чальными данными / В. А. Литовченко, Е. Б. Васько // Дифф. уравн. — 2014. — Т. 50, № 12. — С. 1598–1606.
13. Литовченко В. А. Задача Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных систем с негладкими символами / В. А. Литовченко // Сиб. матем. журн. — 2008. — Т. 49, № 2. — С. 375–39
14. Litovchenko V. A. Cauchy problem for $\{\vec{p},\vec{h}\}$ – parabolic equations with time-dependent coefficients / V. A. Litovchenko // Math. Notes. — 2005. — Vol. 77, № 3–4. — P. 364–379.
15. Березанский Ю. М. Функциональный анализ. Курс лекций : учеб. пособие / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. — К. : Выща шк., 1990. — 600 с.

We have constructed countably-normed spaces of main and generalized functions by expanding spaces of Gelfand I. M. and Shilov G. Ye. Elements of this spaces have limited degree of smoothness. We have investigated completeness of spaces and found the convergence criterion, and the structure of distributions.

Key words: S *-type spaces, generalized functions.*

Отримано:16.03.2017

УДК 517.977.56

К. Б. Мансимов[*,],** д-р физ.-мат. наук, профессор,
Г. Ш. Рамазанова[*], научный сотрудник

[*]Институт Систем Управления НАН Азербайджана,
г. Баку, Азербайджан,
[**] Бакинский Государственный Университет, г. Баку, Азербайджан

ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ТИПА НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ ТИПА ФОРНАЗИНИ–МАРКЕЗИНИ

Рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая системой Форназини–Маркезини. Получено необходимое условие оптимальности в терминах производных по направлениям. Отдельно рассмотрен случай квазидифференцируемого функционала.

Ключевые слова: *дискретная двухпараметрическая система, 2-D дискретная система, необходимое условие оптимальности, условие Липшица, производная по направлению, квазидифференцируемый функционал.*

Введение. Основной результат теории необходимых условий оптимальности, принцип максимума Понтрягина (см. напр. [1–3]), сначала был доказан для задач оптимального управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Далее он был распространен на различные задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами, и в частности, на задачи управления системами Гурса-Дарбу [4–8].

При этом предполагалась, что правые части системы уравнений и функционала качества по состоянию являются гладкими. В дальнейшем в связи с потребностью теории и практики начали устанавливать необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина в различных негладких задачах управления обыкновенными динамическими системами (см. напр. [7–10]).

Предлагаемая же работа посвящена исследованию одной негладкой задачи управления дискретными двухпараметрическими системами. Установлены ряд необходимых условий оптимальности первого порядка.

Постановка задачи. Предположим, что дискретный управляемый процесс описывается системой разностных уравнений

$$z(t+1,x+1)=f\big(t,x,z(t,x),z(t+1,x),z(t,x+1),u(t,x)\big),$$

$$(t,x)\in T\times X,$$

$$\big(T=\{t_0,t_0+1,...,t_1-1\};\ X=\{x_0,x_0+1,...,x_1-1\}\big) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0,x)&=a(x),\ x\in X\cup x_1,\\ z(t,x_0)&=b(t),\ t\in T\cup t_1,\\ a(x_0)&=b(t_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $f(t,x,z,p,q,u)$ — заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных, причем каждая ее компонента удовлетворяет условию Липшица по (z,p,q,u) и имеет производные по любому направлению, т.е. существуют пределы (см. напр. [9, 10])

$$\frac{\partial f(t,x,z,p,q,u)}{\partial[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]}=$$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\frac{f_i(t,x,z+\alpha\beta_1,p+\alpha\beta_2,q+\alpha\beta_3,u+\alpha\beta_4)-f(t,x,z,p,q,u)}{\alpha},$$

$$i=\overline{1,n},$$

где $\beta_i\in R^n$, $i=\overline{1,3}$, $\beta_4\in R^r$, $a(x)$, $b(t)$ –заданные n-мерные дискретные вектор-функции, $u(t,x)$ — r-мерная дискретная управляющая вектор-функция со значениями из заданного непустого, ограниченного и выпуклого множества U, т.е.

