8. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. — М. : Наука, 1987. — 480 с.
9. Afrouzi G. A. A Numerical Method for Finding Positive Solution of Dirichlet Problem with a Weight Function / G. A. Afrouzi, S. Mahdavi, Z. Naghizadeh // Journal of Information and Computing Science. — 2006. — Vol. 1. — № 3. — P. 168–172.
10. Amann H. On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces / H. Amann // J. Funct. Anal. — 1972. — № 11. — P. 346–384.
11. Chen G. Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations / G. Chen, J. Zhou, W.-M. Ni // Int. J. Bifurcation Chaos. — 2000. — Vol. 10. — № 7. — P. 1565–1612.
12. Pao C. V. Nonlinear parabolic and elliptic equations / C. V. Pao. — New York : Plenum Press, 1992.

The Dirichlet problem for the heat conduction equation with the nonlinear function of the power of heat sources and the coefficient of thermal conductivity, which is power dependent on temperature, is considered. To find its numerical solution, it is proposed to use the method of two-sided approximations. The results of the computational experiment in the unit circle for the case of the exponential dependence of the heat sources power on temperature are given.

Key words: *nonlinear heat conductivity, positive solution, two-sided iterative method, equation with heterotone operator.*

Отримано: 19.10.2017

УДК 517.5

В. А. Сорич, канд. фіз.-мат. наук,
Н. М. Сорич, канд. фіз.-мат. наук

Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам’янець-Подільський

СУМІСНЕ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ЗГОРТОК З ЯДРАМИ ПУАССОНА СУМАМИ ФУР’Є В МЕТРИЦІ ПРОСТОРУ L_p

Встановлено асимптотичні рівності для верхніх меж величини, що характеризує сумісне наближення частинними сумами Фур’є в метриці просторів L_p, $1 \le p \le \infty$, класів інтегралів Пуассона періодичних функцій, що належать одиничній кулі простору L_1.

Ключові слова: *інтеграли Пуассона, сумісне наближення в просторі L_p, суми Фур’є.*

Вступ. Стаття присвячена відшуканню асимптотичних рівностей для верхніх меж відхилень лінійних комбінацій згорток з ядрами Пуасона періодичних сумовних функцій від своїх сум Фур’є в метриці простору L_p.

Постановка задачі. Нехай $0 < q_i < 1$, $\beta_i \in R$, $i = \overline{1,m}$. Функції вигляду $P_q^\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$, де $0 < q < 1$, $\beta \in R$, називаються ядрами Пуассона. Будемо позначати $P_{q_i}^{\beta_i}(t) = P_i(t)$. Нехай S_1^0 — одинична куля простору сумовних 2π-періодичних функцій із нормою $\|\varphi\|_1 = \int_0^{2\pi} |\varphi(t)| dx$, які ортогональні константі. Якщо функція $f_i(x)$ є згорткою $\varphi(x) \in S_1^0$ із ядром $P_i(t)$, то будемо казати, що $f_i(x)$ належить класу $L_{\beta_i,1}^{q_i}$.

Через L_p, $1 \le p \le \infty$, позначимо простори функцій зі скінченними нормами $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dx\right)^{1/p}$. Позначимо через $\sum_{n,m}(\varphi; x) = \sum_{i=1}^{m}\left(f_i(x) - S_n(f_i; x)\right)$, де $S_n(f; x)$ — частинна сума порядку n ряду Фур’є функції $f(x)$, а величину

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(S_1^0\right)_p = \sup_{\varphi \in S_1^0} \left\| \sum\nolimits_{n,m}(\varphi; x) \right\|_p \tag{1}$$

приймемо за величину сумісного наближення класів $P_{\beta i}^{q_i} = \left\{ f \mid f = \varphi * P_i, \varphi \in S_1^0 \right\}$ сумами Фур’є в метриці простору L_p.

В даній роботі дослідимо асимптотичну поведінку при $n \to \infty$ величини $\mathcal{E}_{n,m}\left(S_1^0\right)_p$, а саме виділимо головний член та вкажемо порядок залишкового члена.

Основним результатом роботи є наступне твердження:

Теорема 1. Якщо $0 < q_i < 1$, $\beta_i \in R$, $i = \overline{1,m}$, $q = \max_i q_i$, то при $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(S_1^0\right)_p = \sqrt{A^2 + B^2}\, q^n \left(\frac{2}{\pi^{1+1/p}} \|\cos t\|_p K(p; q) + O(1)\frac{1}{n} \right), \tag{2}$$

де $A = \sum_{i: q_i = q} \cos\frac{\beta_i \pi}{2}$; $B = \sum_{i: q_i = q} \sin\frac{\beta_i \pi}{2}$, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по n, β_i,

$$K\left(p;q\right)=\frac{1}{2^{1+1/p}}\left\|\left(1-2q\cos t+q^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\|_p . \tag{3}$$

Допоміжні твердження. Нехай $f_i=\varphi * P_i$, тоді

$$f_i\left(x\right)-S_n\left(f_i;x\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\left(x+t\right)\sum_{k=n}^{\infty}q_i^k\cos\left(kt+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)dt ,$$

тому для $\forall\varphi\in S_1^0$ для виразу $\sum_{n,m}\left(\varphi;x\right)$ справедливе таке подання

$$\sum\nolimits_{n,m}\left(\varphi\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\left(x+t\right)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n}^{\infty}q_i^k\cos\left(kt+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)dt. \tag{4}$$

Аналогічно до [1] надалі дослідження асимптотичної поведінки величини (1) проведемо в два етапи. Спершу розглянемо той випадок, у якому всі числа q_i однакові, а потім, якщо серед них є різні.

