УДК 519.642

С. Г. Солодкий, д-р фіз.-мат. наук, доцент,
Г. Л. Милейко, канд. фіз.-мат. наук
Інститут математики НАН України, м. Київ

ПРО ЕКОНОМІЧНІ СТРАТЕГІЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ І РОДУ

Для широких класів жорстко некоректних задач побудовано ефективні методи розв'язування із застосуванням різних правил вибору параметра регуляризації (апріорного та апостеріорних). Знайдено порядкові оцінки мінімального радіуса гальоркінської інформації та мінімального радіуса обчислювальних витрат.

Ключові слова: *жорстко некоректні задачі, операторні рівняння I роду, мінімальний радіус гальоркінської інформації, складність.*

Вступ. Постановка задачі. Дані дослідження присвячено оцінкам складності жорстко некоректних задач. Слід зазначити, що на сьогодні такі дослідження набули інтенсивного розвитку у межах теорії оптимальних алгоритмів, згідно з якою під інформаційною складністю розуміється найменший обсяг дискретної інформації, що необхідна для знаходження наближеного розв'язку із заданою точністю, а під алгоритмічною — мінімальне число арифметичних дій, які потрібно виконати для побудови такого розв'язку. Отже, наведемо строгу постановку задачі.

Розглянемо операторне рівняння I роду

$$Ax = f\ , \tag{1}$$

де $A \in L(X, X)$, X — гільбертів простір. Будемо вважати, що множина Ω не замкнена в X та $f \in Range(A)$. Також будемо припускати, що права частина (1) задана з деякою похибкою $\delta > 0$, тобто замість $[1;\infty)\times[1;\infty)$ відомо її збурення $f_\delta \in X : \left\| f - f_\delta \right\| \le \delta$. Наслідуючи [1], під жорстко некоректною задачею будемо розуміти рівняння (1), точний розв'язок якого задовольняє умову джерела логарифмічного типу

$$M_p(A) := \{u : u = \ln^{-p}(A^* A)^{-1} v,\ \|v\| \le \rho\}\ , \tag{2}$$

де $p, \rho > 0$, Ω — оператор, спряжений до A. Мета наших досліджень — відшукання наближеного розв'язку x^+ (1) з мінімальною нормою в X, що належить множині (2).

Нехай $\omega_1 := \{i : \ (i, j) \in \Omega\}$ — деякий ортонормований базис у X. Розглянемо наступний клас досліджуваних операторів:

$$H_{\gamma}^{r,s} := \{A : A \in L(X,X),\ \|A\| \le \gamma_0,\quad \sum_{n+m=1}^{\infty} (Ae_m, e_n)^2 (\underline{n}^{2r} \cdot \underline{m}^{2s} \le \gamma_1^2\},$$

де $r, s > 0,\ \gamma_0 \le e^{-1}$, $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1)$, $n, m \in Z_+$, $\underline{n} = 1$ при $n = 0$ і $\underline{n} = n$ у протилежному випадку.

Слід зазначити, що $H_{\gamma}^{r,s}$ узагальнює клас інтегральних операторів Фредгольма з ядрами у вигляді функцій двох змінних, що мають скінченну гладкість. Конкретний приклад $H_{\gamma}^{r,s}$ розглядався у [2].

Клас рівнянь (1) із операторами з $H_{\gamma}^{r,s}$ та розв’язками (2) позначимо $(H_{\gamma}^{r,s}, M_p(A))$. Надалі зосередимося на дослідженні проекційних методів розв’язування задач класу $(H_{\gamma}^{r,s}, M_p(A))$, $r \ge s$.

Зазначимо, що будь-яку проекційну схему дискретизації рівнянь (1) зі збуреною правою частиною f_δ можна визначити за допомогою скінченного набору скалярних значень

$$(Ae_j, e_i),\ \ (i,j) \in \Omega\,, \tag{3}$$

$$(f_\delta, e_k),\ \ k \in \omega_1\,,\ \omega_1 := \{i :\ \ (i,j) \in \Omega\}\,, \tag{4}$$

де Ω — довільна обмежена область координатної площини $[1;\infty)\times[1;\infty)$. Скалярні добутки (3), (4) прийнято називати гальоркінською інформацією про рівняння (1), а під $card(\Omega)$ розуміти загальну кількість скалярних добутків вигляду (3). Зокрема, якщо $\Omega = [1,n]\times[1,m]$, $\omega_1 = [1,n]$, то ми отримуємо стандартну гальоркінську схему дискретизації з $card(\Omega) = n \cdot m$.

