний характер, бо розглядаються в області, де ядра взаємодія не проявляється.

4. Формфактори для малих переданих імпульсів

Зарядові формфактори ядер ${}^6\text{Li}$ та ${}^6\text{He}$, як відомо, мають структуру із характерним “провалом” при деякому q_{min}^2 ($q_{\text{min}}^2 \simeq 8,3 \text{ ФМ}^{-2}$ для ${}^6\text{Li}$ та $q_{\text{min}}^2 \simeq 10,1 \text{ ФМ}^{-2}$ для ${}^6\text{He}$). Нагадаємо, що у стандартному підході врахування неточковості складових частинок (нуклонів і α -частинки) формфактори цих ядер можна подати у вигляді

$$F_{\text{ch}, {}^6\text{He}}(q) = F_{\alpha, {}^6\text{He}}(q)F_{\text{ch}, {}^4\text{He}}(q),$$

$$F_{\text{ch}, {}^6\text{Li}}(q) = \frac{2}{3}F_{\alpha, {}^6\text{Li}}(q)F_{\text{ch}, {}^4\text{He}}(q) + \frac{1}{3}F_p(q)f_p(q), \quad (25)$$

де $F_{\alpha}(q) \equiv \int e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{r})}n_{\alpha}(r)d\mathbf{r}$ – формфактор “точкової” α -частинки у відповідному ядрі, $F_{\text{ch}, {}^4\text{He}}(q)$ – власний зарядовий формфактор α -частинки, $F_p(q) \equiv \int e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{r})}n_p(r)d\mathbf{r}$ – формфактор “точкового” протона гало в ядрі ${}^6\text{Li}$, а $f_p(q)$ – формфактор самого протона. Наявність “провалу” у зарядовому формфакторі ядра ${}^6\text{He}$ і його положення пов’язані із властивостями власного формфактора α -частинки, тоді як $F_{\alpha}(q)$ є плавно спадною функцією без особливостей. У зарядовий формфактор ядра ${}^6\text{Li}$ суттєвий внесок дає також другий доданок із (25), що містить формфактор протона.

Розглянемо формфактор “точкового” протона гало в ядрі ${}^6\text{Li}$. При малих переданих імпульсах

$$\begin{aligned} F_p(q^2) &\xrightarrow{q \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{6} \langle r_p^2 \rangle q^2 + \frac{1}{120} \langle r_p^4 \rangle q^4 + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \langle r^{2k} \rangle q^{2k}, \end{aligned} \quad (26)$$

де $\langle r_p^2 \rangle^{1/2} = R_p \simeq 3,124 \text{ ФМ}$ – середньоквадратичний радіус для протона гало (див. табл. 1), а $\langle r_p^4 \rangle^{1/4} = (\int r^4 n_p(r) d\mathbf{r})^{1/4} \simeq 3,725 \text{ ФМ}$ (отримано у безпосередньому розрахунку з розподілом густини $n_p(r)$ в ядрі ${}^6\text{Li}$).

Як видно з рис. 6, формальний розклад (26) незручний для дослідження формфакторів при малих переданих імпульсах, зокрема, для надійного визначення середньоквадратичних радіусів безпосередньо

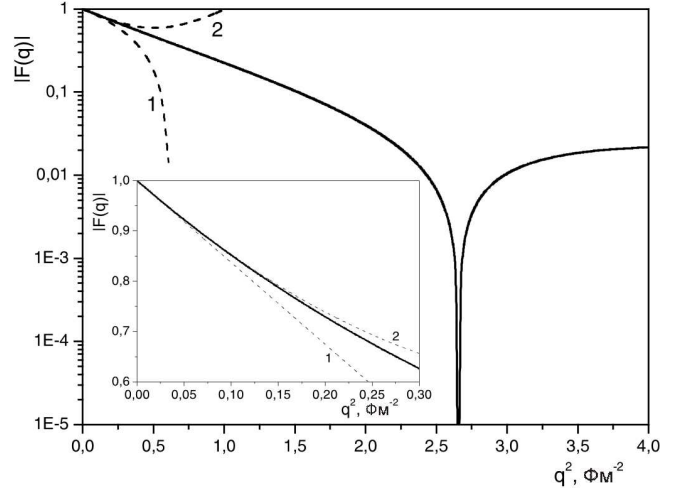


Рис. 6. Формфактор $F_p(q)$ “точкового” протона гало для ядра ${}^6\text{Li}$ (суцільна крива) в області малих переданих імпульсів q^2 . Криві 1 і 2 – наближення (26) з двома і трьома доданками відповідно. На вставці показана область дуже малих q^2

