2. R Elkenbracht-Huizing «An implementation of the number field sieve» 1996. [citeseer.nj.nec.com/elkenbrach-thuizing96implementa tion.html]
3. Lupu Costică. Methods of solving Diophantine equations in secondary education in Romania. *Science Journal of Education.* 2014. 2(1). P. 22–32.
4. Скуратовський Р. В. Модернізований алгоритм Поліга-Хелмана, Шенкса. *Вісник КНУ імені Тараса Шевченка.* 2015. Том 2. С 63.
5. Николайчук Я. Теоретичні основи виконання модулярних операцій множення в базисі Крестенсона-Радемахера. *Інформатика та математичні методи в моделюванні.* 2011. № 2. С. 123–130.
6. Режим доступу: [http://www.nsccwx.cn/] (це оглядова стаття про 500 кращих кластерів світу за 2016 р.).

Problem of factorization is well known and it still has not solving. All known methods that has subexponential complexity are not destined for parallel implementation. For instance not all variants of *GNFS* [1] can be developed in parallel form. Only *kGNFS* admits parallel implementation. Method of factorization proposed by us has all properties for parallel implementation.

Key words: *factorization of integer number, parallel calculus.*

Одержано 24.02.2017

УДК 519

О. В. Славік, аспірант

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ЇХ СЛІДІВ НА СИСТЕМІ НЕПЕРЕТИННИХ СМУГ З КРИВОЛІНІЙНИМИ ГРАНИЦЯМИ

В роботі проведено огляд існуючих методів відновлення пошкоджених цифрових зображень. Запропоновано узагальнений метод інтерстріпації для відновлення зображення поверхні за неповною інформацією про неї у випадку, якщо границі пошкоджених (невідомих) ділянок зображення є криволінійними смугами.

Ключові слова: *зображення, відновлення зображень, інтерстріпація, інтерлінація.*

Вступ. Інколи у файлах, які містять графічну інформацію виявляються дефекти. Оцінка значень втрачених пікселів, у яких відсутня інформація про зображення, необхідна в більшості задач цифрової обробки зображень або, наприклад, у задачах оборки архівних документів у вигляді зображень, що мають різноманітні спотворення (подряпини, плями, пил, непотрібні написи, лінії згину тощо).

У роботі [1] запропоновано метод інтерстріпації для відновлення функції двох змінних у точках між смугами за допомогою інформації про цю функцію, яка відома лише в точках заданої системи смуг. Даний метод базувався на припущені, що зображення відсутнє між смугами паралельними або взаємоперпендикулярними осям координат.

Мета даної роботи — розробка модифікованого методу інтерстріпації, за допомогою якого можна відновлювати зображення у вигляді неперетинних смуг з криволінійними границями, який би дозволив отримати такий же результат, як і в роботі [1] у випадку коли смуги обмежені прямими паралельними осям координат.

Аналіз літературних джерел. Розглянемо задачу відновлення пошкоджених областей зображення, використовуючи інформацію на відомих ділянках зображення.

Позначимо множину пікселів у невідомій області $\overline{D}$, а множину коректних пікселів D.

Більшість методів відновлення зображень можна умовно поділити на наступні групи [2]: текстурні, шаблонні, основані на рівняннях у частинних похідних, гібридні та швидкі напівавтоматичні. Наведемо коротку характеристику цих методів.

Текстурні методи відновлення зображень для заповнення невідомої області $\overline{D}$ використовують пікселі безпосередньо з відомої області зображення D. Головна відмінність між цими методами полягає у забезпеченні неперервності на границі області D [2]. Методи текстурного відновлення зображення відрізняються способом відновлення різних кольорів, інтенсивності, градієнта та навіть статистичних характеристик.

Основна ідея роботи шаблонних методів відновлення зображень полягає у припущенні про наявність повторюваних фрагментів даних на зображенні, які зазвичай називаються шаблонами. Відновлення області $\overline{D}$ проводиться частинами шляхом копіювання значень яскравості з найбільш схожого шаблону [2]. Особливо виділяється робота [3], де для заповнення пошкодженої області використовується база даних зображень, яка містить мільйони зображень-шаблонів для відновлення.

Згідно з методами відновлення зображень, основаними на рівняннях з частинними похідними, відновлення даних області $\overline{D}$ проводиться за допомогою даних, що є природним продовженням інформації, яка міститься в D [4].

