УДК 519.9

О. П. Нечуйвітер, д-р фіз.-мат. наук, доцент,
К. В. Кейта, аспірантка

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

ОПТИМАЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

В статті розглядається оцінка знизу для похибки чисельного інтегрування швидкоосцилюючих функцій загального вигляду на класі диференційовних функцій у випадку, коли інформація про функції задана їх слідами на відповідних лініях.

Ключові слова: *кубатурна формула, інтеграл від швидкоосцилюючої функції, клас диференційовних функцій.*

Вступ. Сучасний етап розвитку багатьох технічних галузей (астрономії, радіології, комп'ютерної томографії, голографії, радіолокації) характеризується бурхливим впровадженням нових цифрових технологій, алгоритмів, методів. Перед науковцями стає питання побудови нових або вдосконалення відомих математичних моделей, зокрема, математичних моделей в цифровій обробці сигналів та зображень, які містять нові типи задання інформації.

Задача наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних має як класичне розв'язання, так і у випадку різних інформаційних операторів [1]. В роботах [1, 2] наведені класичні алгоритми обчислення двовимірних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального вигляду, однак не досліджувалося питання наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних загального вигляду у випадку різних інформаційних операторів. Отже питання дослідження кубатурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального вигляду

$$I(f,g,\omega)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\sin\omega g(x,y)dxdy \tag{1}$$

у випадку, коли інформація про $f\left(x,y\right)$ та $g\left(x,y\right)$ задана відповідними їх слідами на лініях є актуальною задачею.

Дана стаття присвячена знаходженню оцінки знизу для похибки чисельного інтегрування інтегралів вигляду (1) на класі диференційовних функцій.

Оцінка знизу для похибки чисельного інтегрування швидкоосцилюючих функцій загального вигдяду на класі $H^{2,r}\left(M,\widetilde{M}\right)$.

Припустимо, що $f(x,y)\in F$, $g\left(x,y\right)\in G$, F, G — множини функцій, визначених в області $[a,b]\times[a,b]$. Позначимо L_N множину всіх квадратурних формул $l_N(f,g)$, що використовують інформацію про значення функцій $f(x,y)$ та $g(x,y)$ не більше ніж на N лініях. Введемо величини

$$R_N(f,g,\omega,l_N)=\left|I(f,g,\omega)-l_N(f,g)\right|,$$

$$R_N(F,G,\omega,l_N)=\sup_{f\in F,\, g\in G} R_N(f,g,\omega,l_N),$$

$$R_N(F,G,\omega)=\inf_{l_N\in L_N} R_N(F,G,\omega,l_N).$$

Кубатурну формулу $l_N^*(f,g)$, на якій досягається $R_N(F,G,\omega)$, будемо називати оптимальною за точністю кубатурною формулою. Якщо $R_N\left(F,G,\omega,\bar{l}_N\right)\le R_N(F,G,\omega)+\eta$, $\eta>0$, то $\bar{l}_N$ називається оптимальною за точністю формулою обчислення $I(f,g,\omega)$ з точністю до η. Якщо $\eta=o(R_N)$ або $\eta=O(R_N)$, то $\bar{l}_N$ називається асимптотично оптимальною або оптимальною за порядком точності.

Розглянемо $H^{2,r}\left(M,\widetilde{M}\right)$ – клас дійсних функцій $r\ge 0$ визначених на $G=[0,1]^2$ і таких, що частинні похідні порядку r по змінній x та y обмежені, тобто

$$\left|f^{(r,0)}(x,y)\right|\le M,\quad \left|f^{(0,r)}(x,y)\right|\le M,\ r\ne 0,\ \left|f^{(r,r)}(x,y)\right|\le \widetilde{M},\quad r\ge 0.$$

Теорема. Нехай $f(x,y),\ g(x,y),\in H^{2,r}\left(M,\widetilde{M}\right)$, функції $f(x,y)$, $g(x,y)$ задані слідами на відповідних системах взаємно перпендикулярних прямих в області $G=[0,1]^2$, тоді

$$R_N\left(H^{2,r}\left(\mathrm{M},\widetilde{M}\right),H^{2,r}\left(M,\widetilde{M}\right),\omega\right)\ge K\max\left\{\frac{1}{\ell^{2r}},\min\left\{1,\frac{|\omega|}{\ell^{2r}}\right\}\right\}.$$

