УДК 004.942+530.182+535.21+535.152.15

В. М. Старков, д-р. фіз.-мат. наук, с. н. с.,
І. Л. Базик, аспірантка

Інститут фізики НАН України, м. Київ

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧІ БАГАТОПУЧКОВОЇ ЛАЗЕРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

У роботі представлені математичні моделі трьох варіантів багатопучкової лазерної взаємодії в нелінійно-оптичних середовищах: стаціонарної чотирьохпучкової, нестаціонарної двохпучкової і нестаціонарної чотирьохпучкової взаємодії.

Ключові слова: *математична модель, інтегральне рівняння, лазерна взаємодія, оптичний гістерезис.*

Вступ. Традиційна проблема багатопучкової лазерної взаємодії досі залишається вельми актуальною з цілої низки причин. Головна з них — останніми десятиліттями в системах обробки інформації йде активний перехід від електронних технологій до оптичних. Зростання інтересу до досліджень з оптичної обробки інформації — це відповідь на успішну експериментальну демонстрацію гістерезисного відгуку оптичної системи на світлове випромінювання. Переваги використання оптичних систем такого роду: вони характеризуються високою швидкодією, можливістю паралельного виконання операцій над великими масивами даних, відсутністю взаємних перешкод при передачі сигналів по оптичних каналах, захищеністю від несанкціонованого доступу і т. д. Принципова перевага — комп'ютерні чіпи, в яких передача інформації здійснюється потоком фотонів замість електронів, споживають набагато менше енергії. Тому в системах обробки інформації йде поступовий перехід від електронних технологій до оптичних. Цілком доступними стали оптоволокно, оптична миша, оптичний сканер, лазерний принтер, дисплей, оптичні диски і т. д. Британська компанія Optalysys планує представити найближчим часом широкодоступний оптичний комп'ютер Optical Solver продуктивністю 9 петафлопс і до 2020 року збільшити його продуктивність до 17,1 екзафлопс. Головна особливість оптичного комп'ютера — значно нижче у порівнянні з існуючими суперкомп'ютерами енергоспоживання. У плані енергоспоживання, за оцінками фахівців, сумарні експлуатаційні витрати для підтримки працездатного стану комп'ютера Optalysys складуть $ 3,5 тис на рік, тоді, як за умови експлуатації Tinanhe-2 (друге місце після Sunway TaihuLight) на максимальних потужностях (33,86 петафлопс) розмір щорічних витрат на електрику складе $ 21 млн.

У процесі переходу до оптичних комп'ютерних технологій виникають природні запитання як про переваги при використанні оптичного випромінювання в цих системах, так і про супутні проблеми. Значною проблемою для повністю оптичної обробки інформації є слабка взаємодія декількох оптичних сигналів. Світло являє собою електромагнітну хвилю, яка не може взаємодіяти з іншою електромагнітною хвилею у порожньому просторі, — спрацьовує принцип суперпозиції. Взаємодія можлива лише в нелінійних матеріалах, і сила такої взаємодії для електромагнітних хвиль (світла) значно нижча, ніж для електронних сигналів у традиційних комп'ютерах. Через це пропоновані варіанти перемикаючих елементів оптичного комп'ютера вимагають більших потужностей та більших розмірів, ніж існуючі електронні транзистори. У зв'язку з цим робота над задачею багатопучкової лазерної взаємодії з нелінійно-оптичними середовищами з використанням методів обчислювальної фізики є досить актуальною.

В електронних схемах основним функціональним елементом є транзистор, що дозволяє здійснювати посилення сигналу, перемикання, логічні операції. Аналогом його в оптичних системах обробки і зберігання інформації (зокрема, в оптичних комп'ютерах) є трансфазор. Його функціонування засноване на бістабільності нелінійно-оптичних систем зі зворотним зв'язком Система бістабільна, якщо вона має два стійкі стани при одних і тих же контрольованих параметрах [1, с. 10–13].