$$u(t,x) \in U \subset R^r, \ (t,x) \in D = T \times X . \qquad (3)$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми. На решениях краевой задачи (1)–(2) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$J(u) = \Phi\big(z(t_1, x_1)\big). \qquad (4)$$

Здесь $\Phi(z)$ — заданная в R^n скалярная функция, удовлетворяющая условию Липшица и имеющая производные по любому направлению.

Допустимое управление $u(t,x)$, доставляющее минимум функционалу (4) при ограничениях (1)–(3) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\big(u(t,x),\, z(t,x)\big)$ — оптимальным процессом.

Основные результаты. Выведем необходимые условия оптимальности в рассматриваемой задаче. Считая $\big(u(t,x),\, z(t,x)\big)$ — фиксированным допустимым процессом, положим

$$\Delta u_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\big[v(t,x) - u(t,x)\big] = \varepsilon\, q(t,x), \qquad (5)$$

где $\varepsilon \in [0,1]$ — произвольное число, а $v(t,x)$ — произвольное допустимое управление.

Введем обозначения

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial z} = \frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),z(t+1,x),z(t,x+1),u(t,x)\big)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial p} = \frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),z(t+1,x),z(t,x+1),u(t,x)\big)}{\partial p},$$

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial q} = \frac{\partial f\big(t,x,z(t,x),z(t+1,x),z(t,x+1),u(t,x)\big)}{\partial q}.$$

Положим $u(t,x;\,\varepsilon) = u(t,x) + \varepsilon\, q(t,x)$ и через $z(t,x;\,\varepsilon) = z(t,x) + \Delta z(t,x;\,\varepsilon)$ обозначим решение системы (1)–(2) соответствующее «возмущенному» управлению $u(t,x;\,\varepsilon)$.

Положим по определению

$$h(t,x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{z(t,x;\,\varepsilon) - z(t,x)}{\varepsilon}, \qquad (6)$$

где $h(t,x) = \left(h^{(1)}(t,x) \ldots,\, h^{(n)}(t,x)\right)'$ — n-мерный вектор с координатами $h^i(t,x)$, а $(')$ оператор транспонирования.

Из (1)–(2) ясно, что

$$z(t+1,x+1;\,\varepsilon)=f\left(t,x,z(t,x;\,\varepsilon),z(t+1,x;\,\varepsilon),z(t,x+1;\,\varepsilon),u(t,x;\,\varepsilon)\right). \quad (7)$$

$$z(t_0,x;\,\varepsilon)=a(x),$$
$$z(t,x_0;\,\varepsilon)=b(t),$$
$$a(x_0)=b(t_0).$$

Используя возмущенную систему получаем, что $h(t,x)$ определяемая формулой (6) является решением задачи

$$h(t+1,x+1)=\frac{\partial f(t,x)}{\partial\left[h(t,x),h(t+1,x),h(t,x+1)\right]}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} h(t_0,x)&=0,\ x\in X\cup x_1,\\ h(t,x_0)&=0,\ t\in T\cup t_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем использованы обозначения типа

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial\left[h(t,x),h(t+1,x),h(t,x+1)\right]}=$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1\left(t,x,z(t,x),z(t+1,x),z(t,x+1),u(t,x)\right)}{\partial\left[h(t,x),h(t+1,x),h(t,x+1)\right]}\\ \dfrac{\partial f_2\left(t,x,z(t,x),z(t+1,x),z(t,x+1),u(t,x)\right)}{\partial\left[h(t,x),h(t+1,x),h(t,x+1)\right]}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f_n\left(t,x,z(t,x),z(t+1,x),z(t,x+1),u(t,x)\right)}{\partial\left[h(t,x),h(t+1,x),h(t,x+1)\right]} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем, что