Нехай $q_i=q$, $i=\overline{1,m}$, тоді із (4) одержимо

$$\sum\nolimits_{n,\mathrm{m}}\left(\varphi;x\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\left(x+t\right)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\left(\sum_{i=1}^{m}\cos\frac{\beta_i\pi}{2}\cos kt-\sum_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_i\pi}{2}\sin kt\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\left(x+t\right)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\left(\mathrm{A}\cos kt-B\sin kt\right)dt= \tag{5}$$

$$=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\left(x+t\right)\sum_{k=n}^{\infty}q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt,$$

де $\beta=\mathrm{arctg}\frac{B}{A}$, $A=\sum\limits_{i=1}^{m}\cos\frac{\beta_i\pi}{2}$, $B=\sum\limits_{i=1}^{m}\sin\frac{\beta_i\pi}{2}$.

Якщо ж серед чисел q_i є різні та $q=\max\limits_i q_i$, то при $q_i<q$ для довільного $\alpha>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}\left(\frac{q_i}{q}\right)^n=0$, тому $\left(\frac{q_i}{q}\right)^n=o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$, $\alpha>0$.

Тоді

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty}q_i^k\cos\left(kt+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)\right|\overset{df}{=}\left|P_{n,i}\left(t\right)\right|\le\sum_{k=n}^{\infty}q_i^k=\frac{q_i^n}{1-q_i}=q^n\left(\frac{q_i}{q}\right)^n\frac{1}{1-q_i}=q^n o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Отже, рівномірно по $\varphi\left(x\right)\in S_1^0$, $\beta_i\in R$ при $n\to\infty$

$$\left\|\int\limits_0^{2\pi}\varphi\left(x+t\right)\sum_{k=n}^{\infty}q_i^k\cos\left(kt+\frac{\beta_i\pi}{2}\right)dt\right\|_p=\left(\int\limits_0^{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}\varphi\left(x+t\right)P_{n,i}\left(t\right)dt\right|^p dx\right)^{1/p}\le$$

$$\le \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| \varphi(x+t) \right| \left| P_{n,i}(t) \right| dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= o\left(\frac{1}{n^\alpha} \right) q^n \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| \varphi(x+t) \right| dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \tag{6}$$

$$= o\left(\frac{1}{n^\alpha} \right) q^n \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| \varphi(t) \right| dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le o\left(\frac{1}{n^\alpha} \right) q^n \left(\|\varphi\|_1^p \, 2\pi \right)^{\frac{1}{p}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha} \right) q^n .$$

Якщо ж $q_i = q$, то розглянемо всі номери із такою умовою та для цих доданків застосуємо той алгоритм, який був використаний при одержанні рівності (5). Тому з урахуванням (6) одержимо, що

$$\sum\nolimits_{n,m} (\varphi; x) = \sqrt{A^2 + B^2} \, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2} \right) dt + r_n(\varphi; x), \tag{7}$$

де $\left\| r_n(\varphi; x) \right\|_p = o\left(\frac{1}{n^\alpha} \right) q^n$, $\alpha > 0$.

Об'єднаємо (5) та (7) і одержимо таке твердження:

Теорема 2. Нехай $0 < q_i < 1$, $\beta_i \in R$, $i = \overline{1,m}$, $q = \max_i q_i$, $p \ge 1$. Тоді для $\forall \varphi \in S_1^0, \forall x \in R$ при $n \to \infty$ справедлива асимптотична рівність

$$\sum\nolimits_{n,m} (\varphi; x) = \sqrt{A^2 + B^2} \, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x+t) \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2} \right) dt + r_n(\varphi; x), \tag{8}$$

де $A = \sum\limits_{i:q_i = q} \cos\frac{\beta_i \pi}{2}$; $B = \sum\limits_{i:q_i = q} \sin\frac{\beta_i \pi}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\beta\pi}{2} = \frac{B}{A}$, $\left\| r_n(\varphi; x) \right\|_p = o\left(\frac{1}{n^\alpha} \right) q^n$, $\alpha > 0$.