Стаціонарна чотирьохпучкова взаємодія. Ефект гістерезисного відгуку оптичної системи на світлове випромінювання був продемонстрований одним з перших при теоретичному дослідженні стаціонарного чотирьохпучкового обернення хвильового фронту в роботі [2]. У випадку стаціонарної чотирьохпучкової взаємодії математична модель була представлена крайовою задачею відносно інтенсивностей $I_i(x) \in C^{(1)}(0,a) \cap C[0,a]$ і різниці фаз $\Phi(x) \in C^{(1)}(0,a) \cap C[0,a]$ [3]:

$$I_1' = -I_3' = I_0^{-1}[\, I_1 I_3 + \mu(I)\cos\Phi], \; I_2' = -I_4' = I_0^{-1}[\, I_2 I_4 + \mu(I)\cos\Phi],$$

$$\Phi' = \delta + (I_3^{-1} + I_4^{-1} - I_1^{-1} - I_2^{-1})\,\mu(I)\sin\Phi \,/\, (2I_0), \; x \in (0,a), \qquad (1)$$

де $x = 2x'k_0\,\Delta\chi / \cos\vartheta$ — безрозмірна координата по товщині кристала, $\Delta\chi$ — амплітуда модуляції показника заломлення дифузійним полем, $k_0 = 2\pi/\lambda$ — хвильове число, $\mu(I) \equiv (\prod_{i=1}^{4} I_i)^{1/2}$, $I_0 \equiv \sum_{i=1}^{4} I_i(x)$ — сумарна інтенсивність, 2ϑ — кут сходження хвиль $I_1(x=0)$ та $I_3(x=0)$, $\Phi \equiv \Phi_3 - \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_4$.

Фізична теорія явища базується на спільному розв'язанні рівнянь Максвелла та електропереносу — дифузії для електрооптичного кристала.

Розв'язується крайова задача: $I_1(x=0)=I_{12}$ — опорна хвиля; $I_3(x=0)=I_{32}$ — сигнальна хвиля; $I_2(x=a)=I_{21}$ — зустрічна опорна хвиля;

$$I_4(x=a)=I_{41}\,;\Phi(x=a)=\Phi_0\,. \tag{2}$$

Основний результат. Отримано аналітичне розв'язання задачі (1)–(2) і виявлений бістабільний (S -подібний) характер залежності інтенсивності оберненої хвилі $I_4(0)$ від інтенсивності сигнальної хвилі $I_3(0)$.

Перші докази існування бістабільних станів при оберненні хвильового фронту отримані пізніше в фізичних експериментах на кристалах $BaTiO_3$ [4]. Наявність оптичної бістабільності відкриває нові можливості конструювання і виробництва різних елементів оптичних систем обробки інформації. Розробників оптичних цифрових обчислювальних систем цікавлять проблеми поведінки бістабільних станів у часі, проблеми стійкості стаціонарних станів. Виникає задача дослідження нестаціонарного чотирьохпучкового обернення хвильового фронту. Початковий етап її розв'язання — дослідження математичної моделі нестаціонарного двохпучкового енергообміну.

Нестаціонарний двохпучковий енергообмін. Ефект нестаціонарного перекачування енергії (НПЕ) від пучка з більшою інтенсивністю випромінювання до пучка з меншою інтенсивністю досить повно вивчався у багатьох роботах. Наприклад, у роботі [5] розглядалась взаємодія двох попутних хвиль в середовищі з нелінійністю генераційного типу, коли добавка діелектричної проникності залежить від інтенсивності світла $|E(r,t)|^2$ локально по простору і в часі змінюється за законом $\varepsilon(r,t)=\varepsilon_0+\delta\varepsilon(r,t),\ \ \delta\varepsilon(r,t)=\eta\int\limits_0^t |E(r,t)|^2\,d\tau$.

Нами розглядались середовища з інерційною кубічною нелінійністю, тобто

$$\delta\varepsilon(r,t)=\eta\int\limits_0^t |E(r,t)|^2\exp[(\tau-t)/T]\,d\tau\,.$$

Задача Коші визначення плавних амплітуд

$$A_m(z,t)=\sqrt{I_m(z,t)}\exp[(i\varphi_m(z,t)],$$

$$A_m(z,t)\in C^{(1,0)}((0,\mathrm{Z})\times[0,\mathrm{T}])\cap C([0,\mathrm{Z}]$$

і амплітуди решітки діелектричної проникності

$$\Delta\varepsilon(z,t)\in C^{(0,1)}([0,\mathrm{Z}]\times(0,\mathrm{T}])\cap C([0,\mathrm{Z}]\times[0,\mathrm{T}])$$

