Список використаних джерел:

1. Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. К.: Наук. думка, 1981. 281 с.
2. Бурдюк В. Я. Дискретное метрическое пространство. Днепропетровск. ДГУ, 1982. 99 с.
3. Skordev D. Recursion theory on iterative combinatory spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér Sci. Math. Astronom. Phys*. 1976. 24**,** N 1. P. 23–31.
4. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет. 2000. 352 с.
5. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ. 2007. 32 с.

Formation and regulation of combinatorial configurations which are the points of significant combinatorial space is described. From formation combinatorial sets follows that these spaces exist in two states: convolute (tranquility) and unfolding (dynamics). They simultaneously are eventual and endless and for them peculiar selfsimilarity, that characteristically to the structures of fractals.

Key words: *significant combinatorial space, fractals, selfsimilarity, combinatorial configurations, combinatorial set.*

Одержано 07.02.2017

УДК 519.6

І. С. Томанова, аспірантка

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

ПРО ВИКОРИСТАННЯ СПЛАЙНІВ П'ЯТОГО СТЕПЕНЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ЗГИН ЖОРСТКО ЗАЩЕМЛЕНОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ

В роботі розглянуто використання сплайнів 5-го степеня на трикутній сітці вузлів для розв'язання задачі про згин для жорстко защемленої круглої пластини з рівномірним навантаженням.

Ключові слова: *сплайни 5-го степеня, бігармонічна задача, кругла пластина, рівномірно розподілене навантаження, R-функції.*

Вступ. Використання сплайнів 5-го степеня на практиці не досліджувалося у зв'язку з відсутністю явних формул для базисних поліномів 5-го степеня інтерполяції таких сплайнів на трикутній сітці вузлів. В роботі [1] запропоновані явні формули для сплайнів 5-го степеня на довільній сітці трикутників.

Основна мета роботи — розробка та дослідження схеми метода скінченних елементів (МСЕ) для розв'язання задач про згин жорстко защемленої пластини з використанням сплайнів 5-го степеня. Результати проведеного обчислювального експерименту порівнюються з відомими результатами.

Формулювання бігармонічної задачі. Задача про згин та коливання жорстко защемлених пластин полягає в інтегруванні бігармонійного рівняння

$$D(\Delta\Delta W) = f(x, y)$$

при крайових умовах

$$W\Big|_{\partial G} = 0\,,\ \frac{\partial W}{\partial \nu}\Big|_{\partial G} = 0\,. \qquad (1)$$

У роботі Рвачова В. Л. [2] представлена структура розв'язку такої задачі:

$$W = \psi^2 \Phi\,.$$

Представляючи невизначену функцію Φ наближено у вигляді

$$\Phi \approx \sum_{i+j=0, i\geq 0, j\geq 0}^{m} a_{ij} T_i(\lambda \mathrm{x})\,\mathrm{T}_j(\mu \mathrm{y})\,.$$

Розв'язок шукається у вигляді

$$W_n = \psi^2 \sum_{i+j=0}^{m} a_{ij} T_i(\lambda x) T_j(\mu y),$$

де $T_k(t)$ — повна система поліномів Чебишева; $n = C_{m+2}^2 = \dfrac{(m+2)(m+1)}{2}$;

a_{ij} — невизначені коефіцієнти, які знаходяться з умови мінімуму відповідного функціоналу

$$I = \iint_{\Omega} (h^3 (\Delta W)^2 - 2Wf(x, y))dxdy$$

на множині функцій, що задовольняють умовам (1); μ та λ — масштабні коефіцієнти, які обираються залежно від розмірів пластини за напрямком осей Ox, Oy відповідно.

Для обчислювального експерименту оберемо округлу область, показану на рис. 1, яка за допомогою *R*-функцій записується у вигляді $\psi(x, y) = f_1$, де функція f_1, визначаються наступним аналітичним рівнянням:

$$f_1 = -x^2 - y^2 + 1 \geq 0\,.$$

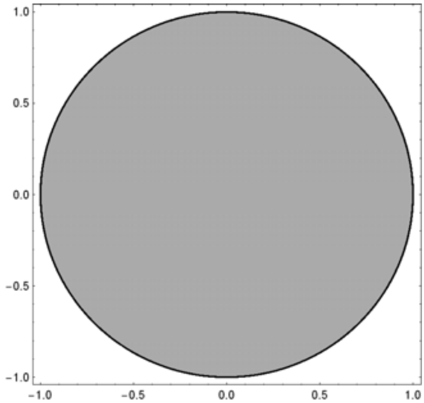


Рис. 1. *Досліджувана область*

Точний розв'язок задачі про згин жорстко защемленої пластини з рівномірним навантаженням наведено в [3, 4] у вигляді

$$W(x, y) = \frac{qa^4}{64 * D}(1-\rho^2)^2,$$

де $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\upsilon^2)}$ — формула для зігнутої кривої (жорсткість пластини при вигині), E — модуль пружності матеріалу; υ — коефіцієнт Пуассона; h — товщина пластини; q — навантаження, розподілене на поверхні пластини, ρ — відносна координата.

