

УДК 539.3

**Р. С. Мусій\***, д-р фіз.-мат. наук, професор,  
**Х. Т. Дрогомирецька\***, канд. фіз.-мат. наук,  
**Г. Б. Стасюк\*\***, канд. фіз.-мат. наук,  
**М. І. Сорокатий\*\*\***, канд. фіз.-мат. наук

\*Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів,

\*\*Технічний університет, м. Карлсруе, Німеччина,

\*\*\*Національна Академія сухопутних військ

ім. Гетьмана П. Сагайдачного, м. Львів

## ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ШАРУ ЗА ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ДІЇ В РЕЖИМІ ЗГАСНОЇ СИНУСОЇДИ ЗА ВРАХУВАННЯ ТЕРМОНАПРУЖНОГО РОЗСІЮВАННЯ ЕНЕРГІЇ

Сформульовано зв'язану початково-крайову задачу термомеханіки для електропровідного шару з плоскопаралельними межами за однорідної нестационарної електромагнітної дії. З використанням кубічної апроксимації розподілів всіх ключових функцій за товщиною шару отримано загальний розв'язок даної задачі за вказаної дії. На його основі побудовано розв'язок задачі за електромагнітної дії в режимі згасної синусоїди і чисельно проаналізовано термонапружений стан розглядуваного шару залежно від амплітудно-частотних характеристик такої електромагнітної дії.

**Ключові слова:** *електропровідний шар, зв'язана задача, термонапружений стан, імпульсне електромагнітне поле, режим згасної синусоїди.*

**Вступ.** Електропровідні пластини є елементами конструкцій сучасних машин, які за експлуатації цих пристроїв зазнають впливу різних фізичних факторів, зокрема дії імпульсних електромагнітних полів (ІЕМП) [1, с. 147]. Дія ІЕМП на пластину проявляється двома фізичними чинниками — нестационарними об'ємними джерелами джоулевого тепла  $Q$  і пондеромоторними силами  $\vec{F}$ , які зумовлюють у пластині нестационарні температурне і механічне поля. Ці поля за відповідних параметрів ІЕМП досягають значень, за яких пластина як конструктивний елемент втрачає несучу здатність. В загальному випадку поле температури  $T$  і поле напружень, що описується компонентами  $\sigma_{ik}$  ( $i, k = x, y, z$ ) тензора динамічних напружень  $\vec{\sigma}$  є взаємопов'язаними. У роботах [5, с. 43–50, 92–111, 125–130, 134–160; 6, с. 24–25; 191–192; 7, с. 756, 763; 8, с. 13, 115–160] досліджено взаємозв'язаність полів деформації і температури у пластинах, циліндрах

і кулях за нестационарних теплових дій. Для електропровідної пластини вплив такої зв'язаності полів температури і деформації за електромагнітної дії в режимі з імпульсним модульованим сигналом (РІМС) досліджено в роботі [13]. Однак, у літературі відсутні дослідження такого впливу за електромагнітної дії у режимі згасної синусоїди (РЗС) [2, с. 10–15; 4, с. 126–127; 9, с. 211–213].

Нижче сформульовано зв'язану динамічну задачу термомеханіки для електропровідного шару з плоско паралельними межами, що моделює пластину, за нестационарної електромагнітної дії та записано її розв'язок за електромагнітної дії в РЗС і чисельно проаналізовано його термонапружений стан за врахування зв'язаності полів температури і деформації і без такого врахування за даної електромагнітної дії.

**Математичне формулювання задачі.** Розглядається неферомагнітний електропровідний шар товщиною  $2h$  з плоскопаралельними межами, який знаходиться за дії зовнішнього однорідного нестационарного електромагнітного поля (ЕМП). Шар віднесений до прямокутної декартової системи координат  $Oxyz$ , площина  $xOy$  якої співпадає зі серединною площиною шару. Матеріал шару однорідний, ізотропний і неферомагнітний. Його фізико-механічні характеристики приймаються сталими.

Дія нестационарного ЕМП на теплові і механічні процеси в електропровідному шарі враховуємо двома фізичними факторами — джоулевими тепловиділеннями  $Q$  і пондеромоторними силами  $\vec{F}$ . Ці фактори визначають термонапружений стан шару, який описується температурою  $T$  і компонентами  $\sigma_{ik}$  ( $i, k = x, y, z$ ) тензора динамічних напружень. Поля температури і напружень є взаємно пов'язаними за рахунок наявності термопружного розсіювання енергії [2, с.5–7; 9, с. 113–114; 11, с. 211–214]. У розглядуваному випадку однорідне ЕМП задане залежними від часу  $t$  значеннями відмінної від нуля дотичної компоненти  $H_y(z, t)$  вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}(z, t) = \{0; H_y(z, t); 0\}$  на основах шару  $z = \pm h$ , тобто. задане умовами

$$H_y(\pm h, t) = H_y^\pm(t), \quad (1)$$

де  $H_y^\pm(t)$  — відомі функції часу.

