УДК 517.977

ЗАДАЧІ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

О.Г. НАКОНЕЧНИЙ, В.П. МАРЦЕНЮК

Розглянуто задачу ідентифікації параметрів диференціальних рівнянь, заданих у гільбертовому просторі. Встановлено умови існування розв’язків задачі, які збігаються з умовами неперервної залежності розв’язків диференціальних рівнянь від параметрів. Побудовано конструктивний алгоритм розв’язування задачі ідентифікації у гільбертовому просторі, що зводиться до відповідної крайової задачі. Запропоновано спосіб її зведення до задач Коші та розглянуто один частковий випадок, який допускає розв’язок задачі не лише в операторному вигляді.

ВСТУП

При моделюванні процесів живої природи [1–3] виникають задачі знаходження оцінок параметрів систем, які можуть бути елементами деяких функціональних просторів. Такі моделі будуються на основі диференціальних рівнянь із запізненням та інтегро-диференціальних рівнянь [4, 5]. Результати ідентифікації параметрів систем викладено у роботах [6,7].

Метою даного дослідження є встановлення умов існування розв’язків задач ідентифікації параметрів, заданих в абстрактних гільбертових просторах, а також побудова конструктивних алгоритмів їх пошуку.

ПИТАННЯ ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ АПОСТЕРІОРНИХ ОЦІНОК

Нехай спостерігається вектор-функція $y(t) \in R^m$, що має вигляд

$$y(t) = h(x(t,\alpha),t) + \eta(t), \ t_0 < t < T \qquad (1)$$

при деяких наперед невідомих параметрах α, та вектор-функції $v(t)$. Припустимо, що вектор α належить деякій множині G гільбертового простору H, а вектор-функція $\eta(t)$ — відповідно множині G_η гільбертового простору $L_2(t_0,T)$, що має вигляд

$$G_\eta = \left\{ v : \int_{t_0}^{T} \Phi(v,t)dt \le 1 \right\}, \tag{2}$$

де $\Phi(v,t)$ — неперервна, невід′ємна функція на $R^m \times [t_0, T]$, яка задовольняє умову

$$\Phi(v,t) \le C|v|^2, \tag{3}$$

де C — деяка константа.

Якщо $h(x,t)$ — неперервна на $R^n \times [t_0, T]$ функція і існує константа C_1 така, що

$$|h(x,t)| \le C_1 |x|, \tag{4}$$

а $x(t,\alpha)$ належить множині $L_2(t_0, T)$ $\forall \alpha \in G$, то апостеріорна множина можливих значень параметра α визначається як

$$G_y = G \cap G_1,$$

де

$$G_1 = \left\{ \alpha : \int_{t_0}^{T} \Phi(y(t) - h(x(t,\alpha),t),t)dt \le 1 \right\}. \tag{5}$$

У задачах апостеріорного оцінювання важливими є такі дві проблеми.

1. Описати множину G_y.

2. Визначити оптимальний елемент із множини G_y.

Успішний розв′язок другої проблеми залежить від критерію, згідно з яким будемо шукати оптимальний елемент. У даній роботі оберемо критерій виду

$$J(\alpha) = \int_{t_0}^{T} \Phi(y(t) - h(x(t,\alpha),t),t)dt, \tag{6}$$

а оптимальне значення визначимо із умови

$$\inf_{\alpha \in G} J(\alpha) = J(\hat{\alpha}). \tag{7}$$

Зрозуміло, якщо такі елементи $\hat{\alpha}$ існують, то вони будуть потрапляти в множину G_y.

Твердження 1. Припустимо, що або множина G — компактна, а $x(t,\alpha)$ — неперервна функція своїх аргументів, або G — обмежена слабо-замкнена множина, функціонал $J_1(\alpha) = \int_{t_0}^{T} \Phi(y(t) - h(x(t),t),t)dt$ слабонапів-неперервний знизу, причому $x(t,\alpha_n)$ слабо збігається в $L_2(t_0,T)$ до $x(t,\alpha_0)$, якщо α_n слабо збігається до α_0 в H.

Тоді існує оптимальна апостеріорна оцінка.

Доведення. Нехай α_n — мінімізуюча послідовність. Тоді $J(\alpha_n)\to$ $\to \inf\limits_{\alpha\in G} J(\alpha)$. Оскільки множина G — компактна, то виділимо сильно збіжну підпослідовність $\alpha_{n_k}\to\alpha_0$. При цьому $h(x(t,\alpha_{n_k}),t)\to h(x(t,\alpha_0),t)$. В силу леми Фату

$$\lim_{k\to\infty} J(\alpha_{n_k})\geq \int_{t_0}^{T} \lim_{k\to\infty} \Phi(y(t)-h(x(t,\alpha_{n_k}),t),t)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \Phi(y(t)-h(x(t,\alpha_0),t),t)dt = J(\alpha_0),$$

але $\lim\limits_{k\to\infty} J(\alpha_{n_k}) = \inf\limits_{\alpha\in G} J(\alpha)\leq J(\alpha_0)$, а значить $J(\alpha_0)=\inf\limits_{\alpha\in G} J(\alpha)$.

Нехай тепер виконуються умови другої половини твердження 1. Тоді якщо α_n — мінімізуюча послідовність, то виділимо слабозбіжну підпослідовність $\alpha_{n_k}\to\alpha_0$, причому в силу слабої замкненості G будемо мати $\alpha_0\in G$. Далі за умовою $x_{n_k}=x(t,\alpha_{n_k})$ слабо збігається до $x(t,\alpha_0)$, але тоді в силу слабої напівнеперервності $J_1(x)$

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} J(\alpha_{n_k}) = \underline{\lim}_{k\to\infty} J_1(x_{n_k}) \geq J_1(x_0) = \int_{t_0}^{T} \Phi(y(t)-g(x(t,\alpha_0),t),t)dt,$$

а це означає, що α_0 — апостеріорна оцінка. ■

Наслідок. Нехай $h(x,t)=H(t)x$, $\Phi(x,t)=(Q(t)x,x)$, де $H(t)$ — матриця з неперервними елементами, а $Q(t)$ — додатньоозначена матриця, елементи якої є неперервні на $[t_0,T]$. Тоді існує оптимальна апостеріорна оцінка.