$$\begin{aligned} z(t,x;\,\varepsilon)&=z(t,x)+\varepsilon\,h(t,x)+o(\varepsilon;\,t,x),\\ z(t+1,x;\,\varepsilon)&=z(t+1,x)+\varepsilon\,h(t+1,x)+o(\varepsilon;\,t,x),\\ z(t,x+1;\,\varepsilon)&=z(t,x+1)+\varepsilon\,h(t,x+1)+o_1(\varepsilon;\,t,x+1). \end{aligned} \quad (10)$$

Так как функция $\Phi(z)$ имеет производную по направлениям и удовлетворяет условию Липшица, то учитывая (10) можно записать

$$\mathrm{S}\left(u(t,x;\,\varepsilon)\right)-S\left(u(t,x)\right)=\Phi\left(z(t_1,x_1;\varepsilon)\right)-\Phi\left(z(t_1,x_1)\right)=$$
$$=\left[\Phi\left(z(t_1,x_1)+\varepsilon\,h(t_1,x_1)+o(\varepsilon;\,t_1,x_1)\right)-\Phi\left(z(t_1,x_1)+\varepsilon\,h(t_1,x_1)\right)\right]+ \quad (11)$$
$$+\left[\Phi\left(z(t_1,x_1)+\varepsilon\,h(t_1,x_1)\right)-\Phi\left(z(t_1,x_1)\right)\right].$$

Ясно, что

$$\left|\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)+\varepsilon h\left(t_1,x_1\right)+o\left(\varepsilon;\, t_1,x_1\right)\right)-\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)+\varepsilon h\left(t_1,x_1\right)\right)\right|\le o_2\left(\varepsilon\right), \quad (12)$$

$$\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)+\varepsilon h\left(t_1,x_1\right)\right)-\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)=\varepsilon\frac{\partial\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial h\left(t_1,x_1\right)}+o_3\left(\varepsilon\right). \quad (13)$$

С учетом соотношений (12), (13) из (11) имеем

$$\begin{gathered}\mathrm{S}\left(u\left(t,x;\,\varepsilon\right)\right)-S\left(u\left(t,x\right)\right)=\\ =\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)+\varepsilon h\left(t_1,x_1\right)+o\left(\varepsilon;\, t_1,x_1\right)\right)-\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)=\\ =\varepsilon\frac{\partial\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial h\left(t_1,x_1\right)}+o_4\left(\varepsilon\right).\end{gathered} \quad (14)$$

Отсюда, в силу произвольности $\varepsilon\in\left[0,1\right]$ следует

Теорема 1. Для того, чтобы допустимое управление $u\left(t,x\right)$ было оптимальным управлением необходимо, чтобы неравенство

$$\frac{\partial\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial h\left(t_1,x_1\right)}\ge 0 \quad (15)$$

выполнялось для всех допустимых вариаций $h\left(t_1,x_1\right)$ состояние системы (1)–(2).

Неравенство (15) является довольно общим, и учитывает особенности (негладкости) системы (1) и функционала (4).

Для того, чтобы из нее получить более конструктивно проверяемые необходимые условия оптимальности уже надо использовать специфические свойства функций $f\left(t,x,z,p,q,u\right)$ и $\Phi\left(z\right)$.

Предположим, что правая часть системы уравнений (1) имеет непрерывные производные по $\left(z,p,q,u\right)$. Тогда краевая задача (8)–(9) примет вид

$$\begin{gathered}h\left(t+1,x+1\right)=\frac{\partial f\left(t,x\right)}{\partial z}h\left(t,x\right)+\frac{\partial f\left(t,x\right)}{\partial p}h\left(t+1,x\right)+\\ +\frac{\partial f\left(t,x\right)}{\partial q}h\left(t,x+1\right)+\frac{\partial f\left(t,x\right)}{\partial u}\left(v\left(t,x\right)-u\left(t,x\right)\right),\end{gathered} \quad (16)$$

$$\begin{gathered}h\left(t_0,x\right)=0,\ x=x_0,x_0+1,\dots,x_1,\\ h\left(t,x_0\right)=0,\ t=t_0,t_0+1,\dots,t_1.\end{gathered} \quad (17)$$