Під проекційним методом розв'язування рівняння (1) будемо розуміти будь-яке відображення $P = P(\Omega) : X \to X$, яке за допомогою гальоркінської інформації (3) про рівняння (1) зіставляє правій частині розв'язуваного рівняння f_δ елемент $P(A_\Omega) f_\delta \in X$, що є багаточленом за базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ з номерами гармонік із $\omega_2 := \{j : (i,j) \in \Omega\}$. Цей елемент приймається за наближений розв'язок (1).

Під похибкою проекційного методу $P(\Omega)$ на класі рівнянь $(H_{\gamma}^{r,s}, M_p(A))$, зазвичай, будемо розуміти його найбільше відхилення

$$e_\delta(H_{\gamma}^{r,s}, M_p(A), P(\Omega)) = \sup_{A \in H_{\gamma}^{r,s}}\ \sup_{x^+ \in M_p(A)}\ \sup_{f_\delta : \|f - f_\delta\| \le \delta} \left\| x^+ - P(A_\Omega) f_\delta \right\|.$$

Мінімальний радіус гальоркінської інформації задамо величиною

$$R_{N,\delta}(H_{\gamma}^{r,s}, M_p(A)) = \inf_{\Omega:\, card(\Omega) \le N}\ \inf_{P(\Omega)}\ e_\delta(H_{\gamma}^{r,s}, M_p(A), P(\Omega))\,.$$

Ця величина визначає найменшу можливу точність серед усіх проекційних методів при обмеженні на обсяг гальоркінської інформації. Таким чином, $R_{N,\delta}$ характеризує інформаційну складність класу задач $(H_\gamma^{r,s}, M_p(A))$.

Позначимо через Π_M множину усіх можливих проекційних методів, які для побудови наближеного розв'язку потребують виконання не більш ніж M елементарних арифметичних операцій (е.а.о.). Мінімальний радіус обсягу обчислювальних витрат задамо величиною

$$\overline{R}_{M,\delta(H_\gamma^{r,s}, M_p(A))} = \inf_{\Omega:\, card(\Omega)\le M} \ \inf_{P(\Omega)\in \Pi_M} e_\delta(H_\gamma^{r,s}, M_p(A), P(\Omega)) .$$

Ця величина визначає найменшу можливу точність проекційних методів при обмеженні на обсяг обчислювальних витрат. Таким чином, $\overline{R}_{M,\delta}$ характеризує алгоритмічну складність класу задач $(H_\gamma^{r,s}, M_p(A))$.

Економічна модифікація гальоркінської схеми. Оцінки складності. Оскільки на практиці при побудові чисельного розв'язку припустиме використання лише скінченного обсягу дискретної інформації про задачу, то замість вихідного рівняння доводиться розглядати його скінченно-вимірний аналог. Такий етап побудови наближеного розв'язку у чисельному аналізі прийнято називати дискретизацією. У зв'язку з цим виникає актуальна проблема мінімізації обсягу дискретної інформації та зменшення кількості виконуваних у процесі розв'язування арифметичних дій *без втрати точності*.

Для економічної дискретизації рівнянь з $(H_\gamma^r, M_p(A))$ замість стандартної схеми Гальоркіна $P_n A P_m$ застосуємо її модифікацію, що називається гіперболічним хрестом. Отже, наближений розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x_{\alpha,\delta}^{\Omega} = g_\alpha(A_\Omega^* A) A_\Omega^* P_\Omega f_\delta, \tag{5}$$

де Ω — гіперболічний хрест (конкретні приклади див. далі), а твірна функція g_α задовольняє умови Бакушинського

$$\begin{gathered} \sup_{0<\lambda\le\gamma_0^2} \sqrt{\lambda}\left|g_\alpha(\lambda)\right| \le \chi_* \alpha^{-1/2}, \\ \sup_{0<\lambda\le\gamma_0^2} \sqrt{\lambda}\left|1-\lambda g_\alpha(\lambda)\right| \ln^{-\mu}\lambda^{-1} \le \chi_\mu \ln^{-\mu}\alpha^{-1} \end{gathered} \tag{6}$$

при деяких додатних константах χ_μ, χ_* та параметрі $0 \le \mu \le \mu_*$.