з кривих для формфакторів, бо члени ряду (26) при зростанні переданого імпульсу швидко починають зростати, а формфактор швидко спадає. У результаті лише для аномально малих q^2 розклад (26) збігається з формфактором. Пропонуємо розглядати розклад по q^2 у формі

$$F_p(q^2) \simeq \frac{1 - \frac{q^2}{q_{\text{min}}^2}}{1 + S_2 q^2 + S_4 q^4 + \dots},$$

$$S_2 \equiv \frac{R_p^2}{6} - \frac{1}{q_{\text{min}}^2},$$

$$S_4 \equiv \frac{R_p^2}{6} \left(\frac{R_p^2}{6} - \frac{1}{q_{\text{min}}^2} \right) - \frac{\langle r^4 \rangle}{120}, \quad (27)$$

де в явному вигляді виділено множник $1 - \frac{q^2}{q_{\text{min}}^2}$, що враховує наявність “провалу” у формфакторі, а розклад за степенями q^2 проводять у знаменнику. Вираз (27) має той самий розклад за степенями q^2 (до q^4 включно), що і (26), але значно краще описує формфактор при малих переданих імпульсах і навіть до області “провалу” ($0 \leq q^2 \leq q_{\text{min}}^2 \simeq 2,64 \text{ ФМ}^{-2}$). Зауважимо, що у випадку наявності більшої кількості “провалів” у формфакторі, їх краще явно виділяти у вигляді множників, як це зроблено в чисельнику (27). Очевидно, якщо формфактор не має “провалів”, то залишається більш зручним розкладати у

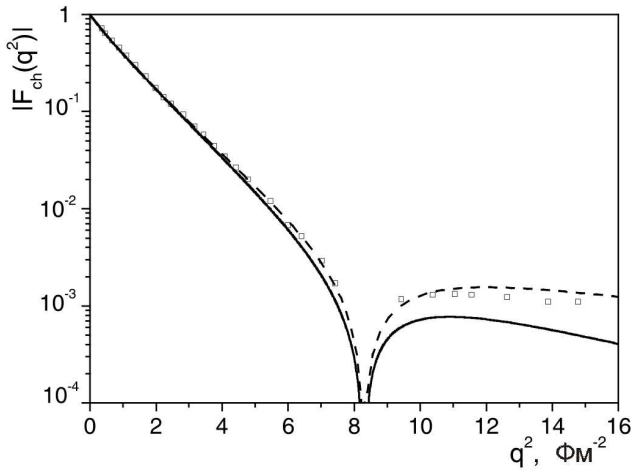


Рис. 7. Зарядовий формфактор $F_{ch}(q)$ ядра ${}^6\text{Li}$ (суцільна крива) та представлення (28) (пунктирна крива). Квадратиками позначено експериментальні значення (без експериментальних похибок)

ряд за квадратом переданого імпульсу саме обернений формфактор.

Запропонований розклад (27) дозволяє розширити область q^2 для більш надійного визначення параметра $\langle r^2 \rangle^{1/2}$, а також оцінити $\langle r^4 \rangle^{1/4}$ безпосередньо з експериментальних кривих для формфакторів. Якщо розглянути зарядовий формфактор ядра ${}^6\text{Li}$ при малих і середніх q^2 до області “провалу”, то розклад типу (27) повинен містити ще більше доданків для правильного опису формфактора в цій області q^2 . Це пояснюється тим, що q_{\min}^2 для цього випадку суттєво більше, порядку $8,3 \text{ Фм}^{-2}$. На рис. 7 порівнюємо експериментальний формфактор з тим, що подано виразом:

$$F_{ch, {}^6\text{Li}}(q) \simeq \frac{1 - \frac{q^2}{q_{\min}^2}}{1 + \tilde{S}_2 q^2 + \tilde{S}_4 q^4 + \tilde{S}_6 q^6 + \tilde{S}_8 q^8},$$

$$\tilde{S}_2 \equiv \frac{R_{ch}^2}{6} - \frac{1}{q_{\min}^2},$$

$$\tilde{S}_4 \equiv \frac{R_{ch}^2}{6} \left(\frac{R_{ch}^2}{6} - \frac{1}{q_{\min}^2} \right) - \frac{\langle r^4 \rangle_{ch}}{120},$$

$$\tilde{S}_6 \equiv \frac{\langle r^6 \rangle_{ch}}{7!} + 2\tilde{S}_2\tilde{S}_4 - \tilde{S}_2^3 + \left(\tilde{S}_4 - \tilde{S}_2^2 \right) \frac{1}{q_{\min}^2},$$

$$\tilde{S}_8 \equiv \tilde{S}_2^4 + \tilde{S}_4^2 + 2\tilde{S}_2\tilde{S}_6 - 3\tilde{S}_2^2\tilde{S}_4 +$$

$$+ \left(\tilde{S}_2^3 + \tilde{S}_6 - 2\tilde{S}_2\tilde{S}_4 \right) \frac{1}{q_{\min}^2} - \frac{\langle r^8 \rangle_{ch}}{9!}, \quad (28)$$