Алгоритм побудови сплайнів 5-го степеня для розв'язання бігармонічної задачі для жорстко защемленої пластини. Наведемо алгоритм побудови сплайнів 5-го степеня для розв'язання бігармонічної задачі жорстко защемленої пластини на області G.

1. Область G розбиваємо на трикутники. Отримані трикутники задаються набором з трьох точок вигляду (x_i, y_i), $i = \overline{1, m}$. Трикутник $T = T_{ijk}$ $i, j, k \in \{1, 2, ..., m\}$, $i \neq j \neq k$.

У результаті такого розбиття задана область G буде розбита на N трикутників.

2. Вводимо лінійну нумерацію невідомих параметрів, які відповідають функціям базисних поліномів 5-го степеня $h_{0,0}, h_{1,0}$, $h_{0,1}, h_{2,0}, h_{1,1}, h_{0,2}$ відповідно, для кожної з вершин трикутників. Причому для вершин трикутників, які знаходяться на границі області G задля задоволення граничних умов задачі відповідні константи покладаються рівними нулю.

3. Продовжуємо лінійну нумерацію для невідомих параметрів, які відповідають функціям базисних поліномів 5-го степеня при нормалях до середин сторін трикутників. Згідно з граничною умовою, якщо точка $M_{ij} \in \partial G$, то константу в цій точці покладемо рівній нулю.

В результаті пунктів 2 та 3 отримаємо набір з K невідомих параметрів.

4. Використавши поліноми отримані на трикутнику можна записати кусково-поліноміальну функцію, яка на кожному із трикутників розбиття матиме наступний вигляд:

$$S_5^{ijk}(x,y) = w(x,y) + \sum_{(i,j)\in Q}^{3} \left(c_{ij} - \frac{\partial w}{\partial \upsilon_{ij}} \right)\Bigg|_{M_{ij}} \cdot H_{i,j}(x,y), \qquad (2)$$

де $w(x,y) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{0\le|\beta|\le 2} c_{i,\beta} \cdot h_{i,\beta}(x,y)$, $c_{i,\beta}$ — невідомі параметри, що відповідають функціям $h_{i,\beta}$, $c_{i,j}$ — невідомі параметри, що відповідають нормалям до середини сторони трикутника з вершинами *i* та *j*.

5. Використовуємо отримані сплайни для знаходження інтегралів вигляду:

$$I_k = \int_{T_k} \left(\left(\frac{\partial S_k(x,y)}{\partial x^2} \right)^2 + 2\left(\frac{\partial S_k(x,y)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_k(x,y)}{\partial y^2} \right)^2 - 2 f(x,y) S_k(x,y) \right) dxdy.$$

6. Запишемо функціонал $I = I(c)$ вигляду:

$$I = \sum_{k=1}^{N} I_k .$$

7. Мінімізуємо отриманий функціонал I за змінними c. За допомогою необхідної умови екстремуму, знаходимо оптимальні значення констант, розв'язавши наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0, \; i = \overline{1,K}.$$

8. Підставляємо отримані значення у формулу (2) і отримуємо наближений розв'язок бігармонічного рівняння для жорстко защемленої пластини на заданій області G.

Приклад розв'язання крайової задачі про згин пластини. Розв'язуємо задачу про згин жорстко защемленої пластини круглої форми.

Ділимо область G, яка показана на рис. 1 на 56 трикутників за схемою, яка показана на рис. 2. Знаходимо поліном на кожному трикутнику.

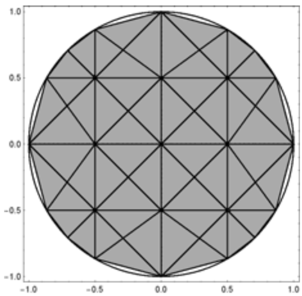


Рис. 2. *Розбиття області на п'ятдесят шість трикутників*

Згідно алгоритму, наведеному вище, будуємо поліноми для кожного трикутника розбиття. Інтегруємо отримані поліноми по кожному трикутнику та сумуємо їх інтеграли. Далі знаходимо невідомі параметри з умови мінімуму функціоналу $\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0$.

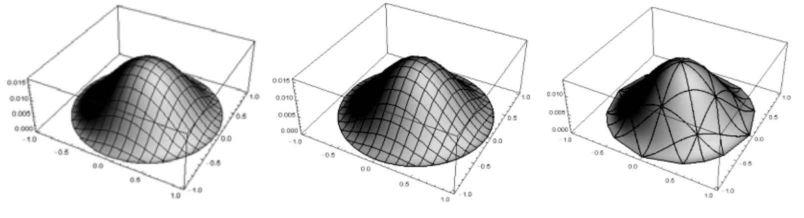
Підставляємо отримані константи в поліноми.

Максимальне значення наближеного розв'язку отриманого за допомогою *R*-функцій досягається в точці (0, 0) та дорівнює 0.0165357, значення отриманого наближеного розв'язку задачі в цій точці становить 0.0140245. Різниця між цими двома наближеними розв'язками становить 0.002511.

Максимальне значення отриманого наближеного розв'язку задачі в цій точці становить 0.0140245. Різниця між цими двома наближеними розв'язками становить 0.002511.