За такої дії всі ключові функції  $H_y, T, \sigma_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) залежать лише від товщинної координати  $z$  і часу  $t$ . Відмінна від нуля компонента  $H_y(z, t)$  вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$  у розглядуваному випадку нехтуючи струми зміщення описується рівнянням [3; 4, с. 34; 10, с.193; 12]

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \sigma \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

крайовими (1) і початковою

$$H_y(z, 0) = 0 \quad (3)$$

умовами. Тут  $\sigma$ ,  $\mu$  — коефіцієнт електропровідності і магнітна проникливість матеріалу шару.

Питомі густини джоулевих тепловиділень  $Q$  і пондеромоторної сили  $\vec{F}$  через функцію  $H_y$  подаються виразами:

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial H_z}{\partial z} \right)^2, \quad \vec{F} = \left\{ 0; 0; F_z = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial z} H_z \right\}. \quad (4)$$

Температура  $T$  і компонента  $\sigma_{zz}$  тензора напружень згідно [11, с. 211–214; 13] описуються системою взаємозв'язаних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1 + \varepsilon_*}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} - \varepsilon_* \frac{1 + 2\nu}{\kappa \alpha E} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= -\frac{1}{\lambda} Q, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} &= \alpha \rho \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial F_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5)$$

за початкових (для  $t = 0$ )

$$T(z, 0) = 0, \quad \sigma_{zz}(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}(z, 0)}{\partial t} = -\frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T(z, 0)}{\partial t} \quad (6)$$

і крайових (для  $t > 0$ ) при конвективному теплообміні з довкіллям і вільних від силового навантаження основах шару  $z = \pm h$

$$\frac{\partial T^\pm}{\partial z} \pm h_*^\pm (T^\pm - T_c) = 0, \quad \sigma_{zz}(\pm h, t) = 0 \quad (7)$$

умовах. Тоді за відомих функцій  $T$  і  $\sigma_{zz}$  компоненти  $\sigma_{xx}$  і  $\sigma_{yy}$  тензора напружень визначаються співвідношеннями

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{zz} - \frac{\alpha E}{1 - \nu} T. \quad (8)$$

Тут  $h_*^\pm$  — коефіцієнт тепловіддачі на основах шару  $z = \pm h$ ;  $T_c$  — температура зовнішнього середовища;  $\varepsilon_*$  — параметр, який характеризує зв'язаність полів деформації і температури;  $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\nu$  — коефіцієнти тепло- і температуропровідності, лінійного теплового розширення і Пуассона;  $E$  — модуль Юнга;  $\rho$  — густина матеріалу шару.

**Методика побудови розв'язків сформульованих початково-крайових задач.** Для розв'язування сформульованих вище початково-

крайових задач, що описують ключові функції  $\Phi(z, t) = \{H_y, T, \sigma_{zz}\}$ , які в даному випадку залежать лише від товщинної координати  $z$  і часу  $t$ , використаємо кубічну апроксимацію розподілу відносно цієї координати [4, с. 74–78; 12, 13]

$$\Phi(z, t) = \sum_{i=0}^3 a_i^\Phi(t) z^i. \quad (9)$$

Коефіцієнти  $a_i^\Phi(t)$  апроксимаційних поліномів (9) подаються через інтегральні відносно товщинної координати  $z$  характеристики шуканих функцій

$$\Phi_s(t) = \int_{-h}^h \Phi(z, t) z^{s-1} dz, \quad s = 1, 2 \quad (10)$$

і задані на основах шару  $z = \pm h$  значення  $\Phi^\pm(t)$  функцій  $\Phi(z, t)$ , тобто подаються у вигляді

$$a_i^\Phi(t) = a_{i1}^\Phi \Phi_1(t) + a_{i2}^\Phi \Phi_2(t) + a_{i3}^\Phi \Phi^+(t) + a_{i4}^\Phi \Phi^-(t). \quad (11)$$