формулюється таким чином [6, с. 110–111]:

$$\partial A_1 / \partial z = -ik\Delta\varepsilon A_2,$$

$$\partial A_2 / \partial z = -ik\Delta\varepsilon^* A_1,\ \partial\Delta\varepsilon / \partial t = \eta\, A_1 A_2^* - \Delta\varepsilon / T,\ z,t > 0\,. \qquad (3)$$

$$A_m(z=0,t) = A_{m0}(t) \in C[0,\mathrm{T}],\ \Delta\varepsilon(z,t=0) = \Delta\varepsilon_0(z) \in C[0,\mathrm{Z}], \quad (4)$$

де η — параметр нелінійності; T — час релаксації; E — амплітуда сумарного електричного поля світлової хвилі.

Введення функції $w(z,t)$, зв’язаної з амплітудою картини інтерференції $A_1(z,t)A_2^*(z,t)$ співвідношенням:

$$w(z,t) = 2A_1(z,t)A_2^*(z,t) / I_0(t) = \sin u(z,t)\exp[i\varphi(z,t)], \qquad (5)$$

$$\varphi(z,t) = \varphi_1(z,t) - \varphi_2(z,t)$$

дало можливість звести задачу (3)–(4) до нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра

$$w(z,t) = w_0(t) - ik\eta\int_0^z\int_0^t I_0(\tau)\sqrt{1-|w(x,t)|^2}\, w(x,\tau)\exp[\frac{\tau-t}{T}]\,d\tau\, dx, \quad (6)$$

де $w_0(t) = w(z=0,t) = 2A_{10}(t)A_{20}^*(t) / I_0(t)$.

Як приклад наближеного розв’язку цього рівняння в аналітичній формі на першому етапі побудовані ітерації $w^{(1)}(z,t)$ і $w^{(2)}(z,t)$.

Основний результат проведених обчислювальних експериментів сформульований у вигляді наступного твердження:

Час повного енергообміну двох лазерних пучків у середовищах з локальним нелінійним відгуком з урахуванням часу його релаксації і **глибина** нелінійного середовища, на якій стався енергообмін, пов'язані обернено пропорційною залежністю.

Нестаціонарна чотирьохпучкова взаємодія. При розгляді нестаціонарних ефектів чотирьохпучкового обернення хвильового фронту в ізотропному середовищі формулюється початково-крайова задача відносно інтенсивностей

$$I_m(z,t) \in C^{(1,0)}((0,a)\times[0,\mathrm{T}]) \cap C([0,a]\times[0,\mathrm{T}]) \quad (m=\overline{1,4})$$

і різниці фаз

$$\varphi_{13}(z,t), \varphi_{42}(z,t) \in C^{(1,0)}((0,a)\times[0,\mathrm{T}]) \cap C([0,a]\times[0,\mathrm{T}])$$

для системи інтегро-диференціальних рівнянь [7, с. 19]:

$$\frac{\partial I_3(z,t)}{\partial z} = 2\delta\sqrt{I_1 I_3}\int_0^t e^{\tau-t}d\tau\left\{\sqrt{I_1 I_3}\sin\varphi^{(13)} + \sqrt{I_2 I_4}\sin\varphi^{(4213)}\right\},$$

$$\frac{\partial I_3(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial I_1(z,t)}{\partial z} = 0\ ,\ \frac{\partial I_4(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial I_2(z,t)}{\partial z} = 0\ ,$$

$$\frac{\partial I_4(z,t)}{\partial z} = 2\delta\sqrt{I_2 I_4}\int_0^t e^{\tau-t}d\tau\left\{\sqrt{I_2 I_4}\sin\varphi^{(42)} + \sqrt{I_1 I_3}\sin\varphi^{(1342)}\right\},$$

$$\frac{\partial \varphi_{13}(z,t)}{\partial z} = \frac{\delta(I_3 - I_1)}{\sqrt{I_1 I_3}}\int_0^t e^{\tau-t}d\tau\left\{\sqrt{I_1 I_3}\cos\varphi^{(13)} + \sqrt{I_2 I_4}\cos\varphi^{(4213)}\right\},$$

$$\frac{\partial \varphi_{42}(z,t)}{\partial z} = \frac{\delta(I_4 - I_2)}{\sqrt{I_2 I_4}}\int_0^t e^{\tau-t}d\tau\left\{\sqrt{I_2 I_4}\cos\varphi^{(42)} + \sqrt{I_1 I_3}\cos\varphi^{(1342)}\right\}, \quad (7)$$