Зауваження 1. Умову обмеженості множини G можливо замінити умовою

$$\lim_{\|\alpha\|\to\infty} J(\alpha)=\infty .$$

Зауваження 2. Якщо $J(\alpha)$ — сильно опуклий по α, то оптимальна апостеріорна оцінка єдина.

Розглянемо далі випадок, коли $x(t,\alpha)$ — розв′язок диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\alpha) + \int_{t_0}^{t} g(t,s,x(s),\beta)ds, \tag{8}$$

$$x(t_0)=x_0, \tag{9}$$

де $x(t)\in R^n$, $\alpha\in H_1$, $\beta\in H_2$. Тут H_1,H_2 — абстрактні гільбертові простори.

Введемо позначення

$$f_1(t,x,\theta)=f(t,x,\alpha)+\int_{t_0}^{t} g(t,s,x(s),\beta)ds\,,\quad \theta=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}.$$

Припустимо, що значення параметрів α та β невідомі, задано лише їх апріорні множини відповідно G_α та G_β.

Для встановлення умов існування апостеріорних оцінок у гільбертовому просторі розглянемо кілька часткових випадків (8), (9).

ЗАГАЛЬНИЙ ВИПАДОК ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо систему

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=A(t,\alpha)x(t),\\ x(t_0)=x_0,\end{cases} \tag{10}$$

де $x(t)\in C^1\big([0,T],R^n\big)$, $A(t,\alpha):[0,T]\times G\times C^1\big([0,T],R^n\big)\to C\big([0,T],R^n\big)$ — лінійний оператор відносно $x(t)$.

Твердження 2. Припустимо, що виконуються умови твердження 1 щодо функціоналу та апріорної множини, і при цьому $x(t,\alpha)$ є розв'язком системи (10), де оператор $A(\bullet,\bullet)$ є лінійним відносно $x(t)$ і таким, що

(i) $\|A(s,\alpha)\|\le k(s)$ при $\alpha\in G,\ s\in[t_0,T]$;

(ii) для довільних $x(s)\in C^1\big([0,T],R^n\big)$ та $\alpha_0\in G$ і $\alpha_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\alpha_0$ має місце

$$\lim_{\alpha_n\to\alpha_0}\int_{t'}^{t''}\left[A(s,\alpha_n)x(s)-A(s,\alpha_0)x(s)\right]ds=0\,. \tag{11}$$

Тоді на множині $\alpha\in G$ існує оптимальна апостеріорна оцінка $\hat{\alpha}$.

Доведення. Оскільки виконуються умови твердження 1, то для існування апостеріорної оцінки залишилося показати неперервну залежність $x(t,\alpha)$ від $\alpha\in G$. Далі оцінимо

$$\|x(t,\alpha_n)-x(t,\alpha_0)\|=$$

$$=\left\|x(t_0,\alpha_n)+\int_{t_0}^{t}A(s,\alpha_n)x(s,\alpha_n)ds-x(t_0,\alpha_0)-\int_{t_0}^{t}A(s,\alpha_0)x(s,\alpha_0)ds\right\|\le$$

$$\le\|x(t_0,\alpha_n)-x(t_0,\alpha_0)\|+\left\|\int_{t_0}^{t}A(s,\alpha_n)x(s,\alpha_n)ds-\int_{t_0}^{t}A(s,\alpha_0)x(s,\alpha_0)ds\right\|\le$$

$$\le\|x(t_0,\alpha_n)-x(t_0,\alpha_0)\|+\left\|\int_{t_0}^{t}A(s,\alpha_n)x(s,\alpha_0)ds-\int_{t_0}^{t}A(s,\alpha_0)x(s,\alpha_0)ds\right\|+$$

$$+\left\|\int_{t_0}^{t}A(s,\alpha_n)x(s,\alpha_n)ds-\int_{t_0}^{t}A(s,\alpha_n)x(s,\alpha_0)ds\right\|\le$$

$$\leq \left\| x(t_0,\alpha_n) - x(t_0,\alpha_0) \right\| + \left\| \int_{t_0}^{t} A(s,\alpha_n)x(s,\alpha_0)ds - \int_{t_0}^{t} A(s,\alpha_0)x(s,\alpha_0)ds \right\| +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} k(s) \left\| x(s,\alpha_n) - x(s,\alpha_0) \right\| ds \, .$$

Згідно з лемою Гронуола

$$\left\| x(t,\alpha_n) - x(t,\alpha_0) \right\| \leq \Bigg(\left\| x(t_0,\alpha_n) - x(t_0,\alpha_0) \right\| \; +$$

$$+ \left\| \int_{t_0}^{t} A(s,\alpha_n)x(s,\alpha_0)ds - \int_{t_0}^{t} A(s,\alpha_0)x(s,\alpha_0)ds \right\| \Bigg) e^{\left\| \int_{t_0}^{t} k(s)ds \right\|} . \qquad (12)$$

В силу (11) права частина нерівності (12) прямує до нуля при $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_0$. ■

Наслідок 1. Якщо оператор $A(s,\alpha)$ є лінійним відносно α, то умова (11) може бути переписана як

$$\lim_{\alpha_n \to \alpha_0} \int_{t'}^{t''} \left\| A(s,\alpha_n) - A(s,\alpha_0) \right\| ds = 0 \, . \qquad (13)$$

Наслідок 2. Якщо оператор $A(s,\alpha)$ є лінійним відносно α і не залежить від t, тобто $A(s,\alpha) = A(\alpha)$, то умова (11) може бути переписана як

$$\lim_{\alpha_n \to \alpha_0} \left\| A(\alpha_n) - A(\alpha_0) \right\| = 0 \, . \qquad (14)$$

ЛІНІЙНА СИСТЕМА З ІНТЕГРАЛЬНИМ ЯДРОМ

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \displaystyle\int_0^t K(t-s)x(s)ds, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \qquad (15)$$

де параметром α, що оцінюється, виступає невідоме інтегральне ядро $K(\bullet) \in G$.

Твердження 3. Припустимо, що виконуються умови твердження 1 щодо функціоналу та апріорної множини, і при цьому $x(t,K)$ є розв'язком системи (15), де матричнозначна функція $K(s)$ належить множині G, яка задовольняє (і) для довільного $K_0(s) \in G$ і $K_n \xrightarrow[n\to\infty]{} K_0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\| K_n(\tau) - K_0(\tau) \right\|^2 d\tau = 0 \, , \qquad (16)$$

тоді існує оптимальна апостеріорна оцінка $\hat{K}$ на множині $K(\bullet) \in G$.