а також із прямим розрахунком зарядового формфактора для ядра ${}^6\text{Li}$. Розклад виразу (28) за степенями q^2 збігається з (26) з точністю до q^8 включно. У (28) підставляємо такі параметри: $q_{\min}^2 \simeq 8,3 \text{ Фм}^{-2}$ і $R_{ch} = 2,56 \text{ Фм}$ [7] – експериментальні значення, у той час як $\langle r^4 \rangle_{ch}^{1/4} = 3,19 \text{ Фм}$, $\tilde{S}_6 = 0,07 \text{ Фм}^6$, $\tilde{S}_8 = 0,006 \text{ Фм}^8$ підігнані так, щоб узгодити криву для формфактора з експериментом. Прямий розрахунок параметра $\langle r^4 \rangle_{ch}^{1/4} \simeq 3,15 \text{ Фм}$ через зарядову густину ядра ${}^6\text{Li}$ дає близький результат до того, який підігнано по кривій для формфактора. Отже, розклад типу (28) дає можливість визначати навіть параметр $\langle r^4 \rangle_{ch}^{1/4}$, а не тільки R_{ch} , за експериментальною кривою для формфактора. Разом з тим використання розкладу вигляду (26) може дати значні похибки навіть для R_{ch} . Відзначимо, що завдяки своїй конструкції представлення (28), як видно з рис. 7, здатне передати експериментальний формфактор навіть і в області за “провалом”.

Якби був відомий експериментальний зарядовий формфактор для ядра ${}^6\text{He}$, можна було б знайти оцінку для $\langle r^4 \rangle_{ch}^{1/4}$ і в цьому випадку та порівняти з величиною $\langle r^4 \rangle_{ch}^{1/4} \simeq 2,39 \text{ Фм}$, що впливає з прямого розрахунку через зарядову густину для цього ядра. Цікаво, що наближення типу (28) із зазначеними вище параметрами для $R_{ch, {}^6\text{He}}$, $\langle r^4 \rangle_{ch, {}^6\text{He}}^{1/4}$ та q_{\min}^2 , а також $S_6 = 0,02 \text{ Фм}^6$ і $S_8 = 0,003 \text{ Фм}^8$ практично збігається з розрахованим формфактором в області малих та середніх q^2 , що відображено на рис. 8.

Нагадаємо, що зарядовий радіус ${}^6\text{He}$ помітно менший за аналогічний параметр ядра ${}^6\text{Li}$ (хоча масові радіуси близькі), оскільки гало ядра ${}^6\text{Li}$ містить протон, який дає внесок у розподіл густини заряду цього ядра на додаток до того, що дає α -частинка, тоді як зарядовий радіус ${}^6\text{He}$ зумовлений лише рухом α -частинки (та її власним розподілом заряду). З тієї ж причини і $\langle r^4 \rangle_{ch, {}^6\text{He}}^{1/4} < \langle r^4 \rangle_{ch, {}^6\text{Li}}^{1/4}$ (див. табл. 2). Зауважимо також, що в усіх розглянутих випадках

Т а б л и ц я 2. Розрахункові зарядові радіуси та $\langle r^4 \rangle_{ch}^{1/4}$ для ядер ${}^6\text{Li}$ і ${}^6\text{He}$

Ядро	$R_{ch}, \text{ Фм}$	$\langle r^4 \rangle_{ch}^{1/4}, \text{ Фм}$
${}^6\text{Li}$	2,560	3,15
${}^6\text{He}$	2,068	2,39

$\langle r^2 \rangle^{1/2} < \langle r^4 \rangle^{1/4}$ завдяки нерівності

$$\left(\int r^2 n(r) d\mathbf{r} \right)^2 < \int r^4 n(r) d\mathbf{r} \quad (29)$$

(яка є частинним випадком нерівності Коші–Буняковського–Шварца для функцій $f(r) \equiv r^2 \sqrt{n(r)}$ і $g(r) \equiv \sqrt{n(r)}$ з урахуванням умови нормування $\int n(r) d\mathbf{r} = 1$).