Зазначимо, що більшість відомих регуляризаторів відповідають умовам (6), наприклад, стандартний метод Тіхонова, за яким регуляризований розв'язок шукається як розв'язок наступної варіаційної задачі:

$$\left\|Ax - f_\delta\right\|^2 + \alpha\left\|x\right\|^2 \to \min,$$

що зводиться до операторного рівняння 2-го роду

$$\alpha x + A^* A x = A^* f_\delta .$$

Інакше кажучи, наближений розв'язок шукаємо у вигляді (5) з

$$g_\alpha(\lambda) = (\alpha + \lambda)^{-1}. \tag{7}$$

Оцінки складності (апріорний випадок). За область Ω візьмемо хрест вигляду

$$\Omega_1 = \{1\} \times [1; 2^{bn}] \bigcup_{k=1}^{n} (2^{k-1}; 2^k] \times [1; 2^{bn-rk/s}] \subset [1; 2^n] \times [1; 2^{bn}],$$

де $r/s < b \le 2r/s$, $n \in \mathrm{N}$, якому відповідає дискретизований оператор

$$A_{\Omega_1} = P_1 A P_{2^{bn}} + \sum_{k=1}^{n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{bn-rk/s}} . \tag{8}$$

Проекційний метод (5)–(6), (8) з апріорним правилом вибору параметра регуляризації α: $\ln^{-p} \alpha^{-1} = \delta / \sqrt{\alpha}$ позначимо $\Re_1$.

Теорема 1. При N, що задовольняють умову

$$N^{-s} \ln^{-p} N^{2s} = \begin{cases} O(\delta^{-1} \ln^{-(s+1)} \delta^{-1}), & r = s; \\ O(\delta^{-1} \ln \delta^{-1}), & r > s, \end{cases}$$

справджується

$$R_{N,\delta}(H_\gamma^{r,s}, M_p(A)) = O(\ln^{-p} N^{2s}) = O(\ln^{-p} \delta^{-1}),$$

де N — обсяг задіяної гальоркінської інформації. При цьому

$$N = \begin{cases} O(\delta^{-1/s} (\ln \delta^{-1})^{(1-p+s)/s}), & r = s; \\ O(\delta^{-1/s} (\ln \delta^{-1})^{(1-p)/s}), & r > s. \end{cases}$$

Зазначений оптимальний порядок на класі $(H_\gamma^{r,s}, M_p(A))$, $0 < p < \infty$, $r \ge s$, реалізується в рамках проекційного методу $\Re_1$.

Теорема 2. При $r \ge 2s$ мають місце співвідношення

$$\overline{R}_{N,\delta}(H_\gamma^{r,s}, M_p(A)) = O(\ln^{-p} N^{2s}) = O(\ln^{-p} \delta^{-1}),$$

де N — обсяг обчислювальних витрат. При цьому

$$N = \begin{cases} O(\delta^{-1/s} (\ln \delta^{-1})^{(1-p+s)/s}), & r = 2s; \\ O(\delta^{-1/s} (\ln \delta^{-1})^{(1-p)/s}), & r > s. \end{cases} \tag{9}$$

Зазначений оптимальний порядок реалізується в рамках проекційного методу $\Re_1$, де як регуляризатор застосовується стандартний метод Тіхонова.

Оцінки складності (апостеріорний випадок). Недоліком апріорного вибору α є його обов'язкове «налаштування» на певне значення p. При цьому, як відомо, оптимальний порядок точності $O(\ln^{-p}\delta^{-1})$ забезпечується лише для задач (1) з нормальним роз'язком $x^+ \in M_p(A)$, відповідно, де величина p фіксована. Очевидно, що такий підхід до розв'язування некоректних задач можливий, якщо нам точно відомо значення параметра p. Але оскільки така інформація, зазвичай, або відсутня, або не є точною, тому на практиці необхідні апостеріорні правила вибору параметра регуляризації (наприклад, принцип нев'язки Морозова, принцип рівноваги та ін.), реалізація яких не потребує додаткових знань про гладкість розв'язку.