Доведення. Оскільки виконуються умови твердження 1, то залишається показати неперервну залежність $x(t)$ від $K(\bullet)\in G$. Оцінимо

$$\|x(t,K_n)-x(t,K_0)\|=$$

$$=\left\|\begin{array}{c} x(0,K_n)+\int_0^t\int_0^t K_n(t_1-s)x(s,K_n)ds\,dt_1-x(0,K_0)- \\ -\int_0^t\int_0^t K_0(t_1-s)x(s,K_0)ds\,dt_1+\int_0^t A(x(t,K_n)-x(t,K_0))dt \end{array}\right\|\le$$

$$\le\|x(0,K_n)-x(0,K_0)\|+\|A\|\int_0^t\|x(t,K_n)-x(t,K_0)\|dt+$$

$$+\left\|\int_0^t\int_0^t K_n(t_1-s)x(s,K_n)ds\,dt_1-\int_0^t\int_0^t K_n(t_1-s)x(s,K_0)ds\,dt_1\right\|+$$

$$+\left\|\int_0^t\int_0^t K_n(t_1-s)x(s,K_0)ds\,dt_1-\int_0^t\int_0^t K_0(t_1-s)x(s,K_0)ds\,dt_1\right\|\le$$

$$\le\|x(0,K_n)-x(0,K_0)\|+\|A\|\int_0^t\|x(t,K_n)-x(t,K_0)\|dt+$$

$$+\left\|\int_0^t\int_0^t K_n(t_1-s)[x(s,K_n)-x(s,K_0)]ds\,dt_1\right\|+$$

$$+\left\|\int_0^t\int_0^t [K_n(t_1-s)-K_0(t_1-s)]x(s,K_0)ds\,dt_1\right\|=$$

$$=\|x(0,K_n)-x(0,K_0)\|+\|A\|\int_0^t\|x(t,K_n)-x(t,K_0)\|dt+$$

$$+\left\|\int_0^t\int_s^t K_n(t_1-s)dt_1[x(s,K_n)-x(s,K_0)]ds\right\|+$$

$$+\left\|\int_0^t\int_s^t [K_n(t_1-s)-K_0(t_1-s)]dt_1 x(s,K_0)ds\right\|. \tag{17}$$

Далі використаємо такі оцінки:

$$\left\|\int_0^t\int_s^t K_n(t_1-s)dt_1[x(s,K_n)-x(s,K_0)]ds\right\|\le$$

$$\le\left\|\int_0^t\int_s^t |K_n(t_1-s)|dt_1[x(s,K_n)-x(s,K_0)]ds\right\|\le$$

$$\le\left\|\int_0^T|K_n(\tau)|d\tau\right\|\int_0^t\|x(s,K_n)-x(s,K_0)\|ds. \tag{18}$$

Згідно з нерівністю Коші-Буняковського

$$\left\|\int_0^T|K_n(\tau)|d\tau\right\|\le T\int_0^T\|K_n(\tau)\|^2 d\tau=TM\ , \tag{19}$$

де $\int_0^T \|K_n(\tau)\|^2 d\tau = M < \infty$ в силу умови (16), можемо продовжити (18) як

$$\left\|\int_0^t \int_s^t K_n(t_1 - s)\, dt_1 [x(s, K_n) - x(s, K_0)]\, ds\right\| \le TM \int_0^t \|x(s, K_n) - x(s, K_0)\| ds, \quad (20)$$

$$\left\|\int_0^t \int_s^t [K_n(t_1 - s) - K_0(t_1 - s)] dt_1 x(s, K_0) ds\right\| \le$$

$$\le \int_0^t \left\|\int_s^t [K_n(t_1 - s) - K_0(t_1 - s)] dt_1\right\| \|x(s, K_0)\| ds \le$$

$$\le \int_0^t \int_s^t \|K_n(t_1 - s) - K_0(t_1 - s)\|^2 dt_1 (t_1 - s) \| x(s, K_0)\| ds \le$$

$$\le \int_0^T \int_0^T \|K_n(t_1 - s) - K_0(t_1 - s)\|^2 dt_1 T \| x(s, K_0)\| ds. \quad (21)$$

Враховуючи (20) та (21) у (17), отримуємо

$$\|x(t, K_n) - x(t, K_0)\| \le \|x(0, K_n) - x(0, K_0)\| +$$

$$+ \|A\| \int_0^t \|x(t, K_n) - x(t, K_0)\| dt + TM \int_0^t \|x(s, K_n) - x(s, K_0)\| ds +$$

$$+ \int_0^T \int_0^T \|K_n(t_1 - s) - K_0(t_1 - s)\|^2 dt_1 T \| x(s, K_0)\| ds. \quad (22)$$

Застосовуючи в (22) лему Гронуола, маємо

$$\|x(t, K_n) - x(t, K_0)\| \le \Bigg(\|x(0, K_n) - x(0, K_0)\| +$$

$$+ T\int_0^T \int_0^T \|K_n(t_1 - s) - K_0(t_1 - s)\|^2 dt_1 \|x(s, K_0)\| ds \Bigg) e^{(\|A\| + TM)t}. \quad (23)$$

Згідно із (16) права частина (23) прямує до нуля при $n \to \infty$. ■

ПРОБЛЕМИ ОЦІНЮВАННЯ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

На розв'язках системи (8), (9) розглянемо такі проблеми.

Проблема 1. При відомих значеннях функції $x(s)$ та $\dfrac{dx(s)}{ds}$, $s \le T$ знайти оцінки параметрів α та β.

Проблема 2. При заданій функції $y(t)$, такій, що

$$y(t) = h(t, x(t)) + \eta(t), \; t_0 \le t \le T,$$

де $y \in R^m$; h — відома векторна функція; $\eta(t)$ — деяка невідома функція, що належить множині G_η із простору $L_2(t_0, T)$, знайти оцінки параметрів α та β та оцінку функції $x(s)$, $s \ge T$.

Зауважимо спочатку, що ці проблеми вкладаються в задачі оцінки розв'язків диференціальних рівнянь у гільбертових просторах.

