УДК 519.8

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПСЕВДОБУЛЕВЫХ КАНОНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

В.И. ДОНСКОЙ

Оценивается точность принятия решений на основе моделей оптимального выбора с дизъюнктивным ограничением $\max f(\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} \omega(x_i)$ при условии $D(\widetilde{x}) = \bigvee_{j=1}^{m} K_j(\widetilde{x}) = 1$ для случая, когда ограничение задано точно, но информация о целевой функции представлена только порядком весов $\omega(x_1) \geq \ldots \geq \omega(x_n) \geq 0$.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение и разработка моделей выбора оптимальных решений на основе накопленных знаний — важное направление в области интеллектуального анализа и обработки информации. В настоящее время вопросы извлечения и представления знаний изучены гораздо глубже, чем подходы к построению процедур выбора оптимальных (с точностью, определяемой имеющейся неполной начальной информацией) решений на базе полученных знаний. Выбор решений в интеллектуализированных компьютерных системах осуществляется путем синтеза моделей, адекватных имеющейся (но, как правило, неполной) начальной информации, представленной знаниями и прецедентами-фактами.

Классический подход к синтезу моделей принятия решений основан на построении области допустимых решений и оценочной (скалярной или векторной) целевой функции.

Для выбора моделей в рамках классического подхода используется информация двух видов: качественная информация о классе, в котором отыскивается модель, и информация о параметрах модели. Основным недостатком классических моделей выбора решений является их «условная» согласованность с моделируемыми объектами и явлениями. При выборе классических моделей предполагается выполнение некоторых, обычно жестких, условий, определяющих вид модели. Независимо от имеющихся эмпирических данных, модель фиксируется, и далее требуется получить значения всех ее числовых параметров.

Неклассическое индуктивное моделирование основывается на прецедентах (фактах) и знаниях, представляющих собой, главным образом, отношения определенного вида, которым удовлетворяют или априорно должны удовлетворять прецеденты.

В настоящей работе предполагается возможным предикатное описание объектов, т.е. использование свойств-предикатов в качестве семантической базы представления проблемной области. Предикатам ставятся в соответствие булевы переменные, на основе которых могут строиться модели ограничений и целевых функций. Задание свойств-предикатов обычно является основой определения баз знаний продукционного типа, накопления наборов эмпирических значений в базах экспериментальных данных, извлечения логических закономерностей (аналогий), представительных наборов, деревьев решений. На базе предикатного описания объектов строятся дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ) — логические описания областей индуктивной и дедуктивной выводимости, выводимости по аналогии [1–4]. В работе оценивается точность решений, выбираемых на основе модели, которая синтезируется по прецедентной информации и/или знаниям продукционного типа в форме с дизъюнктивным ограничением. Замечательным свойством такой модели является то, что *информации только о порядке слагаемых аддитивной целевой функции с неотрицательными весами оказывается достаточно, чтобы, имея ДНФ-ограничение, оценить точность выбранного GREEDY алгоритмом решения*. Последнее — основной результат статьи.

СИНТЕЗ КАНОНИЧЕСКИХ ПСЕВДОБУЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ И ИХ СВОЙСТВА

В работе [1] показано, что любая задача псевдобулевой оптимизации вида

$$extr\ f(\tilde{x}),\ \tilde{x} \in W \subseteq B^n = \{0,1\}^n,$$

где $f: B^n \to R$, может быть представлена в канонической форме с дизъюнктивным ограничением

$$\begin{cases} extr\ \ f(\tilde{x}), \\ D(\tilde{x}) = 1, \end{cases} \qquad (1)$$

где $D(\tilde{x}) = \bigvee_{j=1}^{m} x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \& \ldots \& x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j_{r_j}}}$ — произвольная ДНФ характеристической функции φ_W множества W, определяемая выражением

$$\varphi_W(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \tilde{x} \in W, \\ 0, & \tilde{x} \notin W. \end{cases}$$

Рассмотрим важный для приложений случай, когда целевая функция является аддитивной с неотрицательными весами

$$f(\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} \omega(x_i)\,,\ \omega(x_i) \geq 0\,.$$

Класс псевдобулевых функций обозначим $PS_2(n) = \left\{ f : B^n \to R \right\}$.

Значение канонической формы (1) станет ясным с учетом следующих результатов [1].

- Как уже отмечено выше, *любая задача псевдобулевой оптимизации представима в форме (1) с ДНФ-ограничением*.
- *Если задача оптимизации линейной псевдобулевой функции с ограничениями-неравенствами приводится к эквивалентной форме с ДНФ-ограничением за число шагов, ограниченное полиномом от размерности задачи, то она разрешима за полиномиальное время*.
- *Для любой нелинейной задачи безусловной оптимизации функции $f \in PS_2(n)$ найдется эквивалентная ей задача оптимизации линейной функции $g \in PS_2(m)$ в форме с дизъюнктивным условием, где m — число слагаемых приведенного полинома для функции f без учета свободного члена*.

