УДК 519.6

О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, професор,
О. В. Ярмош, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Т. І. Чорна, старший викладач

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

МЕТОД СПЛАЙН-ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЇ 4-Х ЗМІННИХ ПРИ ЗНАХОДЖЕННІ НАЙБІЛЬШОГО (НАЙМЕНШОГО) ЇЇ ЗНАЧЕННЯ В $\left[0,1\right]^4$

Представлено оператори сплайн-інтерлінації на системі взаємно перпендикулярних прямих, побудовані за допомогою операторів сплайн-інтерфлетації функції 4-х змінних, для розв'язання задачі знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції 4-х змінних в замкнутій області $D \in \left[0,1\right]^4$.

Ключові слова: *оператори сплайн-інтерлінації, оператори сплайн-інтерфлетації, сліди функції, система взаємно перпендикулярних прямих.*

Вступ. Задача знаходження найбільшого (найменшого) значення функції 4-х змінних в замкнутій області $D \in \left[0,1\right]^4$ є однією з важливих задач теорії і практики. Для її розв'язання широко використовуються класичні методи, такі як симплекс-метод, метод покоординатного спуску, метод яру, метод Монте-Карло тощо [1, 2]. Як відомо, в деяких ітераційних методах наближення збігається до екстремальної точки повільно, інколи «перескакуючи» цю точку.

Базуючись на результатах, описаних у [3, 4], а також у [5], в даній роботі пропонується метод розв'язання заданої задачі, який має однакові обчислювальні властивості у віддалених точках від точки максимуму (мінімуму) і при цьому асимптотично гарантує отримання екстремальної точки з потрібною точністю.

Виклад основного матеріалу. Метод полягає в наступному. Розбиваємо область $\left[0,1\right]^4$ на m гіперпаралелепіпедів площинами $x_i = X_{i,k_i} = \dfrac{k_i}{m_i}, k_i = \overline{0,m_i}, i = \overline{1,4}$. Ці площини розбивають куб $\left[0,1\right]^4$ на паралелепіпеди вигляду

$$\Pi_{k_1,k_2,k_3,k_4} = \left\{ x_i \left[\frac{k_i}{m_i}, \frac{k_i+1}{m_i} \right], 0 \le k_i m_i - 1, k_i = \overline{0,m_i}, i = \overline{1,4} \right\}.$$

Ребрами цих гіперпаралелепіпедів будуть прямі вигляду

$$\Gamma_{k^{(1)}}^{(1)} = \left\{ x \in D : 0 \le x_1 1,\ x_2 = X_{2,k_2},\ x_3 = X_{3,k_3},\ x_4 = X_{4,k_4} \right\};$$

$$\Gamma_{k^{(2)}}^{(2)} = \left\{ x \in D : x_1 = X_{1,k_1},\ 0 \le x_2 1,\ x_3 = X_{3,k_3},\ x_4 = X_{4,k_4} \right\};$$

$$\Gamma_{k^{(3)}}^{(3)} = \left\{ x \in D : x_1 = X_{1,k_1},\ x_2 = X_{2,k_2},\ 0 \le x_3 1,\ x_4 = X_{4,k_4} \right\};$$

$$\Gamma_{k^{(4)}}^{(4)} = \left\{ x \in D : x_1 = X_{1,k_1},\ x_2 = X_{2,k_2},\ x_3 = X_{3,k_3},\ 0 \le x_4 \le 1 \right\}.$$

Розглядаємо функції $f(x) \in C^r\left[0,1\right]^4$, $0 \le r \le r'$, $r' \ge 0$, $x = (x_1,...,x_4)$, які є неперервними разом із всіма частинними похідними до порядку r включно в області $\left[0,1\right]^4$. Для цієї функції вважаємо відомими сліди: $F_{i,k^{(i)}}(x_i) = f(x)|_{x \in \Gamma_{k^{(i)}}^{(i)}}$, де $k^{(i)} = (k_1^{(i)},...,k_{i-1}^{(i)},k_{i+1}^{(i)},...,k_4^{(i)}),\ i = \overline{1,4},\ k^{(i)} = \overline{0,m}$.

Таким чином, кожна змінна x приймає $(m_i + 1)$ різних значень $X_{i,k_i} = \dfrac{k_i}{m_i},\ 0 \le k_i m_i,\ i = \overline{1,4}$. Перпендикулярно до граней $x_4 = 0$ або $x_4 = 1$ будуть проходити (перетинати 4-вимірний куб) рівно $(m_1 + 1) \times (m_2 + 1) \times (m_3 + 1)$ прямих, ортогональних цим граням.