Для отримання систем рівнянь на інтегральні характеристики  $\Phi_s(t)$  шуканих ключових функцій  $\Phi(z, t)$  вихідні рівняння (2) і (6) на функції  $H_y(z, t)$ ,  $T(z, t)$ ,  $\sigma_{zz}(z, t)$  інтегруємо відповідно до формули (10) і використовуємо при перетвореннях вирази (9) і (11). В результаті для компоненти  $H_y(z, t)$  вектора напруженості магнітного поля отримуємо вирази

$$\begin{aligned} H_y(z, t) = & \frac{3}{4} H_{y1}(t) \left[ 1 - \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] + \frac{15}{4} H_{y2}(t) \left[ \frac{z}{h} - \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] - \\ & - \frac{1}{4} \left[ H_y^+(t) + H_y^-(t) \right] \left[ 1 - 3 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] + \frac{1}{4} \left[ H_y^+(t) - H_y^-(t) \right] \left[ 3 \frac{z}{h} - 5 \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Інтегральні характеристики  $H_{ys}(t)$  задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dH_{y1}}{dt} + \frac{3}{\sigma\mu h^2} H_{y1} &= \frac{3}{\sigma\mu h^2} (H_y^+ + H_y^-), \\ \frac{dH_{y2}}{dt} + \frac{15}{\sigma\mu h^2} H_{y2} &= \frac{5}{\sigma\mu h^2} (H_y^+ - H_y^-). \end{aligned} \quad (13)$$

Систему (13) розв'язуємо за нульових початкових умов на інтегральні характеристики

$$H_{ys}(z, 0) = 0, \quad s = 1; 2. \quad (14)$$

Аналогічно для температури  $T$  і компоненти  $\sigma_{zz}$  тензора напружень отримуємо їх вирази через інтегральні характеристики:

$$T(z, t) = 3 \frac{h^* (h^2 - z^2) - 2h}{4h^2 (h^* h - 3)} T_1(t) + 15 \frac{h^2 z (h^* h - 3) + z^3 (1 - h^* h)}{4h^5 (h^* h - 6)} T_2(t),$$

$$\sigma_{zz}(z, t) = \frac{3}{4} \sigma_{zz1}(t) \left( 1 - \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) + \frac{15}{4} \sigma_{zz2}(t) \left( \frac{z}{h} - \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right). \quad (15)$$

Інтегральні характеристики  $\sigma_{zss}(t)$  і  $T_s(t)$  ( $s = 1, 2$ ) цих функцій (компоненти тензора напружень і температури) задовольняють системі взаємопов'язаних рівнянь:

$$\frac{1}{c_1^2} \frac{d^2 \sigma_{zz1}}{dt^2} + \frac{3}{h^2} \sigma_{zz1} + \alpha \rho \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2} = W_{11},$$

$$\frac{1}{c_1^2} \frac{d^2 \sigma_{zz2}}{dt^2} + \frac{15}{h^2} \sigma_{zz2} + \alpha \rho \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T_2}{\partial t^2} = W_{12},$$

$$\varepsilon_* a_* \frac{\partial \sigma_{zz1}}{\partial t} + \left( \frac{3h^*}{h(h^* h - 3)} + \frac{1}{\kappa_*} \frac{\partial}{\partial t} \right) T_1 = W_{21},$$

$$\varepsilon_* a_* \frac{\partial \sigma_{zz2}}{\partial t} + \left( \frac{15(h^* h - 1)}{h^2 (h^* h - 6)} + \frac{1}{\kappa_*} \frac{\partial}{\partial t} \right) T_2 = W_{22}, \quad (16)$$

де

$$\kappa_* = \kappa / (1 + \varepsilon_*), \quad a_* = \frac{(1 - 2\nu)}{\kappa \alpha E}, \quad \gamma_1 = \frac{3h_*}{h(h_* h - 3)}, \quad \gamma_2 = \frac{15(h_* h - 1)}{h(h_* h - 3)},$$

$$W_{1s} = - \int_{-h}^h \frac{\partial F_z}{\partial z} z^{s-1} dz, \quad W_{2s} = \frac{1}{\lambda} \int_{-h}^h Q z^{s-1} dz, \quad s = 1, 2.$$

Систему (16) з врахуванням початкових умов (7) для компонентів тензора напружень  $\sigma_{zz}(z, t)$  і температури  $T(z, t)$  розв'язуємо за таких початкових умов на інтегральні характеристики

$$T_s(z, 0) = 0, \quad \sigma_{zss}(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zss}(z, 0)}{\partial t} = - \frac{\alpha E}{1 - 2\nu} \frac{\partial T_s(z, 0)}{\partial t}, \quad s = 1, 2. \quad (17)$$

Для побудови розв'язків сформульованих вище задач Коші на інтегральні характеристики ключових функцій застосовуємо інтегральне перетворення Лапласа відносно часу.