5. Проблема асимптотики формфакторів

Вивчення асимптотик формфакторів складних ядерних систем при великих переданих імпульсах (що відповідають малим відстаням у координатному просторі) може бути важливе для аналізу як міжчастинкової взаємодії на малих відстанях, так і структури складових частинок системи. І взаємодія, і структура складових частинок у нашій моделі ядер ${}^6\text{Li}$ і ${}^6\text{He}$ враховуються на феноменологічному рівні.

Асимптотики формфакторів складних ядерних систем у межах нерелятивістичного підходу з певними потенціалами взаємодії досліджено в низці робіт [14–18]. Підсумковий результат цих досліджень полягає в тому, що формфактори для систем трьох тотожних частинок визначаються через компоненти фур'є-потенціалів взаємодії $v(q)$ у вигляді

$$F(q) \sim \left(\frac{v(q)}{q^2} \right)^2, \quad (30)$$

якщо закон спадання потенціалів при великих імпульсах задовольняє умови

$$v(q) q^{1+\varepsilon} \rightarrow 0, \quad v(q) \exp(aq^{1-\varepsilon}) \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Гаусоїдальні потенціали, які ми використовуємо, не задовольняють другу з цих умов.

Навіть якщо обмежитись нерелятивістичним наближенням з вибраними потенціалами у вигляді комбінації гаусоїд (з локальним і нелокальним доданком у випадку $N\alpha$ -взаємодії), то і тоді аналіз асимптотик формфакторів не є простим і не зводиться до простого узагальнення результату [14–16] (а також [17] для ядер як фермі-систем), відомого для випадку степеневих (в імпульсному представленні) потенціалів взаємодії.

Розглянемо ядро ${}^6\text{Li}$ і формфактор $F_\alpha(q)$ для “точкової” α -частинки в цьому ядрі. На рис. 9 наведено розрахований у тричастинковій моделі формфактор $F_\alpha(q)$. Видно наявність двох режимів поведінки формфактора (аналогічно імпульсному розподілу

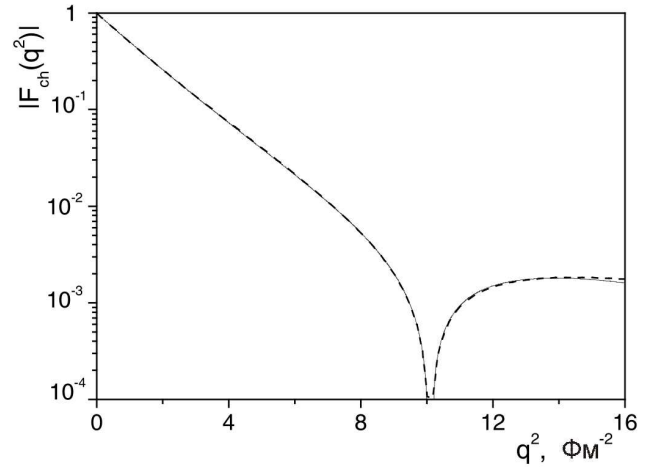


Рис. 8. Розрахований зарядовий формфактор ядра ${}^6\text{He}$ (суцільна крива) у порівнянні з наближенням типу (28) (пунктир)

для α -частинки в ядрі ${}^6\text{Li}$ [2]) залежно від квадрата переданого імпульсу, і така залежність виявляється відносно повільно спадною функцією. Це можна пояснити тим, що взаємодія α -частинки з дейтронним кластером визначається (на якісному рівні) подвоєним потенціалом $V_{N\alpha}$, що містить локальне притягування у вигляді гаусоїди і сепарабельне (першого рангу) відштовхування з гаусоїдним формфактором. Тоді у двочастинковому наближенні (α -частинка плюс дейтрон) для такого потенціалу, як можна показати, асимптотика формфактора (подібно до двочастинкової хвильової функції в імпульсному просторі) буде мати спадання типу

$$F(q) \sim \frac{1}{q + q_0} \exp(-\lambda(q + p_0) \sqrt{\ln(\beta((q + p_0)^2 + a^2))}). \quad (32)$$

З рис. 9 видно, що і в реальному тричастинковому розрахунку при $q^2 \leq 10 \text{ Фм}^{-2}$ (в області переданих імпульсів, яка пояснюється конфігурацією “трикутника”) формфактор $F_\alpha(q)$ має дуже схожу поведінку (пунктирна крива 1). Річ у тім, що середня кінетична енергія α -частинки в ядрі ${}^6\text{Li}$ становить [2] близько 3 MeV, що відповідає $q^2 \sim 0,6 \text{ Фм}^{-2}$. Тому область $q^2 \leq 10 \text{ Фм}^{-2}$ вже можна було б вважати асимптотичною (якби не аномальна зміна режимів поведінки за рахунок конфігурації “сигари”). Якби задача була істинно двочастинковою з гаусоїдним потенціалом притягування, можна було б вказати явні вирази для параметрів з (32) через радіус і інтенсивність потенціалу (зокрема, λ була б пропорційною