Максимальне значення наближеного точного розв'язку досягається в точці (0,0) та дорівнює 0.015625, значення отриманого наближеного розв'язку задачі в цій точці становить 0.0140245. Різниця між цими двома наближеними розв'язками становить 0.00016.

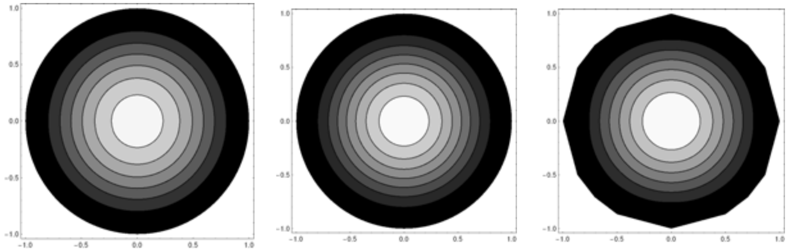
Графіки розв'язків показані на рис. 3.



а *б* *в*

Рис. 3. *Графік розв'язку бігармонічної задачі: а —* $\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0$ *розв'язок, отриманий за допомогою R-функцій; б — точний розв'язок; в — розв'язок, отриманий розбиттям на 56 трикутників*

Графіки ліній рівня показані на рис. 4.



а *б* *в*

Рис. 4. *Лінії рівня: а — розв'язок, отриманий за допомогою R-функцій; б — точний розв'язок; в — розв'язок, отриманий розбиттям на 56 трикутників*

Для перевірки на неперервність на границі між трикутниками візьмемо два трикутника, показані на рис. 5.

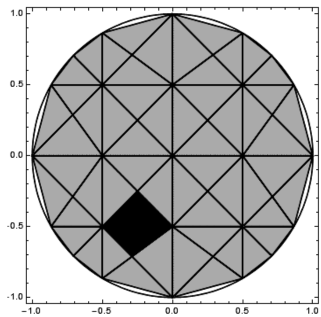
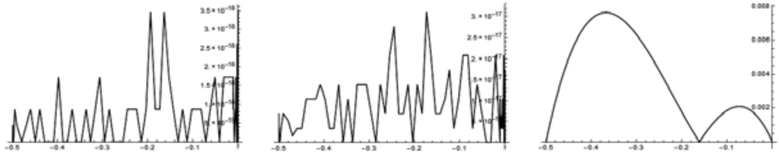


Рис. 5. *Два трикутники із системи розбиття*

На рис. 6 показані графіки різниць значень функції та її похідних по нормалі до сторони трикутника для двох обраних трикутників.



а *б* *в*

Рис. 6. *Графіки різниць:* $\left.\left(S_1 - S_2\right)\right|_{y=-0.5}$, $\left.\left(\dfrac{\partial S_1}{\partial \nu} - \dfrac{\partial S_2}{\partial \nu}\right)\right|_{y=-0.5}$ *та*

$$\left.\left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial \nu^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial \nu^2}\right)\right|_{y=-0.5}$$

У таблиці наведені чисельні коефіцієнти для центру прогину для защемленої круглої пластини з рівномірним навантаженням [5].

Таблиця

Методи	Чисельний фактор $\alpha = \dfrac{W(0,0)}{qb^4 / D}$
В даній роботі	0.00140245
Рвачев В.Л., 1973	0.00165357
Тимошенко С.П., 1966	0.0015625

Висновки. В роботі запропоновано схему розв'язання бігармонічної задачі для круглої пластини у випадку граничних умов, які відповідають умовам жорсткого защемлення пластини у вигляді сплайна 5-го степеня, який забезпечує належність наближеного розв'язку класу $C^1(G)$ [6, 7]. Проведений експеримент, який порівнює отримані результати з точним розв'язком, який отриманий за допомогою формул [5] та з наближеним розв'язком, отриманим за допомогою R-функцій на круглій області [2].

Список використаних джерел:

1. Курпа Л. В., Мазур О. С., Шматко Т. В. Применение теории *R*-функций к решению нелинейных задач динамики многослойных пластин. Харьков: ООО «В деле», 2016. 492 с.
2. Рвачев В. Л., Курпа Л. В., Склепус Н. Г., Учишвили Л. А. Метод *R*-функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы. Киев: Наук. думка, 1973. 121 с.
3. Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д. Расчет пластин. Киев: Будівельник, 1970. 436 с.
4. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
5. Сергиенко И. В., Литвин О. Н., Литвин О. О., Денисова О. И. Явные формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Том 50, № 5. С. 17–33.
6. Рвачев В. Л., Курпа Л. В. *R*-функции в задачах теории пластин. Киев: Наук. думка, 1987. 176 с.
7. Zlamal M., Zenesek A., Kolar V., Kratochvil J. Matematical aspect of the finite element method. *Technical physical and mathematical principles of the finite element method.* 1971. P. 15–39.

The paper examined the use of splines of the fifth degree on a triangular grid nodes to solve the problem of rigidly clamped circular plate with uniformly distributed load.

Key words: *splines of the fifth degree, biharmonic problem, circular plate, uniformly distributed load, R-functions.*

Одержано 15.02.2017