де $\varphi^{(mn)} = \varphi_{mn}(\tau) - \varphi_{mn}(t)$, $\varphi^{(ikmn)} = \varphi_{ik}(\tau) - \varphi_{mn}(t)$,

$$\varphi_{mn}(t) = \varphi_m(t) - \varphi_n(t), \ \delta = k_0\,\Delta\chi\,(I_0\cos\vartheta)^{-1}, \ I_0 = \sum_{i=1}^{4} I_i, \ t = t'/\tau_0,$$

$\Delta\chi$ — світлоіндукована зміна показника заломлення, t' — час.

Крайові умови задачі:

$$I_{1,3}(z=0,t) = I_{10,30}(t); \quad I_{2,4}(z=a,t) = I_{21,41}(t);$$
$$\varphi_{13}(z=0,t) = \varphi_{13}^{(0)}(t); \quad \varphi_{42}(z=a,t) = \varphi_{42}^{(1)}(t). \quad (8)$$

За аналогією з (5) вводяться нові шукані функції $u(z,t)$ і $v(z,t)$ такі, що

$$I_1(z,t) = \alpha(t)\cos^2\frac{u(z,t)}{2}, \quad I_3(z,t) = \alpha(t)\sin^2\frac{u(z,t)}{2},$$
$$I_2(z,t) = \beta(t)\cos^2\frac{v(z,t)}{2}, \quad I_4(z,t) = \beta(t)\sin^2\frac{v(z,t)}{2}, \quad (9)$$

де $\alpha(t) = I_{10}(t) + I_{30}(t)$, $\beta(t) = I_{21}(t) + I_{41}(t)$.

Переходячи до комплексних функцій

$$w_1(z,t) = \sin u(z,t)\exp[i\varphi_{13}(z,t)], \ w_2(z,t) = \sin v(z,t)\exp[i\varphi_{42}(z,t)],$$

отримуємо в остаточному вигляді систему двох нелінійних інтегральних рівнянь [6, с. 119–120]:

$$w_1(z,t) = w_{10}(t) - i\delta\int_0^z\int_0^t e^{\tau-t}\sqrt{1-|w_1(x,t)|^2}\,[\alpha(\tau)w_1(x,\tau) + \beta(\tau)w_2(x,\tau)]\,d\tau dx,$$

$$w_2(z,t) = w_{21}(t) + i\delta\int_z^a\int_0^t e^{\tau-t}\sqrt{1-|w_2(x,t)|^2}\,[\alpha(\tau)w_1(x,\tau) + \beta(\tau)w_2(x,\tau)]\,d\tau dx.$$

Тут $w_{10}(t) = 2\sqrt{I_{10}(t)I_{30}(t)}\exp[i\varphi_{13}^{(0)}(t)]/\alpha(t)$,

$$w_{21}(t) = 2\sqrt{I_{21}(t)I_{41}(t)}\exp[i\varphi_{42}^{(1)}(t)]/\beta(t).$$

Комплексні функції $w_1(z,t)$ и $w_2(z,t)$ з фізичної точки зору можна інтерпретувати як відносні амплітуди інтерференційних картин, а система інтегральних рівнянь природним чином узагальнює рівняння (6). Дійсно, оскільки

$$A_m(z,t) = \sqrt{I_m(z,t)}\,\exp[(i\varphi_m(z,t)], \quad (m = \overline{1,4})$$

і мають місце співвідношення (9), то

$$w_1(z,t) = \sin u(z,t)\exp[i\varphi_{13}(z,t)] = 2A_1(z,t)A_3^*(z,t)\,/\,\alpha(t)\,,$$

$$w_2(z,t) = \sin v(z,t)\exp[i\varphi_{42}(z,t)] = 2A_2^*(z,t)\,A_4(z,t)\,/\,\beta(t)\,.$$

Таким чином, математична модель чотирьохпучкової взаємодії в оптично-нелінійних середовищах у вигляді системи інтегро-диференціальних рівнянь (7) з крайовими умовами (8) перетворена в канонічну і фізично прозору систему двох нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра.