Пусть далее $\Phi\left(z\right)$ квазидифференцируема в «точке» $z\left(t_1,x_1\right)$. Тогда по определению квазидифференцируемой функции (см. напр. [9, с. 128–152], [10, с. 255–263]) неравенство имеет вид

$$\frac{\partial\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)}{\partial h\left(t_1,x_1\right)}=\max_{A\in\underline{\partial}\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)}A'h\left(t_1,x_1\right)+\min_{B\in\overline{\partial}\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)}B'h\left(t_1,x_1\right)\geq 0. \tag{18}$$

Здесь $\left[\underline{\partial}\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right),\overline{\partial}\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)\right]$ — квазидифференциал функции $\Phi\left(z\right)$ в «точке» $z\left(t_1,x_1\right)$, где $\underline{\partial}\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)$, $\overline{\partial}\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)$ есть выпуклые компактные множества (см. напр. [9, с. 130], [16, с. 176]).

Решение краевой задачи (16)–(17) допускает представление (см. напр. [11])

$$h\left(t,x\right)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R\left(t,x;\,\tau,s\right)\frac{\partial f\left(\tau,s\right)}{\partial u}\left(v\left(\tau,s\right)-u\left(\tau,s\right)\right), \tag{19}$$

где $R\left(t,x;\,\tau,s\right)$ $\left(n\times n\right)$ — матричная функция, являющаяся решением задачи

$$\begin{gathered}R\left(t,x;\,\tau-1,s-1\right)=R\left(t,x;\,\tau,s\right)\frac{\partial f\left(\tau,s\right)}{\partial z}+\\+R\left(t,x;\,\tau-1,s\right)\frac{\partial f\left(\tau-1,s\right)}{\partial p}+R\left(t,x;\,\tau,s-1\right)\frac{\partial f\left(\tau,s-1\right)}{\partial q},\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}R\left(t,x;\,\tau-1,x-1\right)=R\left(t,x;\,\tau,x-1\right)f_q\left(\tau,x-1\right),\\R\left(t,x;\,t-1,s-1\right)=R\left(t,x;\,t-1,s\right)f_p\left(t-1,s\right),\\R\left(t,x;\,t-1,x-1\right)=E.\end{gathered} \tag{21}$$

Здесь E — $\left(n\times n\right)$ единичная матрица.

Учитывая представление (19) в неравенстве (18) будем иметь

$$\begin{gathered}\max_{A\in\underline{\partial}\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}A'R\left(t_1,x_1;\,\tau,s\right)\frac{\partial f\left(\tau,s\right)}{\partial u}\left(v\left(\tau,s\right)-u\left(\tau,s\right)\right)+\\+\min_{B\in\overline{\partial}\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}B'R\left(t_1,x_1;\,\tau,s\right)\frac{\partial f\left(\tau,s\right)}{\partial u}\left(v\left(\tau,s\right)-u\left(\tau,s\right)\right)\geq 0.\end{gathered} \tag{22}$$

Полагая

$$\begin{gathered}\psi_A\left(\tau,s\right)=R'\left(t_1,x_1;\,\tau,s\right)A,\\\psi_B\left(\tau,s\right)=R'\left(t_1,x_1;\,\tau,s\right)B,\end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered}H\left(t,x,z\left(t,x\right),z\left(t+1,x\right),z\left(t,x+1\right),v,\psi_A\left(t,x\right)\right)=\\=\psi_A'\left(t,x\right)f\left(t,x,z\left(t,x\right),z\left(t+1,x\right),z\left(t,x+1\right),v\right)\end{gathered}$$