Дійсно, якщо ввести функцію $\theta(t)$ із значеннями в $H = H_1 \times H_2$ як розв'язок рівняння

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \theta(t_0) = \theta ,$$

де похідна розуміється в сильному сенсі, то ми одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = f_1(s, x(s), \theta(s)), \\ x(t_0) = x_0 , \end{cases}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 , \quad \theta(t_0) = 0 . \tag{24}$$

Таким чином, у випадку проблеми 1 ми повинні знайти оцінку $\theta(t)$ як розв'язку диференціального рівняння, спостерігаючи $x(t)$, $t_0 < t < T$, що задовольняє рівняння (8).

У випадку другої проблеми задача про оцінювання θ та $x(s)$ зводиться до оцінки розв'язків диференціального рівняння у гільбертовому просторі $R^n \times H$.

Тому доцільно спочатку дослідити задачі про оцінювання параметрів розв'язку диференціального рівняння у гільбертовому просторі.

Розглянемо спочатку випадок лінійного диференціального рівняння в H .

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)f_1(t) , \tag{25}$$

$$x(t_0) = x_0 ,$$

де $A(t) \in \mathcal{L}(H, H)$; $f_1(t)$ — невідома функція із $L_2((t_0, T), F_1)$, де F_1 — деякий гільбертовий простір; $B(t) \in \mathcal{L}(F_1, H)$; норми $\|A(t)\|$ та $\|B(t)\|$ — неперервні функції; x_0 — невідомий вектор із H .

Зауважимо, що під узагальненим розв'язком рівняння (25) будемо розуміти розв'язок інтегрального рівняння

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} B(s)f_1(s)ds .$$

Можна показати, що такий розв'язок існує та він єдиний і є неперервною функцією.

Нехай, крім цього, задані спостереження

$$y(t) = \mathcal{H}(t, y(\bullet), x(\bullet)) + \mathcal{D}(t) f_2(t) ,$$

де F_2, Y — деякі гільбертові простори; $\|\mathcal{D}(t)\|$ — неперервна по t; f_2 — невідома функція з простору F_2; $\mathcal{H}(t, y(\bullet), x(\bullet))$ залежить від спостережень $y(s)$, $s < t$ та при фіксованому t та y є відображенням простору H в Y .

Нехай також трійка $(x_0, f_1(\bullet), f_2(\bullet))$ належить деякій множині G гільбертового простору $H \times L_2((t_0, T), F_1) \times L_2((t_0, T), F_2)$.

Визначення. Апостеріорною оцінкою вектору $Sx(T)$, де $S \in \mathcal{L}(H, F_3)$; F_3 — гільбертовий простір, назвемо вектор $S\hat{x}(T)$, де $\hat{x}(T)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B(t)\hat{f}_1(t),$$

$$\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0,$$

а пара $(\hat{x}_0, \hat{f}_1)$ належить апостеріорній множині G_y, що визначається як

$$G_y = \{(x_0, f_1) : (x_0, f_1, f_2) \in G_y^{(1)}\},$$

де

$$G_y^{(1)} = \{(x_0, f_1, f_2) : (x_0, f_1, f_2) \in G, y(t) = \mathrm{H}(t, y(\bullet), x(\bullet)) + \mathrm{D}(t) f_2(t), t_0 \le t \le T\}.$$

Очевидно, якщо $\mathcal{H}(t, y(\bullet), x(\bullet))$ — неперервне відображення, а множина G — обмежена, то апостеріорна множина також обмежена.

Зауваження 1. Якщо $\hat{x}_0$, $\hat{f}_1$ — апостеріорні оцінки відповідно векторів x_0 та f_1, то має місце нерівність

$$\left\{\|\hat{x}_0 - x_0\|^2 + \left\|\hat{f}_1 - f_1\right\|^2\right\}^{1/2} \le \sup_{(x_0, f_1) \in G_y} \left[\|\hat{x}_0 - x_0\|^2 + \left\|\hat{f}_1 - f_1\right\|^2\right]^{1/2} = \sigma_a^{(1)}.$$

З іншої сторони, для мінімаксних апостеріорних оцінок $\hat{\hat{x}}_0$, $\hat{\hat{f}}_1$, які визначаютья із рівності

$$\inf_{(\hat{x}_0, \hat{f}_1) \in G_y} \sup_{(x_0, f_1) \in G_y} \left\{\|\hat{x}_0 - x_0\|^2 + \left\|\hat{f}_1 - f_1\right\|^2\right\}^{1/2} =$$

$$= \sup_{(x_0, f_1) \in G_y} \left[\left\|\hat{\hat{x}}_0 - x_0\right\|^2 + \left\|\hat{\hat{f}}_1 - f_1\right\|^2\right]^{1/2} = \sigma_a,$$

має місце нерівність

$$\sigma_a \le \sigma_a^{(1)}.$$

Зауваження 2. Нехай G — обмежена замкнена множина. Тоді

$$\sup_{(x_0, f_1) \in G_y} \left[\|\hat{x}_0 - x_0\|^2 + \left\|\hat{f}_1 - f_1\right\|^2\right]^{1/2} = \sup_{((l_1, l_1) + (l_2, l_2)) \le 1} \left[\sigma_l + \left|L(\hat{f}) - \hat{L}(f)\right|\right]^{1/2},$$

де

$$\sigma_l = \frac{1}{2}\left[\sup_{G_y} L(f) - \inf_{G_y} L(f)\right], \quad \hat{L}(f) = \frac{1}{2}\left[\sup_{G_y} L(f) + \inf_{G_y} L(f)\right],$$

$$L(f)=(l_1,x_0)+(l_2,f_1),\quad L(\hat{f})=(l_1,\hat{x}_0)+(l_2,\hat{f}_1).$$

Доведення. Оскільки

$$\|\hat{x}_0-x_0\|^2+\|\hat{f}_1-f_1\|^2=\sup_{((l_1,l_1)+(l_2,l_2))\le 1}\left[L(\hat{f})-L(f)\right]^2,$$

то

$$\sigma_a^{(1)}=\sup_{((l_1,l_1)+(l_2,l_2))\le 1}\ \sup_{f\in G_y}\left|L(\hat{f})-L(f)\right|.$$