Висновки. У випадку стаціонарної чотирьохпучкової взаємодії, коли математична модель представлена крайовою задачею відносно інтенсивностей, отримано аналітичне розв'язання і виявлений бістабільний (S-подібний) характер залежності інтенсивності оберненої хвилі від інтенсивності сигнальної хвилі. Ефект нестаціонарного двохпучкового енергообміну вивчався за допомогою нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра. При цьому, час повного енергообміну двох лазерних пучків у середовищах з локальним нелінійним відгуком з урахуванням часу його релаксації і глибина нелінійного середовища, на якій стався енергообмін, пов'язані обернено пропорційною залежністю. Математична модель чотирьохпучкової взаємодії в нелінійно-оптичних середовищах у вигляді системи інтегро-диференціальних рівнянь з крайовими умовами перетворена в канонічну і фізично прозору систему двох нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра.

Список використаних джерел:

1. Гиббс Х. Оптическая бистабильность. Управление светом с помощью света. М.: Мир, 1988. С. 520.
2. Кухтарев Н. В., Старков В. Н. Оптическая бистабильность при обращении волнового фронта световых пучков в электрооптических кристаллах с диффузионной нелинейностью. *Письма в ЖТФ*. 1981. 7, вып. 11. С. 692–695.
3. Кухтарев Н. В., Одулов С. Г. Обращение волнового фронта при четырехволновом взаимодействии в средах с нелокальной нелинейностью. *Письма в ЖЭТФ*. 1979. 30, вып.1. С. 6–11.
4. White J. O., Cronin-Golomb M., Fisher B. Coherent oscillation by self-induced gratings in the photorefractive crystals $BaTiO_3$. *Applied Phys. Letters*. 1982. 40, 6. P. 450–452.
5. Зельдович Б. Я., Лернер П. Б., Немкова Е. А. Нестационарный энергообмен двух попутных когерентных волн в нелинейной бреде. *Квантовая электроника*. 1987. 14, № 12. С. 2502–2508.
6. Старков В. Н. Конструктивные методы вычислительной физики в задачах интерпретации. Киев: Наук. думка, 2002. 264 с.

7. Кухтарев Н. В. Самосогласованная теория объемной динамической голографии: автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. Ин-т физики АН УССР. Киев, 1983. 30 с.

The paper presents mathematical models of three options of multibeam laser interaction in optical nonlinear environments: steady four-beam, unsteady two-beam, and unsteady four-beam interactions.

Key words: *mathematical model, integral equation, laser interaction, optical hysteresis.*

Одержано 22.02.2017

УДК 519.85

П. І. Стецюк, д-р фіз.-мат. наук, с. н. с.,
О. В. Фесюк, провідний інженер

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

ВИКОРИСТАННЯ r-АЛГОРИТМУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ КВАДРАТИЧНОЇ ELD-ЗАДАЧІ

Розглядається $r(\alpha)$-алгоритм з адаптивним кроком. Його програмна реалізація на мові octave застосована для розв'язання задачі оптимального добового завантаження енергосистеми (ELD-задача). Описано результати обчислювального експерименту для енергосистеми з 10, 12 та 40 енергоблоками.

Ключові слова: *r-алгоритм, адаптивний крок, квадратична задача, негладкий штраф, програмне забезпечення.*

Вступ. Одна із задач для оптимального завантаження енергосистеми в англомовній літературі має назву Economic Load Dispatch Problem (ELD-задача). В цій задачі задано набір енергоблоків, працюючих без відключень та їх характеристики. Потрібно знайти електричне навантаження кожного енергоблоку (тобто кількість електроенергії, яку генерує кожний енергоблок), щоб забезпечити мінімальні сумарні витрати на генерацію електроенергії та задовольнити потреби споживачів і ряд технологічних обмежень.

Одним з варіантів можливого розв'язання ELD-задач є прискорені субградієнтні методи з розтягом простору в напрямку різниці двох послідовних субградієнтів — так звані r-алгоритми [1]. Їх програмні реалізації виявились ефективними при мінімізації негладких опуклих функцій з яружною структурою поверхонь рівня. Octave-програма **ralgb5** [2] є однією з таких реалізацій, вона реалізує $r(\alpha)$-алгоритм з постійним α — коефіцієнтом розтягу простору та адап-