Аналогічно перпендикулярно до граней $x_3 = 0$ або $x_3 = 1$ область D буде перетинати $(m_1 + 1) \times (m_2 + 1) \times (m_4 + 1)$ прямих, перпендикулярно до граней $x_2 = 0$ або $x_2 = 1$ — $(m_1 + 1) \times (m_3 + 1) \times (m_4 + 1)$ прямих, перпендикулярно до граней $x_1 = 0$ або $x_1 = 1$ — $(m_2 + 1) \times (m_3 + 1) \times (m_4 + 1)$ прямих. Тобто загальна кількість таких прямих визначається числом $Q(m_1, m_2, m_3, m_4) = \sum_{i=1}^{4} \prod_{j=1,\, j \ne i}^{4} (m_j + 1)$.

Метод наближеного знаходження найбільшого (найменшого) значень функції $f(x)$ в 4-вимірному кубі полягає у знаходженні координат точок, в яких сліди $F(x) = f(x)|_{x \in \Gamma_{k^{(i)}}^{(i)}}$ досягають свого найбільшого (найменшого) значення для $0 \le x_i \le 1,\ i = \overline{1,4}$, і з подальшим знаходженням найбільших (найменших) значень на всій сукупності знайдених найбільших (найменших) значень при кожному i.

Для обґрунтування досліджуваного методу пропонується застосовувати оператори сплайн-інтерлінації з використанням допоміжних функцій у вигляді сплайнів першого степеня функції $f(x)|_{x \in \Gamma_{k^{(i)}}^{(i)}}$, які на кожній з вказаних систем прямих, паралельних осям OX_i, $i=\overline{1,4}$, мають ті ж сліди, що й функція $f(x)$.

Для цього використаємо такий алгоритм, який опишемо по кроках.

Крок 1. Будуємо оператори

$$O_i f(x)=\sum_{k_i=0}^{m_i} h_{i,k_i}(x_i)\times f(x)\,|_{x\in\Gamma_{k(i)}^{(i)}}\,,$$

де $h_{i,k_i}(x_i)=\begin{cases}0,\ x_i\le \dfrac{k_i-1}{m_i},\\ m_i x_i-k_i+1,\ \dfrac{k_i-1}{m_i}<x_i\le\dfrac{k_i}{m_i},\\ k_i+1-m_i x_i,\ \dfrac{k_i}{m_i}<x_i<\dfrac{k_i+1}{m_i},\\ 0,\ x_i\ge\dfrac{k_i+1}{m_i}.\end{cases}$

Крок 2. Будуємо оператор

$$O^{(4)}f(x)=\sum_{j_1=1}^{4}O_{j_1}f(x)-\sum_{j_1=1}^{3}\sum_{j_2=j_1+1}^{4}O_{j_1}O_{j_2}f(x)+$$
$$+\sum_{j_1=1}^{2}\sum_{j_2=j_1+1}^{3}\sum_{j_3=j_2+1}^{4}O_{j_1}O_{j_2}O_{j_3}f(x)-O_{j_1}O_{j_2}O_{j_3}O_{j_4}f(x). \tag{1}$$

Теорема 1. Оператор $Of(x)$ вигляду (1) — це оператор інтерфлетації функції $f(x)$ між системою взаємно перпендикулярних гіперплощин $x_i=X_{i,k_i}=\dfrac{k_i}{m_i},\ k_i=\overline{0,m_i},\ i=\overline{1,4}$, з властивостями $Of(x)\,|_{x_p=X_{p,k_p}}=$ $=f(x)\,|_{x_p=X_{p,k_p}},\ 0\le k_p m_p,\ p=\overline{1,4}$.

Доведення. Покладемо в формулі $Of(x)$ (1) $x_4=\dfrac{k_4}{m_4}$. Тоді перша група доданків буде мати вигляд: перший оператор — $O_1 f(x_1,x_2,x_3,\dfrac{k_4}{m_4})$, другий — $O_2 f(x_1,x_2,x_3,\dfrac{k_4}{m_4})$, третій — $O_3 f(x_1,x_2,x_3,\dfrac{k_4}{m_4})$, четвертий оператор в точці $(x_1,x_2,x_3,\dfrac{k_4}{m_4})$ буде рівний $f(x_1,x_2,x_3,\dfrac{k_4}{m_4})$.

Друга група доданків

$$O_1O_2f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_1O_3f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_1O_4f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+$$

$$+O_2O_3f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_2O_4f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_3O_4f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}=$$

$$=O_1O_2f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_1O_3f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_1f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+$$

$$+O_2O_3f(x)\,|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_2f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_3f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}.$$

Третя група доданків

$$O_1O_2O_3f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_1O_2O_4f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_1O_3O_4f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+$$

$$+O_2O_3O_4f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}=O_1O_2O_3f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_1O_2f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+$$

$$+O_1O_3f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_2O_3f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}.$$

Четвертий доданок $O_{j_1}O_{j_2}O_{j_3}O_{j_4}f(x)$ в точці $(x_1,x_2,x_3,\frac{k_4}{m_4})$ буде рівний $O_1O_2O_3f(x)$.