Зазначимо також, що $L(f)$ змінюється в межах

$$\inf_{G_y} L(f)\le L(f)\le \sup_{G_y} L(f)$$

або

$$\left|L(f)-\hat{L}(f)\right|\le \sigma_l,$$

звідки і одержуємо потрібне. ■

Зауваження 3. Нехай множина G_y обмежена та замкнена, а також центрально симетрична відносно вектора $\bar{x}_0$, $\bar{f}_1$ (тобто, якщо $(x_0-\bar{x}_0, f_1-\bar{f}_1)\in$ $\in G_y$, то і $-(x_0-\bar{x}_0, f_1-\bar{f}_1)\in G_y$). Тоді легко бачити, що

$$\sup_{G_y} L(f)=\sup_{\tilde{G}_y} L(f)+L(\bar{f}),$$

$$\inf_{G_y} L(f)=-\sup_{\tilde{G}_y} L(f)+L(\bar{f}),$$

де $\tilde{G}_y=G_y-(\bar{x}_0,\bar{f}_0)$, і є центрально симетричною відносно нуля, а, значить,

$$\sigma_a^{(1)}=\sup_{((l_1,l_1)+(l_2,l_2))\le 1}\left[\sup_{\tilde{G}_y} L(f)+\left|L(\hat{f})-L(\bar{f})\right|\right]\ge \sup_{\tilde{G}_y}\left[(x_0,x_0)+(f_1,f_1)\right]^{1/2}.$$

Знак рівності досягається при $\hat{f}=\bar{f}$. Тобто $\bar{f}$ є мінімаксною апостеріорною оцінкою із похибкою оцінювання

$$\sigma_a=\sup_{\tilde{G}_y}\left[(x_0,x_0)+(f_1,f_1)\right]^{1/2}.$$

Далі розглянемо випадок, коли $\mathcal{H}(t,y(\bullet),x(\bullet))$ залежить від $x(\bullet)$ лінійно, більше того

$$\mathcal{H}(t,y(\bullet),x(\bullet))=\mathcal{H}(t,y(\bullet))x(t), \tag{26}$$

де $\mathcal{H}(t,y(\bullet))\in \mathcal{L}(H,Y)$.

Введемо функціонал

$$\mathcal{J}(x_0, f_1, f_2) = (Q_0 x_0, x_0) + \int_{t_0}^{T} (Q_1 f_1, f_1) dt + \int_{t_0}^{T} (Q_2 f_2, f_2) dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} (\lambda(t), y(t) - \mathcal{H}(t, y(\bullet)) x(t) - \mathcal{D}(t) f_2(t)) dt$$

і розглянемо апостеріорну множину

$$G_y = \{(x_0, f_1) : \mathcal{J}(x_0, f_1, f_2) \le 1\}. \qquad (27)$$

Лема 1. Апостеріорні оцінки задачі (4) – (6) можуть бути знайдені в результаті розв'язування такої системи рівнянь відносно $p(t)$, $\hat{x}(t)$, $\hat{\lambda}(t)$:

$$\begin{cases} -p'(t) - A^*(t)p(t) = \mathcal{H}^*(t, y(\bullet))\hat{\lambda}(t), \\ p(T) = 0, \end{cases} \qquad (28)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}(t)}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + B(t)Q_1^{-1}B^*(t)p(t), \\ \hat{x}(t_0) = Q_0^{-1} p(t_0), \end{cases} \qquad (29)$$

$$y(t) = \mathcal{H}^*(t, y(\bullet))\hat{x}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{D}(t) Q_2^{-1} \mathcal{D}^*(t)\hat{\lambda}(t) \qquad (30)$$

і мають вигляд

$$\hat{f}_1(t) = Q_1^{-1} B^*(t) p(t), \quad \hat{f}_2(t) = \frac{1}{2} Q_2^{-1} \mathcal{D}^*(t)\hat{\lambda}(t). \qquad (31)$$

Доведення. Обчислимо

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{J}(x_0 + \tau w, f_1 + \tau g_1, f_2 + \tau g_2)\bigg|_{\tau=0} = 2(Q_0 x_0, w) + 2\int_{t_0}^{T} (Q_1 f_1, g_1) dt +$$

$$+ 2\int_{t_0}^{T} (Q_2 f_2, g_2) dt - \int_{t_0}^{T} (\lambda(t), \mathcal{H}(t, y(\bullet)) x(g_1) - \mathcal{D}(t) g_2(t)) dt =$$

$$= 2(Q_0 x_0, w) + 2\int_{t_0}^{T} (Q_1 f_1, g_1) dt + 2\int_{t_0}^{T} (Q_2 f_2, g_2) dt - \int_{t_0}^{T} (\mathcal{D}^*(t)\lambda(t), g_2) dt -$$

$$- \int_{t_0}^{T} (\lambda(t), \mathcal{H}(t, y(\bullet)) x(g_1)) dt.$$

Введемо спряжену функцію $p(t)$ як розв'язок рівняння

$$-p'(t) - A^*(t)p(t) = \mathcal{H}^*(t, y(\bullet))\hat{\lambda}(t).$$

Звідси

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{J}(x_0+\tau w, f_1+\tau g_1, f_2+\tau g_2)\Big|_{\tau=0} = 2(Q_0 x_0, w) + 2\int_{t_0}^{T}(Q_1 f_1, g_1)dt +$$

$$+2\int_{t_0}^{T}(Q_2 f_2, g_2)dt - \int_{t_0}^{T}\left(\mathcal{D}^*(t)\lambda(t), g_2\right)dt + (p(T), x(T)) - (p(t_0), w) -$$

$$-\int_{t_0}^{T}(p(t), A(t)x(t))dt - \int_{t_0}^{T}(p(t), B(t)g_1(t))dt + \int_{t_0}^{T}\left(A^*(t)p(t), x(t)\right)dt = 0 .$$

■

Лема 2. Нехай існує $G=\left[\mathcal{D}(t)Q_2^{-1}\mathcal{D}^*(t)\right]^{-1}$. Тоді розв'язок системи (28) – (30) може бути знайдений у вигляді

$$\hat{x}(t) = \mathcal{P}(t)p(t) + q(t), \tag{32}$$

де $q(t) \in R^n$ — розв'язок задачі

$$\begin{cases} \dfrac{dq(t)}{dt} = A(t)q(t) + 2\mathcal{P}(t)\mathcal{H}^*(t, y(\bullet))G[y(t) - \mathcal{H}(t, y(\bullet))q(t)], \\ q(t_0) = 0; \end{cases} \tag{33}$$