Задачи псевдобулевой оптимизации, представленные в форме с ограничениями типа неравенств или в ином виде, как следует из изложенного выше, совсем не обязательно специально приводить к форме с ДНФ-ограничением, поскольку такое приведение равносильно решению задачи и в некоторых случаях может оказаться сложнее, чем решение другим методом. Важность использования канонической формы объясняется прежде всего тем, что уже *изучены методы построения ДНФ-ограничений, использующие в качестве начальной информации прецеденты, накопленные в базах эмпирических данных и/или продукции, составляющие базы знаний* [2,4]. Оказалось, что, используя указанную начальную информацию, построить ограничения в форме ДНФ гораздо проще (и точнее), чем в другой форме (например, в виде неравенств).

МАТРОИДЫ И КАНОНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Пусть $E = \left\{ e_1,...,e_n \right\}$ — конечное множество; $B(E)$ — булеан над E; $J \subseteq B(E)$ — зафиксированное семейство подмножеств. Семейство J называют *системой независимости*, если

$$\varnothing \in J\,;\quad (C \in J) \wedge (A \subset C) \Rightarrow A \in J\,. \qquad (2)$$

Множества, входящие в J, называют *независимыми*.

Пару $< E, J >$ называют *матроидом*, если непустое семейство J является системой независимости, и все максимальные по включению независимые подмножества (*базы*) любого множества $S \in E$ равномощны. Мощность баз множества S называется его *рангом* $r(S)$, а ранг $r(E)$ множества E называется *рангом матроида*. Любые две базы матроида (максимальные независимые множества в E) равномощны и имеют ранг $r(E)$ [5].

Если в задаче

$$\begin{cases} \max \sum\limits_{e \in S} \omega(e), \\ S \in J; \quad J \subseteq B(E), \\ \omega : E \to R^+ \end{cases} \tag{3}$$

пара $< E, J >$ является матроидом, то, согласно теореме Радо-Эдмондса [5], «жадный» (*GREEDY*) алгоритм обеспечивает точное решение задачи (3), притом с полиномиально ограниченной трудоемкостью, если только свойство « $A \in J$ » для любого $A \subseteq E$ вычислимо с полиномиальной сложностью.

В задаче (1) булевы переменные $x_1,...,x_n$ связываются с элементами множества $E = \{e_1,...,e_n\}$ так, что вектор $\widetilde{\alpha} = \alpha_1,...,\alpha_n$ значений переменных $x_1,...,x_n$ определяет множество $S_{\widetilde{\alpha}} = \{e_i : \alpha_i = 1\} \subseteq E$. Если $D(\widetilde{x}) = \\ = \bigvee\limits_{j=1}^{m} K_j(\widetilde{x})$ — ДНФ, определяющая ограничение канонической модели (1), то уравнение $D(\widetilde{x}) = 1$ равносильно условию $S_{\widetilde{x}} \in J$. Обозначив $E_{\widetilde{x}} = \{x_1,...,x_n\}$, исследуем, при каких условиях $< E_{\widetilde{x}}, D(\widetilde{x}) >$ — матроид.

Теорема 1. В канонической модели (1) пара $< E_{\widetilde{x}}, D(\widetilde{x}) >$ является матроидом тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия:

1) $D(\widetilde{0}) = 1$;

2) любая простая импликанта булевой функции f_D, определяемой ДНФ $D(\widetilde{x})$, не содержит положительных литералов и имеет ранг $r_{\min} = n - r(M)$, где $r(M)$ — ранг матроида $< E_{\widetilde{x}}, D(\widetilde{x}) >$.

Доказательство. Необходимость. Справедливость 1) немедленно следует из выражения (2) в определении системы независимости.

Пусть f_D — булева функция, определяемая ДНФ $D(\widetilde{x})$, и K — простая импликанта для f_D. Если бы K содержала положительный литерал, то она имела бы вид $K = x_s H$. Но тогда, согласно определению матроида, импликантой для f_D была бы и конъюнкция $K_1 = \bar{x}_s H$. Поскольку $\bar{x}_s H \vee x_s H = H$, то это противоречило бы тому, что K — простая импликанта. Следовательно, в K содержится некоторое количество r_k отрицательных литералов, из которых ни один нельзя удалить, поскольку K — простая импликанта. Если

$$K = \bar{x}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \bar{x}_{j_{r_k}},$$

то $\widetilde{\sigma}$: $\sigma_i = \begin{cases} 0, & i \in \{j_1,...,j_{r_k}\}, \\ 1, & i \notin \{j_1,...,j_{r_k}\} \end{cases}$ — база матроида M.