Гібридні методи відновлення зображень являють собою поєднання двох класів методів. А саме текстурних методів та методів, основаних на використанні диференціальних рівнянь з частинними похідними. Основна ідея алгоритму полягає у тому, що перш за все виділяють текстурну та структурну складову зображення, які потім заповнюються відповідними алгоритмами [2].

Недоліком більшості вище представлених методів є їх висока обчислювальна складність, тому в деяких працях застосовують швидкі напівавтоматичні методи відновлення зображення для прискорення обчислень. До таких методів відносять метод відновлення зображення за допомогою виділеної структури [5] та метод відновлення зображення з використанням ітеративної згортки зображення з дифузним ядром [6].

Окремо слід виділити інтерстріпацію (від англ. inter — між, від англ. stripe — смуга) функцій двох змінних [1]. Даний метод дозволяє відновлювати зображення поверхні за неповною інформацією про неї на системі смуг, якщо інформація про цю функцію відома лише в точках вказаних смуг. На даний момент, в роботі [1] досліджувались випадки відновлення зображень поверхонь для випадків, коли границі смуг невідомих областей представляли собою прямі, взагалі кажучи перетинні, паралельні осям координат. Існуюча теорія інтерстріпації функцій не передбачає можливість відновлення зображень у випадку якщо границі відомих смуг, наприклад, є криволінійними. Наведений далі метод є узагальненням існуючої теорії інтерстріпації функцій двох змінних для випадку криволінійних границь смуг.

Постановка задачі. Необхідно відновити пошкоджене зображення деякої поверхні Σ. Вважаємо, що зображення поверхні Σ відоме лише на системі m $(m \ge 2)$ вертикальних смуг вигляду:

$$D_{1,k} = \left\{ \alpha_k(y) \le x \le \beta_k(y) \right\},\ k = \overline{1,m},$$

та (або) на системі n $(n \ge 2)$ горизонтальних смуг вигляду:

$$D_{2,l} = \left\{ \gamma_l(x) \le y \le \delta_l(x) \right\},\ l = \overline{1,n}.$$

Невідомі смуги зображення задаються наступним чином для невідомих вертикальних смуг:

$$\overline{D}_{1,k,k+1} = \left\{ \beta_k(y) \le x \le \alpha_{k+1}(y) \right\},\ \ k = \overline{1,m-1},$$

та для невідомих горизонтальних смуг:

$$\overline{D}_{2,l,l+1} = \left\{ \delta_l(x) \le y \le \gamma_{l+1}(x) \right\},\ l = \overline{1,n-1}.$$

Тоді об'єднання множин $\overline{D}_{1,k,k+1}$, $k = \overline{1,m-1}$ та $\overline{D}_{2,l,l+1}$, $l = \overline{1,n-1}$ дає область $\overline{D}$ незаповнених ділянок зображення. В точках зображення D, які не потрапили до $\overline{D}$ зберігається вся наявна інформація про зображення.

Поверхня $\Sigma : z = f(x,y)$, $f(x,y) \in C^{N,N}(R^2)$, яку ми хочемо відновити, вважається відомою лише на вказаних смугах, тобто

$$f(x,y)\big|_{\alpha_k \le x \le \beta_k} = f_{1,k}(x,y),\ \alpha_k(y) \le x \le \beta_k(y);$$

$$f(x,y)\big|_{\gamma_l \le y \le \delta_l} = f_{2,l}(x,y), \gamma_l(x) \le y \le \delta_l(x).$$

$C^{N,N}(R^2)$ — клас функцій, які мають неперервні похідні $f^{(p,q)}(x,y)$ для $0 < p,q \le N$.

Інтерстріпація на системі вертикальних смуг із криволінійними границями. Вважаємо, що зображення поверхні Σ відоме лише на системі m $(m \geq 2)$ вертикальних смуг $D_{1,k}$, $k = \overline{1,m}$.

Введемо до розгляду наступний оператор:

$$\Theta_1 f(x,y) = \begin{cases} f_{1,k}(x,y) & (x,y) \in D_{1,k},\ k = \overline{1,m}; \\ E_{1,k,k+1} f(x,y) & (x,y) \in \overline{D}_{1,k,k+1},\ k = \overline{1,m-1}, \end{cases}$$

де

$$E_{1,k,k+1} f(x,y) = \frac{x - \alpha_{k+1}(y)}{\beta_k(y) - \alpha_{k+1}(y)} f(\beta_k(y), y) + \frac{x - \beta_k(y)}{\alpha_{k+1}(y) - \beta_k(y)} f(\alpha_{k+1}(y), y).$$

Твердження 1. Поверхня $z = \Theta_1 f(x,y)$ є наближеною математичною моделлю освітленості поверхні Σ, яка на кожній смузі $D_{1,k}$, $k = \overline{1,m}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $\mathrm{E}_{1,k,k+1} f(x,y)$, $k = \overline{1,m-1}$, при цьому функція $\Theta_1 f(x,y) \in C^{N,N}(R^2)$.