Нехай параметр p в (2) невідомий, тому шукатимемо розв'язок з множини

$$M(A) = \bigcup_{p\in(0,p_1]} M_p(A),$$

де $p_1 < \infty$ — верхня межа можливих значень p.

Для економічного розв'язування рівнянь з класу $(H_\gamma^{r,r}, M(A))$, буде запропоновано два підходи, що полягають у комбінуванні стандартного методу Тіхонова з принципом нев'язки Морозова та принципом рівноваги, відповідно.

В межах наших досліджень скористаємося проекційною схемою з хрестом вигляду

$$\Omega_2 = \{1\}\times[1;2^{2n}]\bigcup_{k=1}^{2n}(2^{k-1};2^k]\times[1;2^{2n-k}]\subset[1;2^{2n}]\times[1;2^{2n}], \qquad (10)$$

Проекційні методи (5)–(7), (10) з правилами зупинки згідно принципу нев'язки Морозова та принципу рівноваги, відповідно, будемо позначати $\Re_2$ та $\Re_3$.

Теорема 3. Мають місце порядкові оцінки

$$R_{N,\delta}(H_\gamma^{r,r}, M(A)) = O(\ln^{-p} N^{2r}) = O(\ln^{-p}\delta^{-1}),$$

для $N = O(\delta^{-1/r}\ln^{1+1/(2r)}\delta^{-1})$.

Зазначений оптимальний порядок реалізується у межах проекційних методів $\Re_2$ та $\Re_3$.

Висновки.

1. З результатів роботи [3] випливає, що для стандартної схеми Гальоркіна обсяг задіяної гальоркінської інформації на тих самих класах задач складає $O(\delta^{-1/s}\delta^{-\varepsilon/r}\ln^{-p/s}\delta^{-1})$, де величина $\varepsilon > 0$ не може бути як завгодно близькою до нуля, щоб не допустити істотне зростання похибки. Порівняння результатів для методу з [3]

з результатами теорем 1, 3 дозволяє дістатися висновку, що обидва підходи гарантують оптимальний порядок точності на всьому класі досліджуваних жорстко некоректних задач, водночас, задіяна нами модифікація гальоркінського методу дозволяє суттєво скоротити обсяг дискретної інформації.

2. Якщо порівняти результати теорем 3 (з апостеріорним правилом вибору параметра регуляризації) і 1 (з апріорним вибором параметра регуляризації), то можна дістатися висновку, що у разі апостеріорного вибору обсяг дискретної інформації є більшим на логарифмічний множник. Таке збільшення обсягу інформації можна розглядати як «платню» за відмову від знання гладкості шуканого розв'язку.
3. З оцінки (8) випливає, що збільшення гладкості оператора A за зовнішньою змінною r (від $r = 2s$ до $r > 2s$) призводить до зменшення на логарифмічний множник в оцінці обсягу обчислювальних витрат, що необхідні для досягнення оптимального порядку точності.
4. Порівнюючи результат роботи [3] з результатами теорем 1–3, можна дістатися висновку, що запропоновані проекційні методи дозволяють не тільки скоротити обсяг обчислень відносно стандартної гальоркінської схеми, а й реалізувати порядкові оцінки величин $R_{N,\delta}, \overline{R}_{N,\delta}$ на класах рівнянь $(H_{\gamma}^{r,s}, M_p(A))$.

Список використаних джерел:

1. Schock E., Pereverzev S. V. Morozov's discrepancy principle for Tikhonov regularization of severely ill-posed problems in finite-dimensional subspaces. *Num. Funct. Anal. Optim*. 2000. 21 (7-8). P. 901–916.
2. Солодкий С. Г., Милейко Г. Л. Оцінки складності жорстко некоректних задач. *Праці міжнародної наукової школи-семінару ISCOPT*. 2015.
3. Mathe P., Pereverzev S. V. Discretization strategy for ill-posed problems in variable Hilbert scales. *Inverse Problems*. 2003. 19 (6). P. 1263–1277.

For wide classes of severely ill-posed problems the economical projection methods with different selection (a priori and a posteriori) of the regularization parameter are designed. The order estimates of the minimal radius for Galerkin information and the minimal radius for computational efforts are obtained.

Key words: *severely ill-posed problems, operator equation of the first kind, the minimal radius for Galerkin information, complexity.*

Одержано 28.02.2017