Доведення теореми 1. Нехай

$$\mathcal{P}_{q,1}^{\beta} = \{ f \mid f = \varphi * P_q^\beta : \varphi \in S_0^1, \; P_q^\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2} \right) \} .$$

Тоді для $\forall \varphi \in S_1^0$ в класі $\mathcal{P}_{q,1}^{\beta}$ знайдеться функція $f^*(x)$ така, що

$$\sum\nolimits_{n,m} (\varphi; x) = \sqrt{A^2 + B^2} \left(f^*(x) - S_n(f^*; x) \right) + r_n(\varphi; x). \tag{9}$$

Тому згідно (9) для величини $\mathcal{E}_{n,m}\left(S_1^0\right)_p$ справедливе подання

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(S_1^0\right)_p = \sqrt{A^2+B^2}\sup_{\varphi\in\mathcal{P}_{q,1}^{\beta}}\left\|f\left(x\right)-S_n\left(f;x\right)\right\|_p + o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)q^n,\ \alpha>0\,. \quad (10)$$

Як випливає із роботи [2]

$$\sup_{f\in\mathcal{P}_{q,1}^{\beta}}\left\|f\left(x\right)-S_n\left(f;x\right)\right\|_p = q^n\left(\frac{2}{\pi^{1+1/p}}\left\|\cos t\right\|_p K\left(p;q\right)+O\left(1\right)\frac{q}{n\left(1-q\right)^{\sigma(p)}}\right), \quad (11)$$

де $\sigma\left(p\right)=\begin{cases}1, p=1\\ 2, p>1\end{cases}$, $K\left(p;q\right)=\frac{1}{2^{1+1/p}}\left\|\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}}\right\|_p$, а $O\left(1\right)$ — величина, рівномірно обмежена по n,p,q,β .

Виберемо у співвідношенні (10) $\alpha=1$, об'єднуємо його із (11) та переконуємося у справедливості (2).

Теорема 1 доведена.

Відома формула (див., наприклад, [3, с. 383]) $\left\|\cos t\right\|_p^p = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\left(p+1\right)/2\right)}{\Gamma\left(p/2+1\right)}$, де $\Gamma\left(\cdot\right)$ — гамма функція.

Враховуючи цей факт, із теореми 1 одержимо таке твердження:

Теорема 3. Якщо виконуються умови теореми 1, $p\ge 1$, то при $n\to\infty$

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(S_1^0\right)_p = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\pi}q^n\left(\frac{2^{1+1/p}}{\pi^{1/2p}}\left(\frac{\Gamma\left(\left(p+1\right)/2\right)}{\Gamma\left(p/2+1\right)}\right)^{1/p}K\left(p;q\right)+O\left(1\right)\frac{1}{n}\right), \quad (12)$$

де A, B, $K\left(p;q\right)$, $O\left(1\right)$ мають той самий зміст, що у теоремі 1.

Зокрема при $p=1$, $\left\|\cos t\right\|_1=4$,

$$K\left(p;q\right)=K\left(1;q\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sqrt{1-2q\cos t+q^2}}=K\left(q\right),$$

де $K\left(q\right)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду, тому на підставі (12) при $n\to\infty$

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(S_1^0\right)_1 = \sqrt{A^2+B^2}\,q^n\left(\frac{8}{\pi^2}K\left(q\right)+O\left(1\right)\frac{1}{n}\right) \quad (13)$$

Якщо $p=2l$, $l\in N$, то (див. [3, с. 382])

$$K\left(p;q\right)=\frac{\pi^{1/p}}{2\sqrt{1-q^2}}\left(\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1}\frac{\left(\frac{p}{2}+k-1\right)!}{\left(k!\right)^2\left(\frac{p}{2}-k+1\right)!}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\right)^k\right)^{1/p},$$

$\left\|\cos t\right\|_p^p=\dfrac{2\pi\left(p-1\right)!!}{p!!}$, тому для всіх парних p

$$\mathcal{E}_{n,m}\left(S_1^0\right)_p=\sqrt{A^2+B^2}\,q^n\times$$

$$\times\left(\frac{2^{1/p}}{\pi^{1/p'}\sqrt{1-q^2}}\left(\frac{\left(p-1\right)!!}{p!!}\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1}\frac{\left(\frac{p}{2}+k-1\right)!}{\left(k!\right)^2\left(\frac{p}{2}-k+1\right)!}\left(\frac{q^2}{1-q^2}\right)^k\right)^{1/p}+O\left(1\right)\frac{1}{n}\right), \tag{14}$$

де $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, $n\to\infty$.

При $m=1$ рівності (3), (12), (13), (14) одержані в роботі [2].

Висновки. В асимптотичних рівностях (2) та (8) головні члени мають той самий вигляд що і аналогічні величини в роботі[1], в якій досліджували асимптотику виразу $\sum_{n,m}(\varphi,x)$ в рівномірній метриці.

Список використаних джерел:

1. Сорич В. А. Наближення сум згорток з ядрами Пуассона сумами Фур'є в рівномірній метриці / В.А. Сорич, Н. М. Сорич // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 9. — С. 100–104.
2. Сердюк А. С. Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці / А. С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2005. — Вип. 57, № 10. — С. 1395–1408.
3. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — М. : Физматгиз, 1963. — 1100 с.

We find asymptotic equalities for upper founds of quantity characterizing the joint-approximation by Fourier partial sums in a metric spice L_p, $1\le p\le\infty$, on classes of the Poisson integrals of periodic functions belonging to the unit ball of space L_1.

Key words: Poisson integrals, the joint-approximation, joint approximation in space L_p, Fourier sums.

Отримано: 20.06.2017