F_N або $F_{N,\varepsilon}$, що надає змогу отримати якісний наближений розв'язок задачі (1) і більш точні оцінки похибки цього розв'язку.

Список використаних джерел:

1. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування. Т. 1. Алгоритми; Т. 2. Застосування. Киев: Наук. думка, 2011. 448 с.; 348 с.
2. Березовский А. И., Кондратенко О. С. О выявлении и уточнении априорной информации. *Управляющие системы и машины*. 1997. № 6. С. 17–22.
3. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.

An algorithm for identifying and clarifying the priori information about the integrand for the problem of rapidly oscillating functions approximate integration is presented.

Key words: *the priori information, the function classes, rapidly oscillating functions approximate integration.*

Одержано 28.02.2017

УДК 519.65

П. С. Малачівський*, д-р. техн. наук, професор,
Б. Р. Монцібович*, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Я. В. Пізюр,** канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Р. П. Малачівський,** інженер

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
**Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

АЛГОРИТМ РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Запропоновано алгоритм побудови рівномірного наближення функцій багатьох змінних як граничного наближення у нормі простору L^p при $p \to \infty$. Він ґрунтується на використанні методу найменших квадратів зі змінною ваговою функцією. Запропоновано спосіб послідовного уточнення вагової функції.

Ключові слова: *функції багатьох змінних, рівномірне наближення.*

Вступ. Нехай неперервну функцію n змінних $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ задану для $x_i \in \left[\alpha_i, \beta_i\right]$, $i = \overline{1, n}$ необхідно наблизити виразом $F_m\left(a; x_1, x_2, ..., x_n\right)$, де $F_m\left(a; x_1, x_2, ..., x_n\right)$ — узагальнений поліном

$$F_m\left(a; x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \qquad (1)$$

за системою базисних функцій $\varphi_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $i = \overline{0, m}$, де a_i, $i = \overline{0, m}$ — невідомі параметри: $\left\{a_i\right\}_{i=0}^{m} \in A$, $A \subseteq R^m$, R^m — m-вимірний векторний простір. Вираз $F_m\left(a^*; x_1, x_2, ..., x_n\right)$ називатимемо рівномірним наближенням функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ для $x_i \in\left[\alpha_i, \beta_i\right]$, $i = \overline{1, n}$, якщо він задовольняє умову

$$\begin{aligned} &\max_{\alpha_i \le x_i \le \beta_i, i=\overline{1,n}} \left| f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) - F_m\left(a^*; x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| = \\ &= \min_{a \in A} \max_{\alpha_i \le x_i \le \beta_i, i=\overline{1,n}} \left| f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) - F_m\left(a; x_1, x_2, ..., x_n\right)\right|. \end{aligned} \qquad (2)$$

Рівномірне наближення функції багатьох змінних використовується при проектуванні технічних засобів для вимірювання фізичних величин, інформаційний сигнал яких залежить від декількох параметрів, а також побудові чисельних методів. Зокрема, рівномірне наближення функції двох змінних використовують при проектуванні манометрів, рівнемірів, вологомірів тощо.

На жаль, поки що немає ефективних алгоритмів для обчислення параметрів рівномірного наближення функцій багатьох змінних. Щодо методів отримання рівномірного наближення функцій багатьох змінних, то здебільшого використовують три способи: з використанням методів оптимізації, послідовного обчислення рівномірного наближення по кожній зі змінних та ітераційні алгоритми типу Ремеза.

Найчастіше використовують методи оптимізації, тобто апарат математичного програмування відповідно лінійного, або нелінійного. Зокрема, в пакеті MATLAB для знаходження рівномірного наближення функцій багатьох змінних передбачено функцію fminimax.

Програму для обчислення параметрів рівномірного наближення функцій багатьох змінних узагальненим поліномом на основі методу лінійного програмування розроблено А. О. Каленчук-Порхановою [1]. Дещо раніше така програма розроблена Кондратьєвим В. П. [2].

Обчислення параметрів рівномірного наближення функцій багатьох змінних на основі використання послідовних чебишовських апроксимацій за кожною змінною висвітлено у працях [3, 4]. За такими алгоритмами похибка наближення функції дещо більша ніж при рівномірному наближенні.