Після перетворень отримуємо такі вирази:

- інтегральних характеристик  $H_{ys}(t)$  ( $s = 1, 2$ ) дотичної компоненти  $H_y(z, t)$  вектора напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ :

$$H_{y1}(t) = 3 \int_0^t e^{\frac{3}{\sigma\mu h^2}(t-\tau)} [H^+(\tau) + H^-(\tau)] d\tau, \quad (18)$$

$$H_{y2}(t) = 5 \int_0^t e^{\frac{15}{\sigma\mu h^2}(t-\tau)} [H^+(\tau) - H^-(\tau)] d\tau;$$

- інтегральних характеристик  $T_s(t)$  і  $\sigma_{zss}(t)$  ( $s = 1, 2$ ) температури  $T$  і компоненти  $\sigma_{zz}$  тензора напружень:

$$T_s(t) = \sum_{i=3s-2}^{3s} \int_0^t (\eta_{3si} W_{1s}(\tau) - \eta_{4si} W_{2s}(\tau)) e^{p_i(t-\tau)} d\tau, \quad s = 1, 2;$$

$$\sigma_{zss}(t) = \sum_{i=3s-2}^{3s} \int_0^t (\eta_{1si} W_{1s}(\tau) - \eta_{2si} W_{2s}(\tau)) e^{p_i(t-\tau)} d\tau. \quad (19)$$

Тут

$$\eta_{1li} = c_1^2 (\gamma_1 + p_i / \kappa_*) / \Delta_{li}, \quad \eta_{2li} = -\alpha \rho (1 + \nu) / (1 - \nu) p_i^2 / \Delta_{li},$$

$$\eta_{12i} = c_1^2 \varepsilon_* (1 - \nu) (1 - 2\nu) p_i / (\alpha \kappa \Delta_{li}), \quad \eta_{22i} = (3c_1^2 / h^2 + p_i^2) / \Delta_{li},$$

$$\Delta_{li} = 3p_i^2 / \kappa_* (1 - \varepsilon_* \kappa_* / \kappa) + 2p_i \gamma_1 + 3c_1^2 / h^2 \kappa_*,$$

$$\eta_{3li} = c_1^2 (\gamma_2 + p_i / \kappa_*) / \Delta_{2i}, \quad \eta_{4li} = c_1^2 p_i^2 \alpha \rho (1 + \nu) / ((1 - \nu) \Delta_{2i}),$$

$$\eta_{32i} = \alpha T_0 (1 + \nu) p_i / (\lambda (1 - \nu) \Delta_{2i}), \quad \eta_{42i} = (15c_1^2 / h^2 + p_i^2) / \Delta_{2i},$$

$$\Delta_{2i} = 3p_i^2 (1 - \varepsilon_* \kappa_* / \kappa) / \kappa_* + 2p_i \gamma_2 + 15c_1^2 / h^2 \kappa_*,$$

$p_1, p_2, p_3$  — корені рівняння

$$\left( \frac{\varepsilon_*}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_*} \right) p^3 - \gamma_1 p^2 - \frac{3c_1^2}{h^2} \frac{p}{\kappa_*} - \frac{3\gamma_1 c_1^2}{h^2} = 0,$$

а  $p_4, p_5, p_6$  — корені рівняння

$$\left( \frac{\varepsilon_* (h^* h - 6)}{c_1^2 \kappa} - \frac{1}{\kappa_*} \right) p^3 - \gamma_2 p^2 - \frac{15c_1^2}{h^2} \frac{p}{\kappa_*} - \frac{15\gamma_2 c_1^2}{h^2} = 0.$$