неравенство (22) записывается в виде

$$\max_{A\in\underline{\partial}\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x_1-1}\Big[H'_u\left(t,x,z\left(t,x\right),z\left(t+1,x\right),\right.$$
$$\left.z\left(t,x+1\right),u\left(t,x\right),\psi_A\left(t,x\right)\right)\left(v\left(t,x\right)-u\left(t,x\right)\right)\Big]+ \tag{24}$$
$$+\min_{B\in\bar{\partial}\Phi\left(z\left(t_1,x_1\right)\right)}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{s=x_0}^{x_1-1}H'_u\left(t,x,z\left(t,x\right),z\left(t+1,x\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.z\left(t,x+1\right),u\left(t,x\right),\psi_B\left(t,x\right)\right)\left(v\left(t,x\right)-u\left(t,x\right)\right)\right]\geq 0.$$

Теорема 2. Пусть $f\left(t,x,z,p,q,u\right)$ непрерывно дифференцируема по $\left(z,p,q,u\right)$, а $\Phi\left(z\right)$ квазидифференцируемая скалярная функция. Тогда для оптимальности допустимого управления $u\left(t,x\right)$ в задаче (1)–(5) необходимо, чтобы неравенство (24) выполнялось для всех $v\left(t,x\right)\in U$, $\left(t,x\right)\in D$.

Используя обозначения (22) получим аналоги сопряженной системы из [8] для рассматриваемой задачи.

Из (23) с учетом (20) следует, что

$$\psi_A\left(t-1,x-1\right)=-R'\left(t_1,x_1;\,t-1,x-1\right)A=$$
$$=-\left[\frac{\partial f'\left(t,x\right)}{\partial z}R'\left(t_1,x_1;\,t,x\right)A+\frac{\partial f'\left(t-1,x\right)}{\partial p}R\left(t_1,x_1;t-1,x\right)A+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial f\left(t,x-1\right)}{\partial q}R\left(t_1,x_1;t,x-1\right)A\right].$$

Отсюда получаем, что

$$\psi_A\left(t-1,x-1\right)=H_z\left(t,x,z\left(t,x\right),z\left(t+1,x\right),z\left(t,x+1\right),u\left(t,x\right),\psi_A\left(t,x\right)\right)+$$
$$+H_p\left(t-1,x,z\left(t-1,x\right),z\left(t,x\right),z\left(t-1,x+1\right),u\left(t-1,x\right),\psi_A\left(t-1,x\right)\right)+ \tag{25}$$
$$+H_q\left(t,x-1,z\left(t,x-1\right),z\left(t+1,x-1\right),z\left(t,x\right),u\left(t,x-1\right),\psi_A\left(t,x-1\right)\right).$$

Далее принимая во внимание (21) имеем

$$\psi_{\mathrm{A}}\left(t_1-1,x-1\right)=$$
$$=H_p\left(t_1-1,x;\,z\left(t_1-1,x\right),z\left(t_1,x\right),z\left(t_1-1,x+1\right),u\left(t_1-1,x\right),\psi_A\left(t_1-1,x\right)\right),$$
$$\psi_A\left(t-1,x_1-1\right)=$$
$$=H_q\left(t,x_1-1;\,z\left(t,x_1-1\right),z\left(t+1,x_1-1\right),z\left(t,x_1\right),u\left(t,x_1-1\right),\psi_A\left(t,x_1-1\right)\right), \tag{26}$$
$$\psi_A\left(t_1-1,x_1-1\right)=-A\,.$$

Следовательно доказали, что $\psi_A(t,x)$ определяемая формулой (23) является решением разностной задачи (25)–(26).

Аналогично получается уравнение для $\psi_B(t,x)$.

Выводы. Изучается одна негладкая задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами типа Форназини-Маркезини при предположении выпуклости области управления. Получено общее необходимое условие оптимальности в терминах производных по направлениям. Затем изучены конкретные случаи позволяющие конкретизировать полученный общий результат.