Все базы матроида равномощны, откуда $r_k = n - r(M)$.

Достаточность очевидна.

Следствие 1. Если ДНФ $D(\tilde{x})$ в задаче (1) в канонической форме с ограничением $D(\tilde{x})=1$ можно преобразовать в ДНФ $D^{-}(\tilde{x})$, не имеющую положительных литералов и реализующую ту же функцию, что и $D(\tilde{x})$, то ограничение $D(\tilde{x})=1$ определяет некоторую систему независимости $J \subset B^{n}$. А если в ДНФ $D^{-}(\tilde{x})$ все конъюнкции являются простыми импликантами и имеют одинаковый ранг, то $< E_{\tilde{x}}, D(\tilde{x}) >$ — матроид.

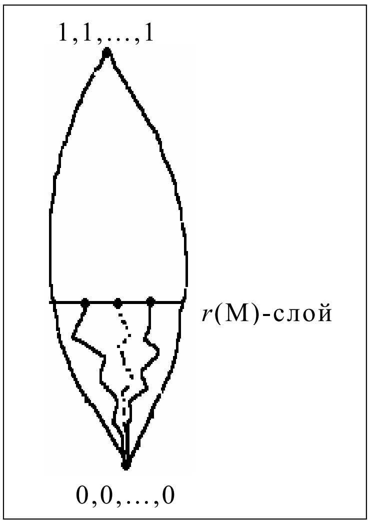

Рис. 1

На рис. 1 показан матроид M, все базы которого лежат в $r(M)$-слое куба B^{n} и соответствуют некоторому набору его вершин, каждая из которых содержит ровно $r(M)$ единиц.

НЕПОЛНОТА НАЧАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ И ОБОСНОВАНИЕ РЕШЕНИЙ

В настоящей работе неполная начальная информация в задаче выбора решения описывается следующим образом.

Целевая функция достоверно является аддитивной, но не задана точно, имеется лишь информация о «порядке» весов переменных

$$\omega(x_{i_1}) \geq \ldots \geq \omega(x_{i_n}) \geq 0 .$$

Полагается, что начальная информация для выбора решения порождена (не известной полностью) моделью $\max f(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} \omega(x_i)$ при условии $D(\tilde{x})=1$, где $D(\tilde{x})$ — ДНФ, реализующая характеристическую функцию множества допустимых решений задачи. Далее будем полагать, что $D(\tilde{x})$ получена некоторым способом [2, 4] и точно описывает ограничения.

Пусть J — семейство независимости, но пара $< E, J >$, вообще говоря, может не быть матроидом. Обозначим для любого множества $F \subseteq E$

$$lr(F,J) = \min\{|C| : C - \text{база в } F\},$$

$$ur(F,J) = \max\{|C| : C - \text{база в } F\}.$$

Число $k(J) = \min\limits_{\{F \subseteq E:\ ur(F,J) \neq 0\}} \dfrac{lr(F,J)}{ur(F,J)}$ называется кривизной системы независимости J и удовлетворяет двойному неравенству $0 < k(J) \leq 1$. Причем $k(J)=1$ только тогда, когда $< E, J >$ — матроид. Пусть S_G — множество, отобранное *GREEDY* алгоритмом решения задачи (3), а S_0 — множество, на котором в действительности достигается искомый экстремум.

Доказано [6], что для любой неотрицательной функции ω имеет место неравенство

$$\frac{\omega(S_G)}{\omega(S_0)} \geq k(J).$$

Далее используется аналогичный подход на основе *кривизны* ДНФ, описывающей систему независимости.

Определение 1. *Кривизной ДНФ* $D = \bigvee_{j=1}^{m} K_j$ называется число

$$k(D) = \frac{\min\limits_{1\leq j\leq m} \{n - r_j^-\}}{\max\limits_{1\leq j\leq m} \{n - r_j^-\}},$$

где r_j^- — число отрицательных литералов в конъюнкции K_j.

Определение 2. Пусть f_D — булева функция, определяемая ДНФ D; $S(f_D)$ — множество всех простых импликант функции f_D; r_L^- — число отрицательных литералов в простой импликанте $L \in S(f_D)$. *Кривизной булевой функции* f_D называется число

$$k(f_D) = \frac{\min\limits_{L\in S(f_D)} \{n - r_L^-\}}{\max\limits_{L\in S(f_D)} \{n - r_L^-\}}.$$

Теорема 2. $\dfrac{f(\tilde{x}_G)}{f(\tilde{x}_{\text{опт}})} \geq k(f_D).$

Доказательство. Не теряя общности, будем считать, что переменные перенумерованы и упорядочены по весу, так что $\omega(x_1) \geq \ldots \geq \omega(x_n) \geq 0$. Обозначим $\min\limits_{L\in S(f_D)} \{n - r_L^-\} = \mu$; $\max\limits_{L\in S(f_D)} \{n - r_L^-\} = M$. Заметим, что $1 < \mu \leq M < n$.