Зокрема, у випадку теплоізоляції основ  $z = \pm h$  шару отримуємо наступні вирази шуканих інтегральних характеристик  $T_s(t)$  і  $\sigma_{zss}(t)$ :

$$\begin{aligned}
 T_1(t) &= \sum_{m=1}^3 \int_0^t \frac{c_1^2 \frac{\alpha T_0}{\lambda} \frac{1+\nu}{1-\nu} p_m W_{11}(\tau) - \left( \frac{3}{h^2} c_1^2 + p_m^2 \right) W_{21}(\tau)}{\frac{3p_m^2}{\kappa_*} \left( 1 - \frac{\varepsilon_* \kappa_*}{\kappa} \right) + \frac{3c_1^2}{h^2 \kappa_*}} e^{p_m(t-\tau)} d\tau, \\
 T_2(t) &= \sum_{m=4}^6 \int_0^t \frac{c_1^2 \frac{\alpha T_0}{\lambda} \frac{1+\nu}{1-\nu} p_m W_{12}(\tau) - \left( \frac{15}{h^2} c_1^2 + p_m^2 \right) W_{22}(\tau)}{\frac{3p_m^2}{\kappa_*} \left( 1 - \frac{\varepsilon_* \kappa_*}{\kappa} \right) + \frac{5p_m}{2h^2} + \frac{15c_1^2}{h^2 \kappa_*}} e^{p_m(t-\tau)} d\tau, \\
 \sigma_1(t) &= \sum_{m=2}^3 \int_0^t \frac{c_1^2 h^2 W_{11}(\tau) - \alpha \rho \kappa_* \frac{1+\nu}{1-\nu} p_m W_{21}(\tau)}{-3c_1^2 - h^2 p_m + \varepsilon_* p_m^2 \frac{\kappa_*}{\kappa}} e^{p_m(t-\tau)} d\tau, \quad (20) \\
 \sigma_2(t) &= \sum_{m=4}^6 \int_0^t \frac{c_1^2 \left( \frac{-5}{h^2} + \frac{p_m}{\kappa_*} \right) W_{12}(\tau) - \alpha \rho \frac{1+\nu}{1-\nu} c_1^2 p_m W_{22}(\tau)}{\frac{3p_m^2}{\kappa_*} \left( 1 - \frac{\varepsilon_* \kappa_*}{\kappa} \right) + \frac{5p_m}{2h^2} + \frac{15c_1^2}{h^2 \kappa_*}} e^{p_m(t-\tau)} d\tau.
 \end{aligned}$$

Тут:  $p_1 = 0$ ,  $p_2, p_3$  – корені рівняння  $\frac{\varepsilon_*}{\kappa} p - \frac{1}{\kappa_*} \left( \frac{3c_1^2}{h^2} + p^2 \right) = 0$ , а відповідно  $p_4, p_5, p_6$  — корені рівняння

$$\left( \frac{6\varepsilon_*}{c_1^2 \kappa} - \frac{1}{\kappa_*} \right) p^3 - \frac{5}{2h^2} p^2 - \frac{15c_1^2}{h^2} \frac{p}{\kappa_*} - \frac{95}{2h^4} = 0.$$

Покладаючи у розв'язках (20) (задачі термомеханіки для розглядуваного електропровідного шару за врахування термопружного розсіювання енергії) значення параметра зв'язності  $\varepsilon_* = 0$ , отримуємо відомі розв'язки незв'язаної задачі термомеханіки для даного шару [4, с. 73–78; 12].

**Числовий аналіз розв'язку задачі за електромагнітної дії в РЗС.** Імпульсне ЕМП в режимі згасної синусоїди (РЗС) задається на основах  $z = \pm h$  розглядуваного шару значеннями  $H_y^\pm(t)$  дотичної компоненти  $H_y(z, t)$ , які описуються залежністю [2, с.11; 4, с.126; 9, с. 217; 10, с. 357; 12] (рис. 1)

$$H_y^\pm(t) = H_0 k_0 e^{-\beta t} \sin \omega t. \quad (21)$$

Тут  $H_0$  — максимальне значення напруженості магнітного поля на інтервалі дії ЕМП,  $k_0$  — нормувальний множник,  $\beta$  — параметр, що

характеризує час згасання (практично до нуля) амплітуди несучих синусоїдальних електромагнітних коливань частоти  $\omega$ .

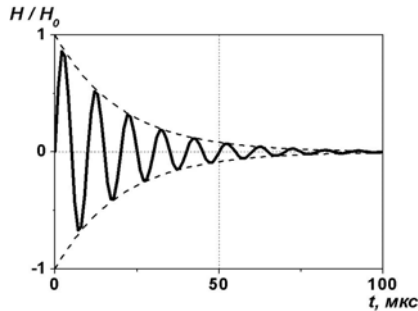


Рис. 1. Імпульсна електромагнітна дія в РЗС

Підставляючи вираз (21) у співвідношення (12)–(20), отримуємо розв'язок зв'язаної динамічної задачі термомеханіки для електропровідного шару з плоскопаралельними межами за імпульсною електромагнітною дією в РЗС.