Алгоритм рівномірного наближення функцій багатьох змінних з використанням ітераційних схем типу Ремеза описано в праці Б. О. По-

пова і Г. Ф. Криворучка [5]. За цим алгоритмом на кожній ітерації уточнюється множина вузлів — точок з найбільшим відхиленням наближуючого виразу від наближуваної функції (аналог точок альтернансу при наближенні функції однієї змінної). Розв'язування задачі чебишовської інтерполяції за цим алгоритмом проводиться у два етапи: на першому визначаються знаки відхилення наближуючого виразу від наближуваної функції у вузлових точках, на другому відповідно до визначених знаків відхилення на множині вузлових точок розв'язують задачу чебишовської інтерполяції. Далі для функції однієї змінної зі зміною точок альтернансу змінюють лише один з вузлів. Оптимізацію цього алгоритму для деяких частинних випадків запропонував Гапонюк Я. В. [6].

Ми пропонуємо алгоритм побудови рівномірного наближення функцій багатьох змінних як граничного наближення у нормі простору L^p при $p \to \infty$ з використанням методу найменших квадратів зі змінною ваговою функцією.

1. Наближення функцій у нормі простору L^p. Нехай неперервну функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ задану для $x_i \in [\alpha_i, \beta_i]$, $i = \overline{1, n}$ необхідно наблизити виразом $F_m(a; x_1, x_2, ..., x_n)$. Оцінка близькості наближення в нормі простору L^p визначається формулою

$$\|\Delta\|_{L^p} = \left(\int_{\alpha_n}^{\beta_n} ... \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left| \Delta(x_1, x_2, ..., x_n) \right|^p dx_1 dx_2 ... dx_n \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{3}$$

де $\Delta(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - F_m(a; x_1, x_2, ..., x_n)$.

Для $1 \le p < \infty$ величина $\|\Delta\|_{L^p}$ набуває проміжних значень між $\|\Delta\|_{L^1}$ і $\|\Delta\|_C$ [7], де $\|\Delta\|_C$ — норма у просторі неперервних функцій.

У дискретному випадку для оцінки якості наближення використовують норму евклідового простору E^p. Похибку наближення неперервних функцій $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ заданих на множині точок $\left(x_{1,j_1}, x_{2,j_2}, ..., x_{n,j_n}\right)$, $i = \overline{0, n}$, $j_i = \overline{0, s_i}$ виразом (1) оцінюватимемо в нормі

$$\|\Delta\|_{E^p} = \left(\sum_{j_n=0}^{s_n} ... \sum_{j_2=0}^{s_2} \sum_{j_1=0}^{s_1} \left| \Delta\left(x_{1,j_1}, x_{2,j_2}, ..., x_{n,j_n}\right)^p \right| \right)^{1/p}, \tag{4}$$

де $\Delta(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - F_m(a; x_1, x_2, ..., x_n)$, $1 \le p < \infty$. Граничне значення норми $\|\Delta\|_{E^p}$ при $p \to \infty$ відповідає нормі в просторі неперервних функцій $\|\Delta\|_C$.

Побудова рівномірного наближення таблично-заданих функцій ґрунтується на ідеї ітераційного отримання наближення в просторі E^p, як наближення за методом найменших квадратів [7]

$$\sum_{j_n=0}^{s_n}\dots\sum_{j_1=0}^{s_1}\rho_r\left(x_{1,j_1},\dots,x_{n,j_n}\right)\left(\Delta_{r+1}\left(x_{1,j_1},\dots,x_{n,j_n}\right)\right)^2\to\min,\ r=0,1,\dots, \qquad (5)$$

з ваговою функцією [8]

$$\rho_0\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)=1,\ \rho_r\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{r}\left|\Delta_i\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)\right|^2,\ r=1,2,\dots, \qquad (6)$$

де $\Delta_r\left(x_1,\dots,x_n\right)=f\left(x_1,\dots,x_n\right)-F_{m,r}\left(a;x_1,\dots,x_n\right)$, $F_{m,r}\left(a;x_1,\dots,x_n\right)$ — наближення за методом найменших квадратів функції $f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ з ваговою функцією $\rho_{r-1}\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$.

Використання вагової функції (6) забезпечує її послідовне уточнення, яке передбачає врахування результатів попередніх наближень за методом найменших квадратів. Результати тестових прикладів, поданих у праці [8] підтверджують хорошу збіжність процесу (5) з ваговою функцією (6) при наближенні функцій двох змінних.

2. Опис алгоритму визначення параметрів рівномірного наближення функції багатьох змінних. Реалізація ітераційного процесу (5), (6) полягає в його проведенні до тих пір поки зменшується похибка наближення

$$\rho_{r+1}<\rho_r,\ r=1,2,\ \dots\ , \qquad (7)$$

де $\rho_r=\max\limits_{j_i=\overline{0,s_i},\ i=\overline{1,n}}\left|\Delta_r\left(x_{1,j_1},x_{2,j_2},\dots,x_{n,j_n}\right)\right|$.