Інтерстріпація на системі горизонтальних смуг з криволінійними границями. Вважаємо, що зображення поверхні Σ відоме лише на системі n $(n \geq 2)$ горизонтальних смуг $D_{2,l}$, $l = \overline{1,n}$.

Введемо до розгляду такий оператор:

$$\Theta_2 f(x,y) = \begin{cases} f_{2,l}(x,y) & (x,y) \in D_{2,l},\ l = \overline{1,n}; \\ E_{2,l,l+1} f(x,y) & (x,y) \in \overline{D}_{2,l,l+1},\ l = \overline{1,n-1}, \end{cases}$$

де

$$E_{2,l,l+1} f(x,y) = \frac{y - \gamma_{l+1}(x)}{\delta_l(x) - \gamma_{l+1}(x)} f(x, \delta_l(x)) + \frac{y - \delta_l(x)}{\gamma_{l+1}(x) - \delta_l(x)} f(x, \gamma_{l+1}(x)).$$

Твердження 2. Поверхня $z = \Theta_2 f(x,y)$ є наближеною математичною моделлю освітленості поверхні Σ, яка на кожній смузі $D_{2,l}$, $l = \overline{1,n}$ точно відновлює поверхню, а між смугами зображує поверхню за допомогою оператора $E_{2,l,l+1} f(x,y)$, $l = \overline{1,n-1}$, при цьому функція $\Theta_2 f(x,y) \in C^{N,N}(R^2)$.

Інтерстріпація на системі взаємоперпендикулярних смуг з криволінійними границями. Вважаємо, що зображення поверхні Σ відоме лише на системі m $(m \geq 2)$ вертикальних смуг $D_{1,k}$, $k = \overline{1,m}$, та на системі n $(n \geq 2)$ горизонтальних смуг $D_{2,l}$, $l = \overline{1,n}$.

В результаті їх об'єднання отримаємо набір прямокутних областей

$$\overline{\Pi}_{k,l}=\left[\beta_k,\alpha_{k+1}\right]\times\left[\delta_l,\gamma_{l+1}\right], k=\overline{1,m-1},\ l=\overline{1,n-1},$$

інформацію в яких треба відновити.

Введемо до розгляду наступний оператор:

$$\Theta_{12}f(x,y)=\begin{cases} f_{1,k}(x,y) & (x,y)\in D_{1,k},\ k=\overline{1,m}; \\ f_{2,l}(x,y) & (x,y)\in D_{2,l},\ l=\overline{1,n}; \\ E_{1,2,k,l}f(x,y) & (x,y)\in\overline{\Pi}_{k,l}, k=\overline{1,n-1},\ l=\overline{1,m-1}, \end{cases}$$

де

$$E_{1,2,k,l}f(x,y)=\left[E_{1,k,k+1}+E_{2,l,l+1}-E_{1,k,k+1}E_{2,l,l+1}\right]f(x,y)=$$

$$=\frac{x-\alpha_{k+1}(y)}{\beta_k(y)-\alpha_{k+1}(y)}f(\beta_k(y),y)+\frac{x-\beta_k(y)}{\alpha_{k+1}(y)-\beta_k(y)}f(\alpha_{k+1}(y),y)+$$

$$+\frac{y-\gamma_{l+1}(x)}{\delta_l(x)-\gamma_{l+1}(x)}f(x,\delta_l(x))+\frac{y-\delta_l(x)}{\gamma_{l+1}(x)-\delta_l(x)}f(x,\gamma_{l+1}(x))-$$

$$-\frac{x-\alpha_{k+1}(y)}{\beta_k(y)-\alpha_{k+1}(y)}\frac{y-\gamma_{l+1}(x)}{\delta_l(x)-\gamma_{l+1}(x)}f(\beta_k(y),\delta_l(x))-$$

$$-\frac{x-\alpha_{k+1}(y)}{\beta_k(y)-\alpha_{k+1}(y)}\frac{y-\delta_l(x)}{\gamma_{l+1}(x)-\delta_l(x)}f(\beta_k(y),\gamma_{l+1}(x))-$$