Числові дослідження виконано для розглядуваного електропровідного шару товщиною  $2h = 2 \cdot 10^{-3}$  м, виготовленого зі сталі X18H9T.

Значення частоти  $\omega$  електромагнітних коливань вибиралось поза околom першої  $\omega_{r1}$  з резонансних частот ЕМП для розглядуваного шару (яка дорівнює  $\omega_{r1} = 4,57 \cdot 10^6$  рад/с у випадку зв'язаності полів деформації і температури і дорівнює  $\omega_{r1} = 4,42 \cdot 10^6$  рад/с — у випадку незв'язаності цих полів) і приймалось наступним:  $\omega = 0,63 \cdot 10^6$  рад/с. Це відповідає  $n = 10$  періодам за час  $t_i$  згасання амплітуди синусоїдальних електромагнітних коливань (при  $t_i = 10^{-4}$  с).

На рис. 2–5 показано зміну в часі температури  $T$ , компонент  $\sigma_{zz}^F$ ,  $\sigma_{xx}^F$ ,  $\sigma_{zz}^Q$ ,  $\sigma_{xx}^Q$  тензора напружень за врахування процесу термопружного розсіювання енергії (рис. 2 а–5 а) і без врахування такого процесу (рис. 2 б–5 б).

Максимальні значення температури за врахування процесу термопружного розсіювання енергії (рис. 2 а) і без його врахування (рис. 2 б) досягаються на основах шару при  $t \approx 0,5t_i$ . Лінії 1–3 на рис. 2 відповідають поверхням  $z = h; h/2; 0$  шару. При  $t \geq 0,5t_i$  температура внаслідок процесу теплопровідності починає вирівнюватися і стає практично постійною по всій товщині шару при  $t \approx 1$  с. Напруження  $\sigma_{zz}^F$ ,  $\sigma_{xx}^F$  обчислені на серединній поверхні шару (де вони



приймають максимальні значення при  $t \approx 0,05t_i$ ). За врахування процесу термопружного розсіювання енергії (рис. 3 а, 4 а) і без його врахування (рис. 3 б, 4 б) максимальні значення розглядуваних напружень практично не відрізняються. За врахування термопружного розсіювання енергії амплітуда осциляцій власних коливань напружень  $\sigma_{zz}^F$ ,  $\sigma_{xx}^F$  при  $t \geq 0,5t_i$  згасає, зокрема, при  $t \geq 10^4 t_i$  зменшується приблизно втричі. Без врахування цього процесу при  $t \geq 0,5t_i$  напруження  $\sigma_{zz}^F$ ,  $\sigma_{xx}^F$  виходять на режим власних коливань.

Напруження  $\sigma_{zz}^Q$  і  $\sigma_{xx}^Q$  обчислені на поверхнях  $z=0$  і  $z=h$ , де вони максимальні. Видно, що їх максимальні значення як за врахування термопружного розсіювання енергії (рис. 5 а), так і без його врахування (рис. 5 б) практично співпадають.

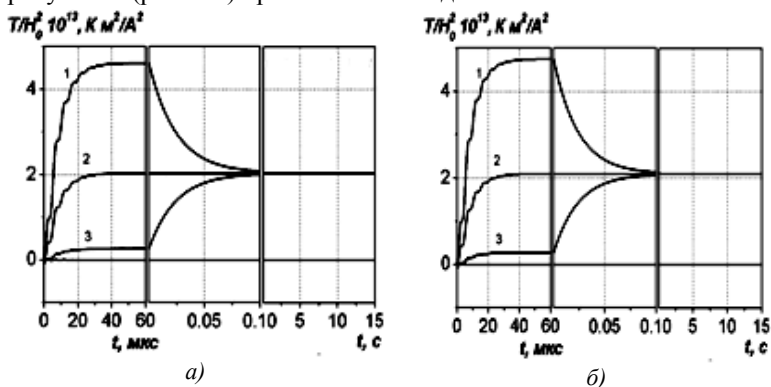


Рис. 2. Зміна в часі температури  $T$  (на поверхнях  $z = h; h/2; 0$  — лінії 1–3)