оператор $\mathcal{P}(t) \in \mathcal{L}(H, R^n)$ — розв'язок рівняння Ріккаті

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{P}(t)}{dt} = A(t)\mathcal{P}(t) + \mathcal{P}(t)A^*(t) - 2\mathcal{P}(t)\mathcal{H}^*(t, y(\bullet))G\mathcal{H}(t, y(\bullet))\mathcal{P}(t) + B(t)Q_1^{-1}B^*(t), \\ \mathcal{P}(t_0) = Q_0^{-1}. \end{cases} \tag{34}$$

Доведення. З (32) випливає, що

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \frac{d\mathcal{P}(t)}{dt}p(t) + \mathcal{P}(t)p'(t) + q'(t). \tag{35}$$

Використовуючи в (35) рівняння (28), (29), маємо

$$\begin{aligned} A(t)\hat{x}(t) + B(t)Q_1^{-1}B^*(t)\,p(t) &= \frac{d\mathcal{P}(t)}{dt}p(t) + \\ &+ \mathcal{P}(t)\left[-A^*(t)p(t) - \mathcal{H}^*(t, y(\bullet))\hat{\lambda}(t)\right] + q'(t). \end{aligned} \tag{36}$$

В силу (30) маємо

$$\hat{\lambda} = 2G\left[y(t) - \mathcal{H}(t, y(\bullet))\hat{x}(t)\right].$$

З (36) випливає, що

$$\left\{A(t)\mathcal{P}(t) + B(t)Q_1^{-1}B^*(t) - \frac{d\mathcal{P}(t)}{dt} + \mathcal{P}(t)A^*(t) - 2\mathcal{P}(t)\mathcal{H}^*(t, y(\bullet))G\mathcal{H}(t, y(\bullet))\mathcal{P}(t)\right\} =$$

$$= \left\{-A(t)q(t) - 2\mathcal{P}(t)\mathcal{H}^*(t, y(\bullet))Gy(t) + 2\mathcal{P}(t)\mathcal{H}^*(t, y(\bullet))G\mathcal{H}(t, y(\bullet))q(t) + q'(t)\right\}.$$

Тобто ми отримали задачу (33) для $q(t)$ і (34) для $\mathcal{P}(t)$. ■

Нарешті розглянемо випадок диференціального рівняння (25) над простором $R^n \times H$, де H — абстрактний гільбертовий простір, а оператор $\mathcal{H}(t, y(\bullet))$ має вигляд $\mathcal{H}(t, y(\bullet)) = (H_1(t), \Theta)$, де $H_1(t) \in R^{m\times n}$; Θ — нуль-оператор.

Нехай вектор $x(t) \in R^n \times H$ має представлення $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, де $x_1 \in R^n$; $x_2 \in H$.

Нехай як простір спостережень Y розглядається R^m і $Q_2 \in R^{m\times m}$. Тоді

$$y(t) = H_1(t)x_1(t) + \mathcal{D}(t)f_2(t),$$

де $\mathcal{D}(t)f_2(t) \in R^m$.

Далі, скориставшись результатом [9] про представлення лінійного оператора $A \in \mathcal{L}(R^n \times H, R^n \times H)$, де H — абстрактний гільбертовий простір, у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

де $A_{11} \in \mathcal{L}(R^n, R^n)$; $A_{12} \in \mathcal{L}(H, R^n)$; $A_{21} \in \mathcal{L}(R^n, H)$; $A_{22} \in \mathcal{L}(H, H)$, прийдемо до таких розщеплень операторів:

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}(t) = \begin{pmatrix} P_{11}(t) & P_{21}(t) \\ P_{21}(t) & P_{22}(t) \end{pmatrix},$$

$$Q_1^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1^{11} & Q_1^{12} \\ Q_1^{21} & Q_1^{22} \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix},$$

де елементи операторів належать до відповідних просторів.

У такому разі задача (10) для $q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}$ зводиться до задач

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1(t)}{dt} = A_{11}(t)q_1(t) + A_{12}(t)q_2(t) + 2P_{11}(t)H_1^*(t)G[y(t) - H_1(t)q_1(t)], \\ q_1(t_0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dq_2(t)}{dt} = A_{21}(t)q_1(t) + A_{22}(t)q_2(t) + 2P_{21}(t)H_1^*(t)G[y(t) - H_1(t)\, q_1(t)], \\ q_2(t_0) = \Theta \end{cases}$$

та чотирьох задач для компонент оператора $\mathcal{P}(t)$.

Приклад

Розглядається модель популяції білих кров'яних клітин, яка відіграє виключно важливу роль в процесі кровотворення та є показником токсичності методів лікування. Оскільки білі кров'яні клітини походять із кісткового мозку [10], то вони також пов'язані з мінеральною щільністю кісткової тканини [11].

Отже, позначимо $x(t)$ щільність білих кров'яних клітин у крові (одиниць клітин/ мл крові). На основі результатів дослідження [3] пропонується таке рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -\delta x(t) + \beta \int\limits_a^b v(s)x(t+s)ds, \quad t \in (t_0, \infty), \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t) \equiv 0, \quad t \in (t_0 + a, t_0). \end{cases} \tag{37}$$

Тут $x(t) \in C^1(t_0, \infty)$ — неперервно-диференційована функція; $a < b < 0$ (можна розглянути випадок $a = t_0 - t$); x_0 — відоме початкове значення; $v(s)$ — невідоме інтегральне ядро. Припускається, що $v(s) \in C^1(-\infty, 0)$ і при цьому

$$\begin{cases} \dfrac{dv(s)}{ds} = f_1(s), \quad s \in (a, 0), \\ v(a) = v_0, \end{cases} \tag{38}$$

де $f_1(s) \in L_2(a,0)$; $v_0 \in R$ — невідомі функція та початкове значення.