Доведення. K,K_1,K_2,K_3 будемо позначати константи, які будуть залежати лише від r, $\widetilde{M}$. Нехай $\psi_r(x,b-a)=(x-a)^r(b-x)^r$, тоді $\left|\psi_r(x,b-a)\right|\le C(r)(b-a)^r$,

$$\int_a^b \psi_r(x,b-a)\,dx=c_1(r)(b-a)^{2r+1}=\frac{r!r!}{(2r+1)!}(b-a)^{2r+1},$$

$$C(r)=\sup_{0\le t\le 1}\left|\Phi_r^{(r)}(t)\right|=r!\,,\ c_1(r)=\int_0^1\Phi_r(t)\,dt\,,\ \Phi_r(t)=t^r(1-t)^r\,.$$

Розіб'ємо область $G=[0,1]^2$ на підобласті

$$\left[x_0^1,x_0^1+h\right]\times\left[y_0^1,\mathrm{y}_0^1+h\right],\ \left[x_1^1,x_1^1+h\right]\times\left[y_1^1,\mathrm{y}_1^1+h\right],...,$$

$$\left[x_{\ell-1}^1,x_{\ell-1}^1+h\right]\times\left[y_{\ell-1}^1,\mathrm{y}_{\ell-1}^1+h\right],$$

$$\left[x_0^2,x_0^2+h\right]\times\left[y_0^2,\mathrm{y}_0^2+h\right],\ \left[x_1^2,x_1^2+h\right]\times\left[y_1^2,\mathrm{y}_1^2+h\right],...,$$

$$\left[x_{\ell-1}^2,x_{\ell-1}^2+h\right]\times\left[y_{\ell-1}^2,\mathrm{y}_{\ell-1}^2+h\right],\ h=\frac{1}{4\ell}\,.$$

Тоді число підобластей, куди не попали лінії інтегрування кубатурної формули, дорівнює $4\ell^2$. Розглянемо функцію

$$f^*(x,y)=\frac{\widetilde{M}}{\left(C(r)\right)^2}\frac{\psi_r\left(x,x_k^1,x_k^1+h\right)}{h^r}\cdot\frac{\psi_r\left(y,y_q^1,y_q^1+h\right)}{h^r}$$

на тих підобластях, куди не попали лінії інтегрування кубатурної формули, а на всіх інших $f^*(x,y)=0$.

Позначимо $\chi(x)$ нескінченно диференційну на числовій прямій функцію, яка приймає значення 0 при $x\le 0, x\ge 1$, значення 1 при $\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}$ і таку, що $0<\chi(x)<1$ при $0<x<\frac{1}{4},\frac{3}{4}<x<1$. Нехай $C_0=\max\left\{1,\max\limits_{0\le x\le 1}\left|\chi^{(r)}(x)\right|\right\}$, а D_1 — число, що задовольняє співвідношення $signD_1=sign\omega,\quad 0<D_1<1$, $\left|D_1\right|\frac{\widetilde{M}}{\left(C(r)\right)^2 4^{4r}}\le\frac{\pi}{2}$. Число D_2 буде визначатися наступними умовами: якщо $\frac{\widetilde{M}}{\left(C_0\right)^2 4^{2r}}\le\frac{\pi}{2}$, то D_2 задовольняє співвідношенням $signD_2=sign\omega,\quad \frac{\omega}{\ell^{2r}}D_2=1$, а якщо $\frac{\widetilde{M}}{\left(C_0\right)^2 4^{2r}}>\frac{\pi}{2}$, то маємо $signD_2=sign\omega,\ \ \omega D_2\frac{\widetilde{M}}{\left(C_0\right)^2}h^{2r}=\frac{\pi}{2}$. Визначимо функцію

$$\tau(x,y)=\frac{\widetilde{M}D_1}{\left(C(r)\right)^2}\frac{\psi_r\left(x,x_k^2,x_k^2+h\right)}{h^r}\cdot\frac{\psi_r\left(y,y_q^2,y_q^2+h\right)}{h^r},\ \text{при}\ \ell\ge|\omega|^{1/2r},$$

$$\tau(x,y)=\frac{\widetilde{M}D_2}{\left(C_0\right)^2}h^{2r}\chi\left(\frac{x-x_k^2}{h}\right)\chi\left(\frac{y-y_q^2}{h}\right),\text{ при }\ \ell<\left|\omega\right|^{\frac{1}{2r}}$$

на тих підобластях, куди не попали лінії інтегрування кубатурної формули, а на всіх інших $\tau(x,y)=0$. Позначимо

$$I_1=I_1(\omega,f^*,\tau)=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\left[\widetilde{M}+f^*(x,y)\right]e^{i\omega\tau(x,y)}dxdy\ ,$$

$$I_2=I_2(\omega,f^*,\tau)=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\left[\widetilde{M}-f^*(x,y)\right]e^{-i\omega\tau(x,y)}dxdy\ .$$