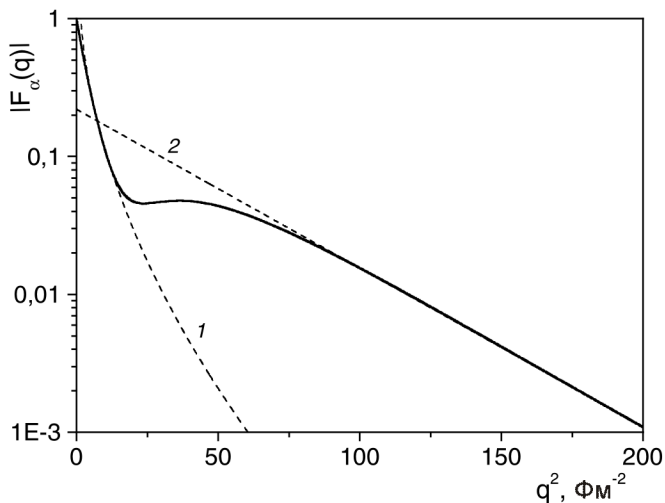


Рис. 9. Розрахунковий формфактор $F_\alpha(q)$ для α -частинки в ядрі ${}^6\text{Li}$ (суцільна крива) в області переданих імпульсів $q^2 \leq 200 \text{ Фм}^{-2}$. Пунктиром 1 показано асимптотику (32), а пунктиром 2 – інтерполяційну криву $\sim \exp(-0,0265q^2)$

радіусу гаусоїди). Оскільки насправді маємо справу з більш складною (тричастинковою) задачею і вираз (32) скоріше лише нагадує справжню асимптотику, то параметри в (32) підганялися. Порівняння із розрахунковою кривою дає $\lambda \simeq 0,377 \text{ Фм}$, $\beta \simeq 0,7 \text{ Фм}^2$, а від решти параметрів, крім загального множника, асимптотична крива залежить слабо, і для простоти покладено $q_0 = 1 \text{ Фм}^{-1}$, $p_0 = 0 \text{ Фм}^{-1}$, $a^2 = 1 \text{ Фм}^{-2}$.

Для більших переданих імпульсів ($q^2 \geq 50 \text{ Фм}^{-2}$) в асимптотиці формфактора $F_\alpha(q)$ проявляється другий режим, який зобов'язаний конфігурації “сигари”. У розподілі густини $n_\alpha(r)$ за цей внесок в асимптотику формфактора відповідальна центральна частина, схожа на гаусоїду невеликого радіуса (див. рис. 1), тому і фур'є-перетворення від неї виявляється дуже схожим на гаусоїду (на рис. 9 ця область формфактора інтерполюється пунктирною кривою 2, яка спадає за законом $\sim \exp(-0,0265q^2)$). Однак ця залежність за дуже великих q^2 (поза межами досяжності нашого розрахунку, який для ~ 300 базисних функцій досягає $q^2 \sim 600 \text{ Фм}^{-2}$) знову повинна поступитися, для чого є вагомі міркування, справжній асимптотиці типу (32), що походить від конфігурації “трикутника”, бо остання має більш повільний закон спадання. Пунктирні криві 1 і 2 на рис. 9 перетнуться в області $q^2 \sim 1500 \text{ Фм}^{-2}$, що знаходиться поза межами нерелятивістичної потенціальної моделі.

Розглянемо тепер формфактор $F_p(q)$ протона гало в ядрі ${}^6\text{Li}$ (без урахування структури самого прото-

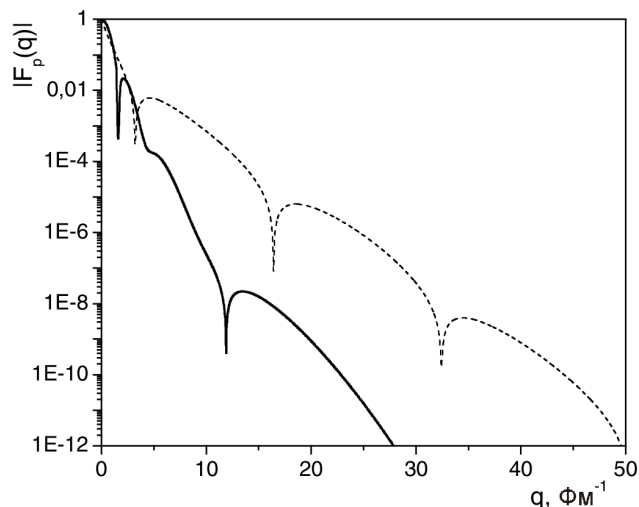


Рис. 10. Розрахунковий формфактор $F_p(q)$ протона гало в ядрі ${}^6\text{Li}$ (суцільна крива) у порівнянні з розрахунковим формфактором протона в дейтроні $F_{p(d)}(q)$ (пунктир)