Після досягнення невиконання умови (7) доцільно провести ще коригування адитивної складової похибки

$$A=\left(\rho_{\max}+\rho_{\min}\right)/2, \qquad (8)$$

де

$$\rho_{\max}=\max_{\substack{j_i=\overline{0,s_i},\\ i=\overline{1,n}}}\Delta_r\left(x_{1,j_1},\dots,x_{n,j_n}\right),\ \rho_{\min}=\min_{\substack{j_i=\overline{0,s_i},\\ i=\overline{1,n}}}\Delta_r\left(x_{1,j_1},\dots,x_{n,j_n}\right).$$

В результаті шукане рівномірне наближення неперервної функції $f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ заданої на множині точок $\left(x_{1,j_1},x_{2,j_2},\dots,x_{n,j_n}\right)$, $i=\overline{0,n}$, $j_i=\overline{0,s_i}$ узагальненим поліномом (1) буде

$$F_m\left(a;x_1,x_2,\dots,x_n\right)=F_{m,r}\left(a;x_1,x_2,\dots,x_n\right)+A. \qquad (9)$$

Під час розв'язування тестових прикладів для отримання рівномірного наближення за цим алгоритмом спостерігалось використання до п'яти — шести ітерацій (5).

Приклад 1. Знайдемо рівномірне наближення функції $z_1\left(x,y\right)= = e^{-xy}$ заданої у точках $\left(x_i,y_j\right)$, $i=\overline{0,100}$, $j=\overline{0,100}$, де $x_i=0.01i$, $y_j=0.01j$, поліномом другого степеня за кожною змінною x та y.

З використанням запропонованого методу за чотири ітерації (5) для функції $z_1\left(x,y\right)$ отримано поліном

$$\begin{gathered}P_2(x,y)=0.9972061702+0.00258908x-0.002394555359x^2+\\+0.002554584932y-0.9549205056xy+0.01181962538x^2y-\\-0.00235686406y^2+0.01178053096xy^2+0.3051429680x^2y^2,\end{gathered}\quad(10)$$

який забезпечує абсолютну похибку наближення – 0.0035415. В процесі обчислення апроксимація похибка наближення набувала таких значень: на першій ітерації – 0.0092249, на другій – 0.0040139, третій – 0.00388419, четвертій – 0.0035426, а на п’ятій ітерації спостерігалось збільшення похибки наближення – 0.0038929. Коригуюча адитивна поправка дорівнювала $A=-0.10231_{10}^{-5}$.

Поверхню похибки отриманої апроксимації показано на рисунку.

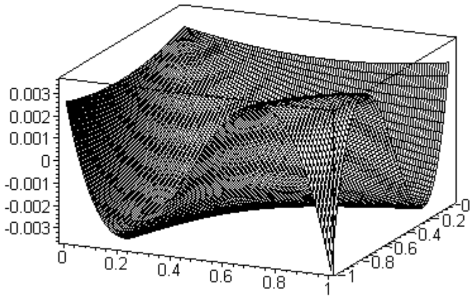

Рисунок. *Поверхня похибки апроксимації $z_1\left(x,y\right)$ поліномом (10)*

В результаті ітерацій (5), (6) похибка апроксимації функції $z_1\left(x,y\right)$ рознесена більш рівномірно серед усіх точок поверхні (див. рис. 1). Аналогічна картина спостерігається і в інших прикладах, а саме в результаті ітерацій (5), (6) значення похибки апроксимації майже рівномірно перерозподіляються серед усіх точок площини.

Приклад 2. Знайдемо рівномірне наближення функції $z_2\left(x,y\right)= =\cos x\sin y$ заданої у точках $\left(x_i,y_j\right)$, $i=\overline{0,10}$, $j=\overline{0,10}$, де $x_i=0.1i$, $y_j=0.1j$, поліномом четвертого степеня щодо змінних x та y.

З використанням запропонованого методу за три ітерації для функції $z_2\left(x,y\right)$ і поправки $A=0.451815_{10}^{-5}$ отримано поліном

$$\begin{aligned} P_4(x, y) = {} & 0.0000707115677 - 0.004444918667x - 0.004445610824y + \\ & + 1.035899447xy + 0.0185669572x^2 + 0.01857619596y^2 + \\ & + 0.0586030093x^2y^2 - 0.02453794023x^3 - 0.024564185y^3 - \\ & - 0.06925159472x^2y + 0.01056091567x^4 + 0.01057819742\,y^4 - \\ & - 0.1241764348x^3y - 0.06922153065xy^2 - 0.12419544xy^3, \end{aligned} \tag{11}$$

який забезпечує абсолютну похибку наближення — 0.0002628476.