Розглянемо

$$I_1(\omega,f^*,\tau)-I_2(\omega,f^*,\tau)=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\left[\widetilde{M}+f^*(x,y)\right]e^{i\omega\tau(x,y)}dxdy-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\left[\widetilde{M}-f^*(x,y)\right]e^{-i\omega\tau(x,y)}dxdy=$$

$$=\int_0^1\int_0^1 f^*(x,y)\cos\left(\omega\tau(x,y)\right)dxdy+i\widetilde{M}\int_0^1\int_0^1\sin\left(\omega\tau(x,y)\right)dxdy=$$

$$=\int_0^1\int_0^1 f^*(x,y)dxdy+i\widetilde{M}\int_0^1\int_0^1\sin\left(\omega\tau(x,y)\right)dxdy.$$

Маємо

$$\int_0^1\int_0^1 f^*(x,y)dxdy=$$

$$=\frac{\widetilde{M}}{\left(C\left(r\right)\right)^2}\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{q=0}^{\ell-1}\int_{x_k^1}^{x_k^1+h}\int_{y_q^1}^{y_q^1+h}\frac{\psi_r\left(x,x_k^1,x_k^1+h\right)}{h^r}\cdot\frac{\psi_r\left(y,y_q^1,y_q^1+h\right)}{h^r}dxdy=$$

$$=\frac{\widetilde{M}}{\left(C\left(r\right)\right)^2}\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{q=0}^{\ell-1}\frac{\left(c_1(r)\right)^2h^{2r+1}\cdot h^{2r+1}}{h^r\cdot h^r}=$$

$$=\frac{\widetilde{M}\cdot\left(c_1(r)\right)^2}{\left(C\left(r\right)\right)^2}\frac{1}{4^{r+1}\ell^r}\frac{1}{4^{r+1}\ell^r}=\frac{\widetilde{M}\cdot\left(c_1(r)\right)^2}{\left(C\left(r\right)\right)^2}\frac{1}{4^{2r+2}\ell^{2r}}=K_1\frac{1}{\ell^{2r}}\ .$$

При

$$\ell\geq\left|\omega\right|^{\frac{1}{2r}},\ \ \psi_{1r}=\psi_r\left(x,x_k^2,x_k^2+h\right),\psi_{2r}=\psi_r\left(y,y_q^2,y_q^2+h\right)$$

$$\int_0^1\int_0^1 \sin\left(\omega\tau(x,y)\right)dxdy=\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{q=0}^{\ell-1}\int_{x_k^2}^{x_k^2+h}\int_{y_q^2}^{y_q^2+h}\sin\left(|\omega||D_1|\frac{\widetilde{M}}{\left(C(r)\right)^2}\frac{\psi_{1r}}{h^r}\cdot\frac{\psi_{2r}}{h^r}\right)dxdy\,.$$

Оскільки $\max\limits_{x_k^2\le x\le x_k^2+h}\psi_{1r}=\left(\dfrac{h}{2}\right)^{2r}$, $\max\limits_{y_q^2\le y\le y_q^2+h}\psi_{2r}=\left(\dfrac{h}{2}\right)^{2r}$, то

$$|\omega||D_1|\frac{\widetilde{M}}{\left(C(r)\right)^2}\frac{\psi_{1r}}{h^r}\cdot\frac{\psi_{2r}}{h^r}\le|\omega||D_1|\frac{\widetilde{M}}{\left(C(r)\right)^2}\frac{1}{h^r}\left(\frac{h}{2}\right)^{2r}\frac{1}{h^r}\left(\frac{h}{2}\right)^{2r}=$$

$$=|\omega||D_1|\frac{\widetilde{M}}{\left(C(r)\right)^2 4^r4^r}h^rh^r\le|D_1|\frac{\widetilde{M}}{\left(C(r)\right)^2 4^{2r}4^{2r}}\le\frac{\pi}{2}\,.$$