на). На рис. 10 наведено розрахований формфактор $F_p(q)$ (суцільна крива), в структурі якого, крім “провалів”, спостерігається зміна режимів загального спадання (в області $q \sim 5 \text{ Фм}^{-1}$). Така зміна режимів пояснюється знову ж тим, що при $q \leq 5 \text{ Фм}^{-1}$ в поведінці формфактора проявляється конфігурація “трикутника”, а при $q \geq 5 \text{ Фм}^{-1}$ – конфігурація “сигари”.

На якісному рівні пояснення характерної поведінки $F_p(q)$ можна припустити, що головний внесок в асимптотику дає конфігурація “трикутника”, в якій α -частинка і дейтронний кластер рухаються навколо спільного центра мас. Це пов'язано не лише з тим, що ймовірність цієї конфігурації в ядрі ${}^6\text{Li}$ більша [2], ніж ймовірність конфігурації “сигари”, але і з тим, що саме в цій конфігурації короткодійна взаємодія між протоном і нейтроном гало може сильніше проявити себе у хвильовій функції системи і дати найбільший внесок в асимптотику формфактора (нагадаємо, що решта потенціалів у нашій тричастинковій моделі ядра ${}^6\text{Li}$ мають суттєво більші радіуси, і тому природно думати, що вони можуть менше впливати на асимптотику формфактора $F_p(q)$). Зроблене припущення зводить формфактор $F_p(q)$ наближено до добутку формфактора $F_{p(d)}(q)$ протона в дейтроні на формфактор $F_d(q)$ центра мас дейтронного кластера в ядрі ${}^6\text{Li}$. Оскільки рух центра мас дейтронного кластера і рух α -кластера в ядрі ${}^6\text{Li}$ безпосередньо пов'язані між собою (через нерухомий центр мас усього ядра), матимемо $F_p(q) \simeq F_{p(d)}(q)F_d(q) \equiv F_{p(d)}(q)F_\alpha(\frac{m_\alpha}{m_n+m_p}q)$.

Отже, з точністю до відносно повільно спадного множника $F_\alpha(\frac{m_\alpha}{m_n+m_p}q)$ асимптотичні особливості поведінки формфакторів $F_p(q)$ (у системі трьох частинок) можуть нагадувати поведінку $F_{p(d)}(q)$ (у системі двох частинок). Більше того, згадана вище зміна режимів спадання формфактора $F_p(q)$ при $q \sim 5 \text{ ФМ}^{-1}$ пов'язана зі зміною режимів спадання формфактора $F_\alpha(q)$ при $q \sim 10 \text{ ФМ}^{-1}$, а наявність провалів у формфакторі $F_p(q)$ може бути пов'язана з наявністю нескінченної кількості провалів у формфакторі $F_{p(d)}(q)$ (рис. 10, пунктир). Тому коротко зупинимося (більш детально це буде розглянуто окремо) на проблемі асимптотики формфактора дейтрона $F_d(q)$ (у межах потенціальної моделі, опускаючи питання про власний формфактор протона):

$$\begin{aligned} F_{p(d)}(q) &\equiv \int e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{r})} n_{p(d)}(r) d\mathbf{r} = \\ &= \int e^{-i\frac{m_n}{m_p+m_n}(\mathbf{q}\mathbf{r})} |\varphi_d(r)|^2 d\mathbf{r} = \\ &= \int \psi_d^*(p) \psi_d\left(\left|\mathbf{p} + \frac{m_n}{m_n+m_p}\mathbf{q}\right|\right) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (33)$$

У формулі (33) через $\varphi_d(r)$ і $\psi_d(q)$ позначено хвильову функцію двочастинкової системи (дейтрона) в координатному та імпульсному представленнях відповідно. Якби потенціал взаємодії в імпульсному представленні спадав за степеневим законом $v(p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{p^S}$ (що справедливо, зокрема, для потенціалів Юкави), то для великих імпульсів, як це безпосередньо впливає з рівняння Шредінгера, асимптотика хвильової функції $\psi_d(p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \sim \frac{v(p)}{p^2} \sim \frac{1}{p^{S+2}}$. Тоді з виразу (33) було б ясно, що і для формфактора за великих переданих імпульсів

$$\begin{aligned} F_{p(d)}(q) &\xrightarrow{q \rightarrow \infty} \sim \psi_d\left(\frac{m_n}{m_n+m_p}q + p_0\right) \sim \\ &\sim \frac{v\left(\frac{m_n}{m_n+m_p}q + p_0\right)}{q^2}, \end{aligned} \quad (34)$$

що лише для степеневих потенціалів збігається з $\sim \frac{v(q)}{q^2} \sim \frac{1}{q^{S+2}}$, відповідно до [14–18].