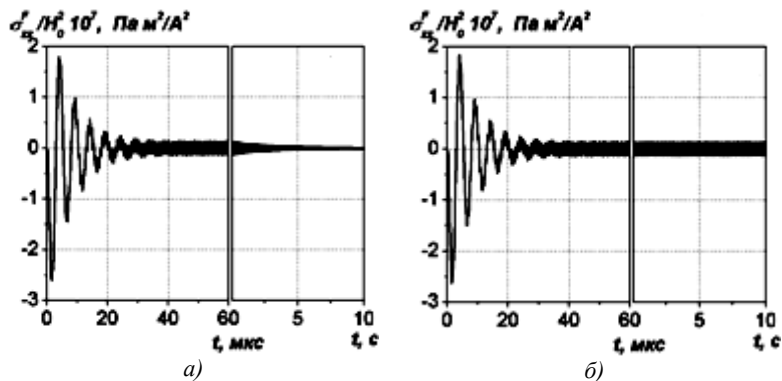


Рис. 3. Зміна в часі напружень  $\sigma_{zz}^F$  при  $n = 10$  (на серединній поверхні  $z = 0$ )

Зауважимо, що максимальні значення напружень  $\sigma_{xx}^Q$  на порядках більші за аналогічні напруження  $\sigma_{zz}^F$ .

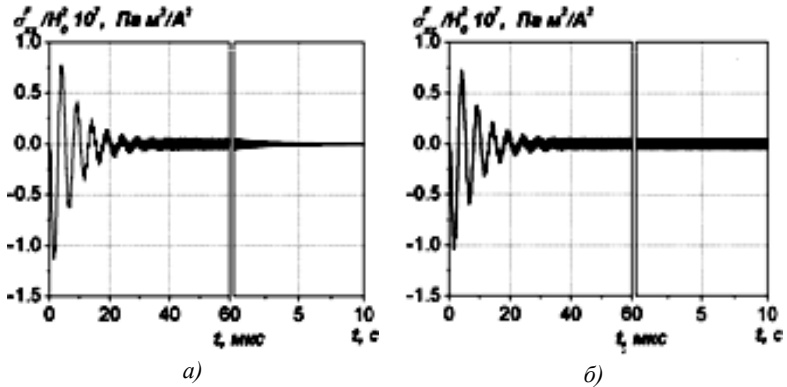


Рис. 4. Зміна в часі напружень  $\sigma_{xx}^F$  при  $n = 10$  (на серединній поверхні  $z = 0$ )

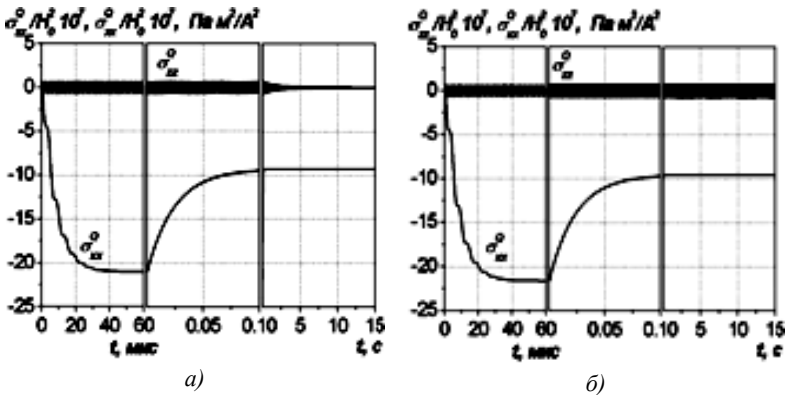


Рис. 5. Зміна в часі напружень  $\sigma_{zz}^Q$  і  $\sigma_{xx}^Q$  при  $n = 10$   
( $\sigma_{zz}^Q$  —  $z = 0$  і  $\sigma_{xx}^Q$  —  $z = h$ )

**Висновки.** Виявлено наступні нові закономірності у зміні теплових і механічних властивостей розглядуваного електропровідного шару за однорідної дії в РЗС:

- значення напружень і температури за частоти  $\omega$  поза околom резонансних частот електромагнітної дії в РЗС тривалістю  $t_i \leq 10^{-2}$  с за врахування термопружного розсіювання енергії практично не відрізняються від їх значень, знайдених без такого

- врахування (за врахування термопружного розсіювання енергії максимальні значення температури приблизно на  $1 \div 3\%$  більші);
- за неврахування термопружного розсіювання енергії за вибраної частоти режим власних коливань напружень  $\sigma_{ij}^T$  і  $\sigma_{ij}^F$  ( $i, j = z; x$ ) досягається при  $t \geq 0.3t_i$ ;
  - за врахування термопружного розсіювання енергії за вибраної частоти і розглядуваних тривалостях дії в РЗС напруження  $\sigma_{ij}^T$  і  $\sigma_{ij}^F$  згасають (практично до нуля) при  $t \leq 1,0 \cdot 10^5 t_i$ .