Якщо $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ справедлива наступна нерівність $\sin t\ge\dfrac{2}{\pi}t$. Використавши цю нерівність, отримуємо:

$$\int_0^1\int_0^1 \sin\left(\omega\tau(x,y)\right)dxdy\ge\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{q=0}^{\ell-1}\int_{x_k^2}^{x_k^2+h}\int_{y_q^2}^{y_q^2+h}|\omega||D_1|\frac{\widetilde{M}}{\left(C(r)\right)^2}\frac{\psi_{1r}}{h^r}\cdot\frac{\psi_{2r}}{h^r}dxdy=$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{q=0}^{\ell-1}|\omega||D_1|\frac{\widetilde{M}}{\left(C(r)\right)^2}\left(c_1(r)\right)^2h^{r+1}h^{r+1}=$$

$$=\frac{|\omega||D_1|}{\pi^2}\widetilde{M}\frac{\left(c_1(r)\right)^2}{\left(C(r)\right)^2}\frac{1}{4^{2r+1}}\frac{1}{\ell^{2r}}=K_2\frac{|\omega|}{\ell^{2r}}\,.$$

Нехай $\ell<|\omega|^{1/2r}$, $\chi_1=\chi\left(\dfrac{x-x_k^2}{h}\right)$, $\chi_2=\chi\left(\dfrac{y-y_q^2}{h}\right)$, тоді

$$\int_0^1\int_0^1\sin\left(\omega\tau(x,y)\right)dxdy=\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{q=0}^{\ell-1}\int_{x_k^2}^{x_k^2+h}\int_{y_q^2}^{y_q^2+h}\sin\left(\omega\frac{\widetilde{M}D_2}{\left(C_0\right)^2}h^{2r}\chi_1\chi_2\right)dxdy=$$

$$=\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{q=0}^{\ell-1}\int_{x_k^2}^{x_k^2+h}\int_{y_q^2}^{y_q^2+h}\sin\left(\min\left(\frac{\widetilde{M}}{\left(C_0\right)^2 4^{2r}},\frac{\pi}{2}\right)\chi_1\chi_2\right)dxdy\ge$$

$$\ge\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{q=0}^{\ell-1}\int_{x_k^2}^{x_k^2+h}\int_{y_q^2}^{y_q^2+h}\min\left(\frac{\widetilde{M}}{\left(C_0\right)^2 4^{2r}},\frac{\pi}{2}\right)\chi_1\chi_2dxdy\ge$$

$$\ge K_2\sum_{k=0}^{\ell-1}\sum_{q=0}^{\ell-1}\int_{x_k^2}^{x_k^2+h}\int_{y_q^2}^{y_q^2+h}dxdy=K_2\ell^2\frac{h^2}{4}=K_2\ell^2\frac{1}{4^3\ell^2}=\frac{K_2}{64}\,.$$

Функції $\frac{1}{2}\left[\widetilde{M}+f^{*}(x,y)\right]$, $\frac{1}{2}\left[\widetilde{M}-f^{*}(x,y)\right]$ та функції $\tau(x,y)$, $-\tau(x,y)$ такі, що при наближеному обчисленні інтегралів $I_1 = I_1(\omega, f^{*}, \tau)$, $I_2 = I_2(\omega, f^{*}, \tau)$ за квадратурною формулою $l_N\left(f, g\right)$ буде отриманий один і той же результат $I_0 = I_0(\omega, f^{*}, \tau)$. Оскільки $\left|I_1 - I_0\right| + \left|I_2 - I_0)\right| \geq \left|I_1 - I_2\right|$, то хоча б одна з величин $\left|I_1 - I_0)\right|$, $\left|I_2 - I_0\right|$ не менше половини величини $K_3 \max\left\{\frac{1}{\ell^{2r}}, \min\left\{1, \frac{|\omega|}{\ell^{2r}}\right\}\right\}$. Значить похибка наближення на класі не менше $K \max\left\{\frac{1}{\ell^{2r}}, \min\left\{1, \frac{|\omega|}{\ell^{2r}}\right\}\right\}$.

Висновки. У статті отримана оцінка знизу для похибки чисельного інтегрування швидкоосцилюючих функцій загального вигляду на класі диференційовних функцій. Результат надасть змогу досліджувати якість кубатурних формул обчислення 2 D інтегралів від швидкоосцилюючих функцій загального вигляду у випадку різних інформаційних операторів.

Список використаних джерел:

1. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування: у 2 т. Т. 1. Алгоритми: [монографія]. К.: Наук. думка, 2011. 447 с.
2. Iserles A., Norsett S. P. Efficient quadrature of highly-oscillatory integrals using derivatives. *Tech. Reports Numerical Analysis* (NA2004/03)/ DAMPT. University of Cambridge. 14 p.

The paper is devoted to the calculation of two-dimensional integral from highly oscillating functions of general view in case when the information about functions is a set of lines. The estimation of numerical integration has been obtained on the class of differentiable functions.

Key words: *cubature formula, integral from highly oscillating function, class of differentiable functions.*

Одержано 23.02.2017