Однак далеко не для всякої форми потенціалу $v(q)$ залишається справедливою оцінка $F(q) \sim \frac{v(q)}{q^2}$ (як це припускається в [18]). Вже для потенціалів з експоненціальною залежністю від імпульсу $v(q) \sim$

$\exp(-\beta q^{1-\varepsilon})$ залишається справедливою оцінка (34) з важливим коефіцієнтом $\frac{m_n}{m_n+m_p}$ при переданому імпульсі, що суттєво впливає на закон спадання формфактора. Якщо ж розглянути потенціал $v(q)$, який спадає швидше, ніж розв'язок $\psi_d(q)$, асимптотика $F(q)$ суттєво відрізнятиметься від (34), що, зокрема, має місце для потенціалів у вигляді гаусоїди $v(q) = -g \exp(-aq^2)$. Тоді в асимптотичній області великих імпульсів, як можна показати, для формфактора двочастинкової системи буде справедливою асимптотика типу (32), що не зводиться до (34). Отже, асимптотика формфактора $F(q) \sim \frac{v(q)}{q^2}$ для степеневих (в імпульсному представленні) потенціалів не поширюється на всі можливі форми потенціалів. Більше того, для потенціалів з притягувальною і відштовхувальною гаусоїдами (зокрема, для триплетного потенціалу $V_{np}(r) = 840,545 e^{-(r/0,44)^2} - 146,046 e^{-(r/1,271)^2}$, який використовуємо в нашій моделі ядра ${}^6\text{Li}$ для опису взаємодії між протоном і нейтроном) хвильова функція в імпульсному представленні характеризується, крім загального спадання, також осциляціями, що безпосередньо проявляється у формфакторі (пунктир на рис. 10).

Отже, навіть у випадку двох нуклонів із гаусоїдними потенціалами асимптотика формфакторів виявляється нетривіальною. Для ядер, що розглядаються у даній роботі, вдається на якісному рівні зрозуміти також характер поведінки формфакторів у тричастинкових системах (як для наведених вище $F_\alpha(q)$ і $F_p(q)$). Але загальна проблема асимптотики формфакторів більш складних систем, ніж двонуклонна, у випадку гаусоїдних потенціалів взаємодії між частинками є відкритою.

6. Висновки

У підсумку зазначимо, що варіаційні розрахунки з гаусоїдним базисом дозволяють виконати аналіз асимптотик розподілів густини на великих (в ядерних масштабах) відстанях. Для ядер ${}^6\text{Li}$ та ${}^6\text{He}$, хвильові функції яких не сильно відрізняються в області взаємодії, показано, що асимптотичні закони спадання розподілів густини суттєво відрізняються (як для частинок гало, так і для α -частинки), бо ці ядра мають принципово різні пороги розвалу (двочастинковий поріг у ядра ${}^6\text{Li}$ та тричастинковий у ядра ${}^6\text{He}$). Виявлено, що для асимптотики розподілів густини нуклонів гало в ядрі ${}^6\text{Li}$ на значних відстанях важливі принаймні два конкуруючих доданки з близькими показниками в експонентах. Для вивчення розподілу

густини нейтронів гало в ядрі ${}^6\text{He}$ (що характеризується тричастинковим порогом розвалу) на відстанях до десятків Фм необхідно враховувати, крім першого, також другий член розкладу асимптотики за степенями $\sim \frac{1}{r}$, бо він входить із суттєво більшим коефіцієнтом.

Аналіз поведінки зарядових формфакторів ядер ${}^6\text{Li}$ та ${}^6\text{He}$ при малих переданих імпульсах дозволить надійно обчислити середньо-четвертичний радіус $\langle r^4 \rangle^{1/4}$. Запропоновано процедуру виділення з осцилюючих формфакторів множників $1 - \frac{q^2}{q_{\min}^2}$ і переходу до розкладу за степенями q^2 оберненої до формфактора величини, що дозволяє розширити область застосовності розкладів по q^2 і більш впевнено визначати $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ та $\langle r^4 \rangle^{1/4}$ з кривих для формфакторів.