Таким чином, за дії в РЗС тривалістю  $t_i \leq 10^{-2} c$  вплив термопружного розсіювання енергії на максимальні значення напружень і температури є неістотний і проявляється лише в подальшому згасанні амплітуди коливань цих величин. Тому за час розглядуваних тривалостей дії в РЗС процеси нагрівання і деформування електропровідного шару мають адіабатичний характер.

### Список використаних джерел:

1. Батыгин Ю. В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю. В. Батыгин, В. И. Лавинский, Л. Т. Хименко. — Харьков : МОСТ — Торнадо, 2003. — 288 с.
2. Белый И. В. Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов / И. В. Белый, С. М. Фертик, Л. Г. Хименко. — Харьков : Вища школа, 1977. — 186 с.
3. Бурак Я. Й. Термопружність неферомагнітних електропровідних тіл за умов дії імпульсних електромагнітних полів / Я. Й. Бурак, О. Р. Гачкевич, Р. С. Мусій // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2006. — Вип. 49, № 1. — С. 75–84.
4. Гачкевич О. Р. Термомеханіка неферомагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди / О. Р. Гачкевич, Р. С. Мусій, Д. В. Тарлаковський. — Львів : СПОЛОМ, 2011. — 216 с.
5. Грибанов В. Ф. Связанные и динамические задачи термоупругости / В. Ф. Грибанов, Н. Г. Паничкин. — М. : Машиностроение, 1984. — 184 с.
6. Коваленко А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. — К. : Наук. думка, 1970. — 247 с.
7. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. — М. : Мир 1975. — 945 с.
8. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1976. — 312 с.
9. Сильные и сверхсильные магнитные поля и их применение / под ред. Ф. Херлаха. — М. : Мир, 1988. — 456 с.
10. Тамм И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. — М. : Наука, 1976. — 616 с.
11. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская. — К. : Наук. думка, 1977. — 248 с.

12. Hachkevych O. R. Thermoelastic state of a conducting plate under the action of an electromagnetic field in the form of damped sinusoid / O. R. Hachkevych, R. S. Musij, H. B. Stasiuk // Mat. Sci. — 2003. — Vol. 39, № 6. — P. 780–787.
13. Hachkevych O. R. Coupled problem of thermomechanics for an electric conducting layer under heterogeneous pulse electromagnetic action / / O. R. Hachkevych, R. S. Musij, H. B. Stasiuk // Mat. Sci. — 2009. — Vol. 45, № 4. — P. 532–541.

Connected initial-boundary value thermomechanical problem for electric conductive layer with a plane-parallel boundaries for homogeneous non-stationary electromagnetic action was formulated. Using cubic approximation for distributions of all key functions over the layer thickness the general solution of this problem was obtained. On this basis the solution of the problem in the fading sine wave regime was constructed and thermostressed state of the considered layer depending on the amplitude and frequency characteristics of this electromagnetic action was numerically analyzed.

**Key words:** *electric conductive layer, connected problem, thermostressed state, impulse electromagnetic field, fading sine wave regime.*

Отримано: 15.07.2016

УДК 519.6,539.3

**Н. І. Ободан**, д-р техн. наук, професор,

**В. Я. Адлуцький**, канд. фіз.-мат. наук,

**В. О. Громов**, канд. фіз.-мат. наук

Дніпропетровський національний університет  
імені Олеся Гончара, м. Дніпропетровськ

## **ПОБУДОВА РОЗГАЛУЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ КАРМАНА ЗА НЕОДНОРІДНИХ КРАЙОВИХ УМОВ**

Розглянуто задачу побудови біфуркаційної картини для рівнянь Кармана за неоднорідних крайових умов. Для розв'язання задачі використовувався нелінійний узагальнений метод Канторовича у поєднанні з методом продовження по параметру та алгоритмом аналізу особливих точок розв'язку.

**Ключові слова:** *біфуркація розв'язків нелінійних крайових задач, рівняння Кармана, неоднорідні крайові умови, нелінійний узагальнений метод Канторовича.*

**Вступ.** Практичне значення процесів та явищ, що описуються нелінійними крайовими задачами для рівнянь Кармана, поряд із великою кількістю можливих розв'язків, які спостерігаються у застосуваннях, обумовлюють інтерес до побудови біфуркаційної множини для зазначених рівнянь, визначених на різноманітних многовидах та доповнених різними типами крайових умов. При цьому параметри, що характеризують зовнішній вплив на процес, що розглядається,