Таким чином, підставивши отримані доданки у формулу оператора (1), маємо

$$O^{(4)}f(x)=O_1f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_2f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_3f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+$$

$$+f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}-O_1O_2f(x)\,|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}-O_1O_3f(x)\,|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}-$$

$$-O_1f(x)\,|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}-O_2O_3f(x)\,|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}-O_2f(x)\,|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}-$$

$$-O_3f(x)\Big|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_1O_2O_3f(x)\,|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_1O_2f(x)\,|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+$$

$$+O_1O_3f(x)\,|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}+O_2O_3f(x)\,|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}-O_1O_2O_3f(x)\,|_{x_4=\frac{k_4}{m_4}}=f(x)\,|_{x_4=k_4/m_4}.$$

Теорема доведена.

Для побудови операторів сплайн-інтерлінації функції 4-х змінних замінимо в операторах $O_if(x)$ всі функції $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ операторами

$$f(X_{1,i}=\frac{k_p}{m_i},x_2,x_3,x_4)\approx\sum_{p=1,\,p\neq i}^{4}\left(\prod_{j=1,\,j\neq i,\,j\neq p}^{4}O_j\right)f(X_1,i,x_2,x_3,x_4).$$

Теорема 2. Оператор

$$L_4 f(x) = \sum_{k=1}^{4} \prod_{i=1, i\neq k}^{4} O_i f(x) - 3\prod_{i=1}^{4} O_i f(x) \tag{2}$$

є оператором інтерлінації функції 4-х змінних на вказаній множині $(m_1+1)\times(m_2+1)\times(m_3+1)$ прямих з властивостями:

$$L_4 f(x)|_{x\in\Gamma^{(i)}_{k^{(i)}}} = f(X_{1,k_1^{(1)}}, X_{2,k_2^{(1)}}, X_{3,k_3^{(i)}}, x_4),\ 0\le k_i^{(i)} m_i,\ i=\overline{1,4}\ .$$

Доведення. Для функції 4-х змінних оператор матиме вигляд

$$L_4 f(x)|_{x\in\Gamma^{(i)}_{k^{(i)}}} = (O_1O_2O_3 + O_1O_2O_4 + O_1O_3O_4 + O_2O_3O_4 - 3O_1O_2O_3O_4) f(x)|_{x\in\Gamma^{(i)}_{k^{(i)}}} =$$

$$= f(\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{k_3}{m_3},x_4) + O_4 f(\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{k_3}{m_3},x_4) + O_4 f(\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{k_3}{m_3},x_4) +$$

$$+ O_4 f(\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{k_3}{m_3},x_4) - 3O_4 f(\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{k_3}{m_3},x_4) = f(\frac{k_1}{m_1},\frac{k_2}{m_2},\frac{k_3}{m_3},x_4).$$

Отже, **теорема доведена.**

Висновки. Запропонований алгоритм використання методу сплайн-інтерлінації для знаходження найбільшого або найменшого значення функції 4-х змінних, який має однакові обчислювальні властивості у віддалених точках від точки максимуму (мінімуму) і при цьому асимптотично гарантує отримання екстремальної точки з потрібною точністю.

Список використаних джерел:

1. Гаврилюк І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень: Підручник: У 2 ч. К.: Вища шк., 1995. Ч. 1. 367 с.
2. Гаврилюк І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень: Підручник: У 2 ч. К.: Вища шк., 1995. Ч. 2. 431 с.
3. Литвин О. М. Інтерлінація функції та деякі її застосування. Харків: Основа, 2002. 544 с.
4. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи: Навч. посіб. К.: Наук. думка, 2005. 332 с.
5. Литвин, О. М., Ярмош О. В., Чорна Т. І. Метод сплайн-інтерлінації при знаходженні найбільших (найменших) значень функції двох змінних в замкнутій області [Текст] Бионика интеллекта. 2016. № 2 (87). С. 77–82.

In this article the operators of spline interlineation on the system mutually perpendicular lines, built by means of operators of spline interflatation function of four variables is proposed for the solution of task of finding the largest and the least values of continuous function of four variables in the closed domain it is offered to use.

Key words: *operators of spline-interlineation, operators of spline-interfletation, tracks of function, system of mutually perpendicular lines.*

Одержано 21.02.2017