Для формфакторів $F_\alpha(q)$ та $F_p(q)$ показано, що у випадку гаусоїдних потенціалів взаємодії асимптотика формфакторів при великих переданих імпульсах не зводиться до $F(q) \sim \left(\frac{v(q)}{q^2}\right)^{A-1}$, як це декларується в літературі (див. [18]).

Взагалі для широкого кола потенціалів взаємодії і складних квантових систем низка проблем асимптотики формфакторів залишається відкритою і потребує додаткового розгляду.

1. Б.Є. Гринюк, І.В. Сименюг, ЯФ **72**, 10 (2009).
2. В.Е. Grinyuk, I.V. Simenog, Ядерна фізика та енергетика **10**, 9 (2009).
3. Y. Sudzuki and K. Varga, *Stochastic Variational Approach to Quantum-Mechanical Few-Body Problems* (Springer, Berlin, 1998).
4. М.В. Кузьменко, І.В. Сименюг, ЖФД (у друці).
5. P. Mueller, I.A. Sulai, A.C.C. Villari *et al.*, Phys. Rev. Lett. **99**, 252501 (2007).
6. G. Audi and A.H. Wapstra, Nucl. Phys. A **595**, 409 (1995).
7. B.V. Danilin, S.N. Ershov, and J.S. Vaagen., Phys. Rev. C **71**, 057301 (2005).
8. H. De Vries, C.W. De Jager, and C. De Vries, At. Data Nucl. Data Tables **36**, 495 (1987).
9. P. Egelhof, G.D. Alkhozov, M.N. Andronenko *et al.*, Eur. Phys. J. A **15**, 27 (2002).
10. С.П. Меркурьев, ЯФ **19**, 447 (1974).
11. С.П. Меркурьев, Л.Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц* (Наука, Москва, 1985).
12. В. Ефимов, ЯФ **12**, 1080 (1970).
13. Д.В. П'ятницький, І.В. Сименюг, Ядерна фізика та енергетика **10**, 36 (2009).

14. S.D. Drell, A.C. Finn, and M.H. Goldhaber, Phys. Rev. **157**, 1402 (1967).
15. Б.М. Карнаков, ЯФ **19**, Вып. 5, 1122 (1974).
16. C. Alabizo and G. Schierholz, Phys. Rev. D **10**, 960 (1974).
17. I.M. Narodetsky, Yu.A. Simonov, and F. Palumbo, Phys. Lett. B **58**, 125 (1975).
18. R.D. Amado and R.M. Woloshyn, Phys. Lett. B **62**, 253 (1976).

Одержано 01.11.09

ОСОБЕННОСТИ АСИМПТОТИК РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПЛОТНОСТИ И ФОРМФАКТОРОВ ЯДЕР ${}^6\text{Li}$ И ${}^6\text{He}$ В РАМКАХ ТРЕХЧАСТИЧНОЙ МОДЕЛИ

Б.Е. Гринюк, И.В. Сименюг

Р е з ю м е

Исследованы асимптотики структурных функций ядер ${}^6\text{Li}$ и ${}^6\text{He}$ в модели α -частица плюс два нуклона. Изучены распределения плотности нуклонов гало и α -частицы на больших расстояниях в этих ядрах и проведено сравнение с аналитическими асимптотиками. Предложено новое удобное представление формфактора при малых переданных импульсах. Проанализирована проблема асимптотического поведения формфакторов. Полученные результаты показывают, что развитые вычислительные схемы вариационного метода с использованием гауссоидального базиса позволяют изучать асимптотическую область структурных функций как в координатном, так и в импульсном пространствах.

ASYMPTOTIC FEATURES OF DENSITY DISTRIBUTIONS AND FORM FACTORS FOR ${}^6\text{Li}$ AND ${}^6\text{He}$ NUCLEI WITHIN THE THREE-PARTICLE MODEL

B.E. Grinyuk, I.V. Simenog

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics,
Nat. Acad. of Sci. of Ukraine
(14b, Metrolohichna Str., Kyiv 03143, Ukraine)

S u m m a r y

Asymptotic properties of structure functions for ${}^6\text{Li}$ and ${}^6\text{He}$ nuclei are studied in the framework of the model involving an α -particle and two nucleons. The density distributions of halo nucleons and the α -particle at large distances are studied and compared with analytical asymptotics. A new representation for the form factor, which is useful at low transferred momentum, has been proposed, and the asymptotic behavior of form factors has been analyzed. The results obtained demonstrate that the calculation schemes developed in the framework of the variational method with the use of a Gaussian basis allow the asymptotics of structure functions to be studied in both the coordinate and momentum spaces.