Приклад 2 взято з праці А.О. Каленчук-Порханової [1], в якій для отримання рівномірного наближення функції $z_2(x, y)$ поліномом вигляду (11) використано алгоритм на основі методу лінійного програмування. Абсолютна похибка апроксимації функції $z_2(x, y)$ за L^p цим методом становила 0.0002732 і була досягнута на 25 кроці. Цей же приклад для тестування програми чебишовського наближення функцій багатьох змінних використовував Кондратьєв В. П. [2]. Розроблена Кондратьєвим В. П. програма [2] на основі методу лінійного програмування забезпечила похибку апроксимації 0.0002735 за 43 кроки. Ця ж задача була розв’язана з використанням MATLAB-функції fminimax за 2 ітерації з похибкою – 0.00027392.

Приклад 3. Знайдемо рівномірне наближення функції $z_3(x, y, t) = e^{-xyt}$ заданої в точках (x_i, y_j, t_r), $i = \overline{0, 50}$, $j = \overline{0, 50}$, $r = \overline{0, 50}$, де $x_i = 0.02i$, $y_j = 0.02j$, $t_r = 0.02r$ поліномом першого степеня за кожною змінною x, y та t.

З використанням запропонованого методу за три ітерації відповідно до формули (5) для функції $z_3(x, y, t)$ з коригуючою поправкою $A = 0.0037877696$ отримано поліном

$$\begin{aligned} P_1(x, y, t) = {} & 1.019745442 - 0.05546611015x - 0.05546287952y + \\ & + 0.05741801594yx - 0.05546803039t + 0.05742524483tx + \\ & + 0.05742199989yt - 0.6989846315ytx, \end{aligned} \tag{12}$$

який забезпечує абсолютну похибку наближення – 0.04125. В процесі обчислення апроксимації похибка наближення набувала таких значень: на першій ітерації – 0.125796, на другій – 0.057954, третій – 0.045038, а на четвертій ітерації спостерігалось збільшення похибки наближення – 0.0517593.

Висновки. Запропонований метод наближення неперервних таблично-заданих функцій багатьох змінних узагальненим поліномом забезпечує можливість отримання апроксимації з майже рівномірним рознесенням похибки наближення серед усіх точок задання функції. При цьому найбільші за модулем додатні й від’ємні відхилення отримуваних апроксимацій від значень наближуваних функцій майже співпадають. Отримувані значення коригуючої поправки доволі малі. Точність наближення функцій за цим методом не гірша за апроксимацію з використання методу лінійної оптимізації (див. результати прикладу 2). Отже, застосування послідовного уточнення вагової функції (6) забезпечує доволі ефективне отримання апроксимації досить близької за точністю наближення до рівномірної апроксимації.

Ідея запропонованого методу може бути використаною для апроксимації неперервних функцій раціональним виразом.

Список використаних джерел:

1. Каленчук-Порханова А. О., Вакал Л. П. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2007. № 6. С. 141–148.
2. Кондратьев В. П. Алгоритм наилучшего приближения функций многих переменных. *Программы оптимизации: приближение функций*. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1973. Вып. 3. С. 20–48.
3. Brown J. A. Henry M. S. Best Chebyshev composite approximation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1975. Vol. 12. No. 3. P. 336–344.
4. Jackson N. Henry. Comparison of algorithms for multivariate rational approximation. *Math. Comp.* 1977. 31. P. 485–494.
5. Криворучко Г. Ф., Попов Б. А. Алгоритм наилучшего чебышевского приближения табличной функции двух переменных. *Отбор и преобразование информации*. 1988. Вып. 2. С. 56–67.
6. Гапонюк Я. В. Знаходження найкращих рівномірних многочленних двовимірних наближень. *Відбір і обробка інформації.* 1998. №12(88). С. 130–133.
7. Попов Б. А., Теслер Г. С. Приближение функций для технических приложений. Киев: Наук. думка. 1980. 352 с.
8. Малачівський П. С., Монцібович Б. Р. Рівномірне наближення функції двох змінних. Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: зб. праць IV наук.-техн. конф., Львів, 28-30 вересня 2016 р. Львів: ФМІ НАНУ, 2016. С. 179–180.

The algorithm of uniform approximation for functions of several variables is described as approximation in norm L_p with $p \to \infty$. It is based on mean square approximation with changed weight function. The way to successive precise of weight function is offered.

Key words: *functions of several variables, uniform approximation.*

Одержано 02.03.2017