Нехай задано спостереження

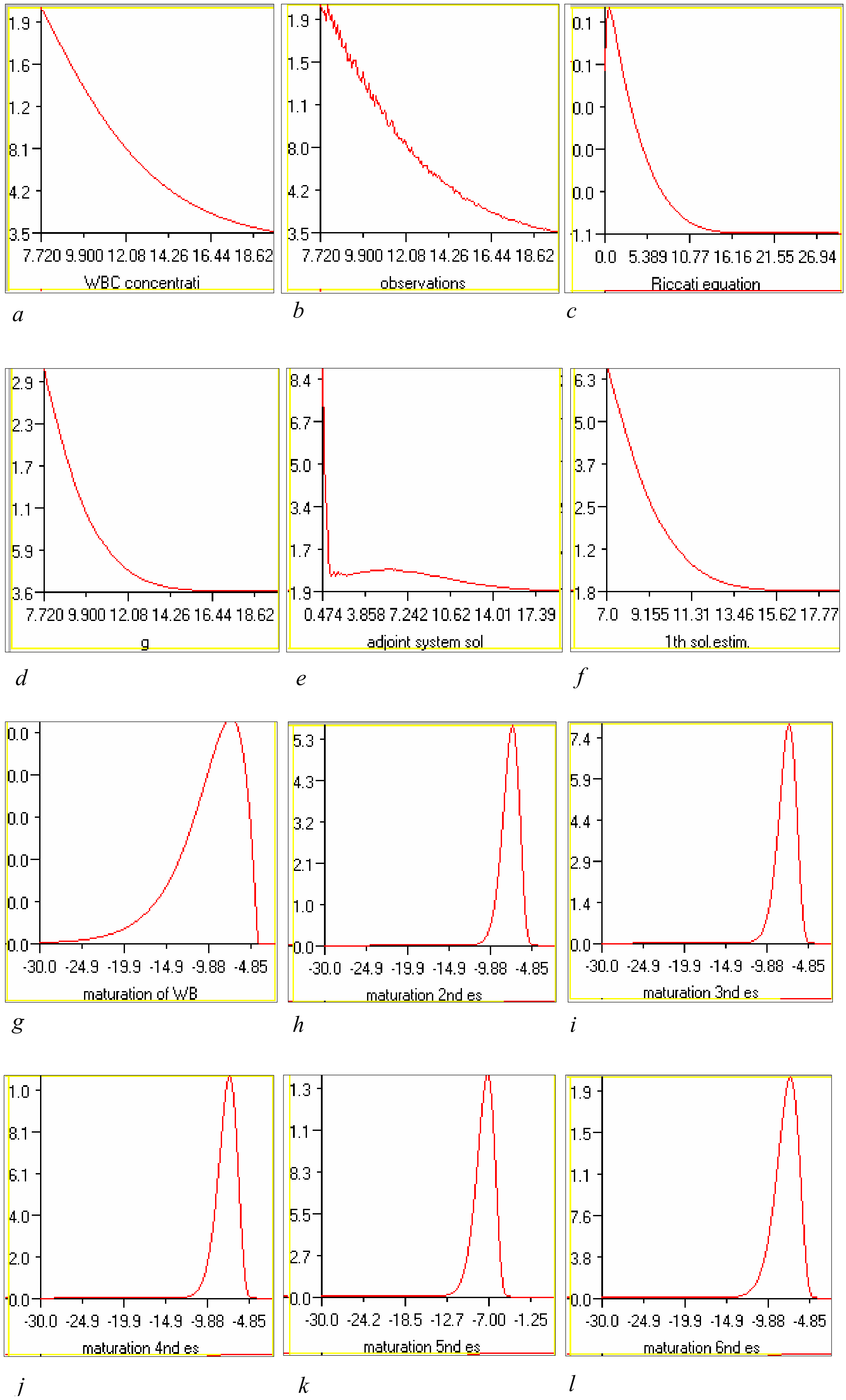
$$y(t) = x(t) + f_2(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{39}$$

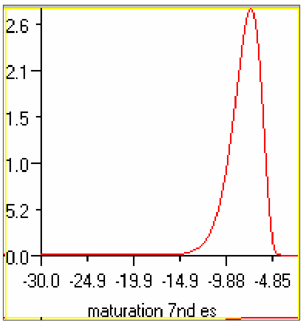
де $f_2(t) \in L_2[t_0, T]$ — невідома похибка.

Потрібно знайти інтегральне ядро $v(s)$, яке задовольняє умову

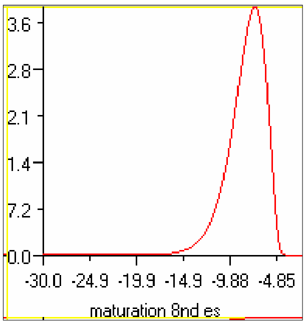
$$J(f_1, f_2, v_0) = q_1 \int\limits_a^b f_1^2(s)ds + q_2 \int\limits_{t_0}^T f_2^2(t)dt + q_0 v_0^2 \le 1. \tag{40}$$

На основі запропонованого в попередніх розділах алгоритму розроблено комп'ютерну програму ідентифікації інтегрального ядра задачі (37). Результати її роботи показано на рисунку, де *a* —розв'язок рівняння при початковому наближенні ядра; *b* — спостереження; *c* — розв'язок рівняння Рікатті; *d* — значення функції g; *e* — розв'язок спряженої системи; *f* — знайдений наближений розв'язок; *g* — точне значення інтегрального ядра; $h - o$ — оцінки інтегрального ядра до 10-ї ітерації; *p* — точне значення ядра (x2) та оцінка ядра (x8).