Тогда $k = k(f_D) = \dfrac{\mu}{M}$, и число элементов в любом независимом множестве лежит в отрезке $[\mu, M]$.

Убедимся в том, что $f(\tilde{x}_G) \geq k(f_D) f(\tilde{x}_{\text{опт}})$. Пусть Ω — независимое множество переменных с максимальным весом, $f(\tilde{x}_{\text{опт}}) = f(\Omega) = \sum_{e\in\Omega} \omega(e)$, и $f(\tilde{x}_G) = f(G) = \sum_{e\in G} w(e)$, где G — множество переменных, отобранных *GREEDY* алгоритмом.

Очевидно, $|G| \geq \mu$. Тогда

$$k(f_D) f(\tilde{x}_{\text{опт}}) = kf(\Omega) = \frac{\mu}{M} f(\Omega) = \mu \frac{1}{M} \sum_{e\in\Omega} \omega(e) \leq \mu \frac{1}{|\Omega|} \sum_{e\in\Omega} \omega(e) =$$

$$= \mu a_{\Omega} \le \mu \frac{1}{\mu} \sum_{e \in \Omega_{\mu}} \omega(e) \le \sum_{e \in G} w(e) = f(G) = f(\tilde{x}_G\}.$$

Здесь a_{Ω} — средний вес элементов множества Ω, а Ω_{μ} — множество, состоящее из первых μ по порядку (больших) элементов множества Ω. Приведенная цепочка неравенств доказывает теорему.

На рис. 2 булевы наборы $ur(D)$-слоя имеют норму M, а наборы $lr(D)$-слоя — норму μ.

Процесс выбора и оценивания решений состоит в следующем.

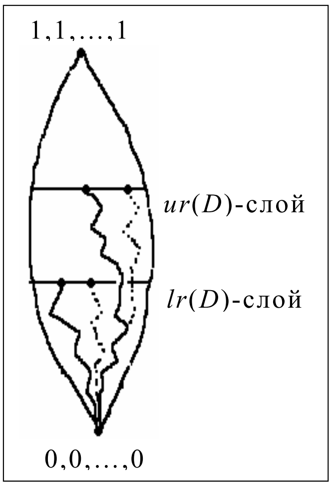

Рис. 2

1. Получить каноническую форму задачи.
2. Упорядочить переменные по весу.
3. Упростить ДНФ D, стараясь получить минимальную или тупиковую ДНФ D^*.
4. Выбрать в D^* конъюнкцию K_{j^*}, следуя правилу GREEDY алгоритма.
5. Взять в качестве решения булев вектор, обращающий в единицу конъюнкцию K_{j^*} и имеющий единичные значения всех переменных, не входящих в K_{j^*}. Если ДНФ D точно определяет область допустимых решений, а ДНФ D^* не содержит положительных литералов, то $f(\tilde{x}_G) \ge k(D) f(\tilde{x}_{\text{опт}})$.
6. Вычислить кривизну ДНФ $k(D^*)$. Если для заданной точности ε выполнено $k(D^*) \ge 1-\varepsilon$, то имеется гарантия, что решение, найденное *GREEDY* алгоритмом, будет отличаться от оптимального решения $\tilde{x}_{\text{опт}}$ не более, чем на $\varepsilon f(\tilde{x}_{\text{опт}})$ или 100ε %.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Донской В.И.* Задачи псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивным ограничением // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1994. — **34**, № 3. — С. 389–398.
2. *Донской В.И.* Логические продукционные системы: анализ и синтез // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 4. — С. 11–22.
3. *Донской В.И.* Слабоопределенные задачи линейного булева программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 1988. — **28**, № 9. — С. 1379–1385.
4. *Donskoy V.* Pseudo-Boolean scalar optimization models with incomplete information // GMÖOR Newsletter. — 1996. — № 1/2. — P. 20–26.
5. *Edmonds J.* Matroids and Greedy Algorithms // Math. Programming. — 1971. — P. 127–136.
6. *Hausmann D., Korte B.* Lower bounds on the worst-case complexity of some oracle algorithms // Discrete Math. — 1978. — **24**, № 3. — P. 85–120.

Поступила 18.06.2003