Список использованной литературы:

1. Понтрягин Л. С. Теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мишенко. — М. : Наука, 1986. — 363 с.
2. Габасов Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — Минск : Наука и техника, 1974.
3. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М. : Наука, 1988.
4. Егоров А. И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами / А. И. Егоров // Автоматика и телемеханика. — 1964. — №5. — С. 613–623.
5. Ахмедов К. Т. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления / К. Т. Ахмедов, С. С. Ахиев // Докл. АН Азерб.ССР. — 1972. — Т. 28. — № 5. — С. 12–16.
6. Васильев О. В. Методы оптимизации и их приложения. Часть 2. / О. В. Васильев, В. А. Срочко, В. А. Терлецкий. — Новосибирск : Наука, 1990. — 151 с.
7. Сумин В. И. Функциональные Вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть 1. / В. И. Сумин — Нижний Новгород : Изд-во ННГУ, 1992. — 110 с.
8. Мансимов К. Б. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу / К. Б. Мансимов, М. Дж. Марданов. — Баку : Изд-во ЭЛМ, 2010. — 361 с.
9. Демьянов В. Ф. Негладкие задачи теории оптимизации и управления / В. Ф. Демьянов и др. — Л. : Изд-во Ленинградского университета, 1982. — 322 с.
10. Демьянов В. Ф. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление / В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. — М. : Наука, 1990. — 432 с.
11. Мансимов К. Б. Необходимые условия оптимальности в одной негладкой задаче управления с переменной структурой / К. Б. Мансимов, А. Г. Язданхаг // Автоматика и вычислительная техника. — 2008. — Т. 42. — №5. — С. 5–14.
12. Mansimov K. B. Necessary conditions of optimality in one problem of control with variable structure and functional restrictions / K. B. Mansimov, A. H. Yazdankhah // Report National Academy of Sciences of Azerbaijan. — 2009. — № 6. — P. 3–9.

13. Мансимов К. Б. Дискретные системы / К. Б. Мансимов — Баку : Изд-во БГУ, 2013. — 131 с.

In this work the is considered on optimal control problem for discrete two parametric systems the Fornasini-Marchesini type. The first order necessary optimality conditions are obtained.

Key words: *discrete two parametric system, 2-D discrete system, necessary optimality conditions, Lipshis condition, kuasidifferential functional.*

Отримано: 02.06.2017

УДК 517.9

В. В. Мороз, старший викладач

Хмельницький національний університет, Хмельницький

КРАЙОВА ЗАДАЧА З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З ОПЕРАТОРАМИ БЕССЕЛЯ-ЛЕЖАНДРА-ЕЙЛЕРА

Методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Лежандра-Ейлера зі спектральним параметром одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для рівнянь параболічного типу на трискладовому сегменті з м'якими межами.

Ключові слова: *параболічне рівняння, гібридний диференціальний оператор, функції Коші, впливу та Гріна крайової задачі, гібридне інтегральне перетворення зі спектральним параметром, основна тотожність, головні розв'язки.*

Вступ. У класичній теорії теплопровідності розглядаються крайові задачі, в яких на межі області Γ задається тепловий режим або тепловий потік у напрямку нормалі $\vec{n}$ або теплообмін за законом Ньотона із зовнішнім середовищем через поверхню. В загальному випадку крайові умови мають вигляд [8]

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial \vec{n}} + h_2\right) T(M,t)\Bigg|_{\Gamma} = g(P,t),$$

де точка $P \in \Gamma$, $\vec{n}$ — зовнішня нормаль, і відображать процес поширення тепла, коли межа тіла є жорсткою по відношенню до відбиття теплових хвиль.

Але, якщо припустити, що на межі середовища може відбуватись поглинання хвиль (м'яка межа), то оператор крайової умови міститиме похідну по часу і матиме вигляд