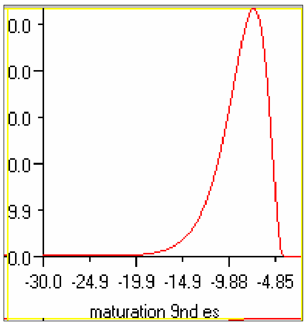

1.9
1.6
1.2
8.1
4.2
3.5
7.720 9.900 12.08 14.26 16.44 18.62
WBC concentrati
a
1.9
1.5
1.1
8.0
4.2
3.5
7.720 9.900 12.08 14.26 16.44 18.62
observations
b
0.1
0.1
0.0
0.0
0.0
1.1
0.0 5.389 10.77 16.16 21.55 26.94
Riccati equation
c
2.9
2.3
1.7
1.1
5.9
3.6
7.720 9.900 12.08 14.26 16.44 18.62
g
d
8.4
6.7
5.0
3.4
1.7
1.9
0.474 3.858 7.242 10.62 14.01 17.39
adjoint system sol
e
6.3
5.0
3.7
2.5
1.2
1.8
7.0 9.155 11.31 13.46 15.62 17.77
1th sol.estim.
f
0.0
0.0
0.0
0.0
0.0
0.0
-30.0 -24.9 -19.9 -14.9 -9.88 -4.85
maturation of WB
g
5.3
4.3
3.2
2.1
1.0
0.0
-30.0 -24.9 -19.9 -14.9 -9.88 -4.85
maturation 2nd es
h
7.4
5.9
4.4
2.9
1.4
0.0
-30.0 -24.9 -19.9 -14.9 -9.88 -4.85
maturation 3nd es
i
1.0
8.1
6.1
4.0
2.0
0.0
-30.0 -24.9 -19.9 -14.9 -9.88 -4.85
maturation 4nd es
j
1.3
1.1
8.3
5.5
2.7
0.0
-30.0 -24.2 -18.5 -12.7 -7.00 -1.25
maturation 5nd es
k
1.9
1.5
1.1
7.6
3.8
0.0
-30.0 -24.9 -19.9 -14.9 -9.88 -4.85
maturation 6nd es
l



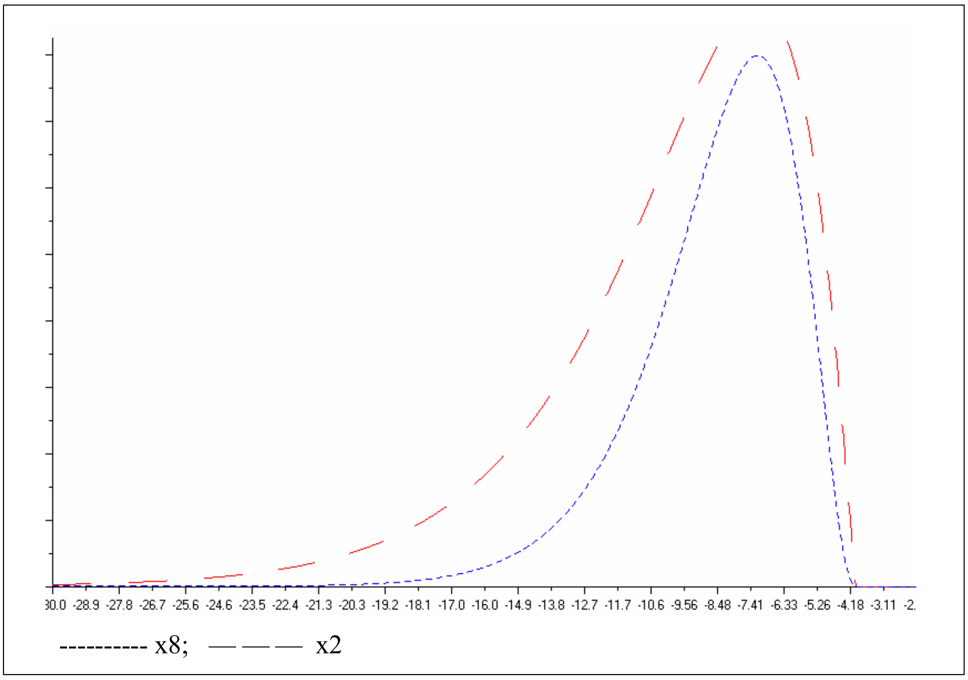
m



n



o



Результати роботи програми для системи (37) з параметрами *p*

$$\delta = 2; \ \ \beta = 3{,}2; \ \ q_0 = 1; \ \ q_1 = 10^4; \ \ q_2 = 0{,}01; \ \ x_0 = 0{,}001;$$
$$a = -20; \ \ b = -4; \ \ t_0 = 0; \ \ T = 30$$

ВИСНОВКИ

Розглянуто задачу ідентифікації параметрів диференціальних рівнянь, заданих у гільбертовому просторі. Встановлено умови існування розв'язків задачі, які збігаються з умовами неперервної залежності розв'язків диференціальних рівнянь від параметрів. У випадку лінійної моделі та простору L_2 умова полягає у збіжності в середньоквадратичному на апріорній множині. Побудовано конструктивний алгоритм розв'язування задачі ідентифікації у гільбертовому просторі, який зводиться до відповідної крайової задачі. Запропоновано спосіб її зведення до задач Коші та розглянуто один частковий випадок, який допускає розв'язок задачі не лише в операторному вигляді.

У подальших роботах буде запропоновано розв’язок проблем 1 та 2 у випадку моделей, заданих інтегродиференціальними рівняннями.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Моделювання* та аналіз глобальних біосферних процесів / О.Г. Наконечний, О.М. Трофимчук, І.В. Трофімова, Д.І. Черній. – Київ: ВПЦ «Київський ун-т», 2002. – 93 с.
2. *Ляшенко І.М.*, *Мукоєд А.П.* Моделювання біологічних та екологічних процесів. — Київ: ВПЦ «Київський ун-т», 2002. — 340 с.
3. *Marzeniuk V.P., Nakonechny A.G.* System analysis methods of medical and biological processes. — Ternopil: Ukrmedknyha, 2003. — 241p.
4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений: Пер.с англ. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
5. *Gopalsamy K.* Stability and oscillation in delay differential equations of population dynamics. — The Nethederlands. Kluwer Academic Publishers: AA Dordrecht, 1992. — 501 p.
6. *Наконечный А.Г.* Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. — Киев: КГУ, 1985. — 131 с.
7. *Бублик Б.Н., Данилов В.Я., Наконечный А.Г.* Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах. — Киев: УМК ПО, 1988. — 157 с.
8. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1988. — 518 с.
9. *Функциональный* анализ. Справочник под ред. Ф.Г. Крейна. — М.: Наука, 1972. — 544 с.
10. *Вершигора А.Е.* Общая иммунология: Учеб.пособие. — Киев: Вища шк., 1989. — 736 с.
11. *Жулкевич І.В., Марценюк В.П.* Визначення прогнозу структурно-функціональних змін кісткової тканини при гемобластозах // Вісник наук. досліджень. — 2002. — № 1. — С. 57–59.
12. *Marzeniuk V.P.* Qualitative analysis of human cells dynamics: stability, periodicity, bifurcations, control problems // Advances in Mathematics researches. — **5.** — New York: Nova Science Publisher, 2003. — P. 227–281.

Поступила 17.12.2003