$$-\frac{x-\beta_k(y)}{\alpha_{k+1}(y)-\beta_k(y)}\frac{y-\gamma_{l+1}(x)}{\delta_l(x)-\gamma_{l+1}(x)}f(\alpha_{k+1}(y),\delta_l(x))-$$

$$-\frac{x-\beta_k(y)}{\alpha_{k+1}(y)-\beta_k(y)}\frac{y-\delta_l(x)}{\gamma_{l+1}(x)-\delta_l(x)}f(\alpha_{k+1}(y),\gamma_{l+1}(x)).$$

Оператор $E^*_{1,2,k,l}f(x,y)$ — оператор інтерлінації (від англ. inter — між, від англ. line — лінія) функції двох змінних, який у випадку якщо границі є прямими є класичним оператором інтерлінації між чотирма сторонами довільного чотирикутника $\overline{\Pi}_{k,l}$, $k=\overline{1,n-1}$, $l=\overline{1,m-1}$, наведеним у [7, 8].

Твердження 3. Поверхня $z=\Theta_{12}f(x,y)$ є наближеною математичною моделлю освітленості поверхні Σ, яка на кожній із смуг $D^*_{1,k}$, $k=\overline{1,m}$ та $D^*_{2,l}$, $l=\overline{1,n}$ точно відновлює поверхню, а на областях $\overline{\Pi}_{k,l}, k=\overline{1,n-1},\ l=\overline{1,m-1}$ відновлює поверхню за допомогою оператора $E^*_{1,2,k,l}f(x,y), k=\overline{1,n-1},\ l=\overline{1,m-1}$, при цьому функція $\Theta_{12}f(x,y)\in C^{N,N}(R^2)$.

Висновки. В роботі наведені та проаналізовані такі класи алгоритмів: текстурні, шаблонні, основані на рівняннях з частинними похідними, гібридні та швидкі напівавтоматичні. Окремо розглянуто метод інтерстріпації функції двох змінних. На основі методу інтерстріпації у даній статті запропоновано узагальнений метод інтерстріпації для відновлення зображення поверхні за неповною інформацією про неї у випадку смуг із криволінійними границями. Проведено обчислювальний експеримент для випадків коли зображення відоме лише на системі горизонтальних, вертикальних та взаємоперпендикулярних смуг з криволінійними границями.

Розглянуті методи можуть бути застосовані для відновлення уражених ділянок пошкоджених зображень. Аналіз і розробка методів відновлення зображень є актуальною задачею для різноманітних прикладних областей науки та потребує подальших досліджень. В подальшому автори планують при відновленні поверхні враховувати також додаткову інформацію про структуру поверхні між смугами.

Список використаних джерел:

1. Литвин О. М., Матвєєва С. Ю. Метод відновлення поверхні між смугами за допомогою інформації про поверхню на взаємно перпендикулярних смугах. *Управляющие системы и машины*. 2011. № 1. С. 33–41.
2. Joshua J., Darsan G. Digital inpainting techniques — a survey. *Intern. J. of Latest Research in Engineering and Techn*. 2016. Vol. 2. P. 34-36.
3. Hays J., Efros A. Scene completion using millions of Graphics. *Computer Graphics Proceedings (SIGGRAPH)*. 2007. Vol. 26. P. 87-94.
4. Bertalmio M., Sapiro G., Caselles V., Ballester C. Image inpainting. *Proc. of the 27th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques.* 2000. P. 417–424.
5. Sun J., Yuan L., Jian J., Shum H.-Y. Image completion with structure propagation. *Proc. of ACM Conf. Comp. Graphics*. 2005. P. 861–868.
6. Oliviera M., Bowen B., McKenna R., Chang Y.-S. Fast digital image inpainting. *In Proc. of Intl. Conf. on Visualization, Imaging and Image Processing*. 2001. P. 261–266.
7. Литвин О. М. Інтерлінація функцій. Харків: Основа, 1992. 234 с.
8. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків: Основа, 2002. 544 с.

In given work was reviewed of existing inpainting methods of restoration of damaged digital images. Was proposed a general method of interstripation of functions of two variables for image reconstruction, when information about the surface are incomplete and the border of disjoint strips have curvilinear boundaries.

Key words: *image, inpainting, interstripation, interlination.*

Одержано 14.02.2017