А. А. Томусяк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. — № 6. — С. 145–167.
10. Томусяк А. А. Об одном методе построения функций распределения с ограничениями на интенсивность отказов / А. А. Томусяк // Прикладные задачи теории вероятностей. — К. : ИМАН УССР, 1982. — С. 102–106.

The article is devoted to building a mathematical model that describes the operation queuing system with two serving devices. The paper shows the communication between the probability that Markov process that describes the work of the relevant system will be in some time in a particular state and the probability of events that may take place for some time.

Key words: *queuing system, Markov chain, transition probabilities, exponent distribution.*

Отримано: 10.08.2016

УДК 519.85

О. О. Ємець*, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Т. М. Барболіна,** канд. фіз.-мат. наук

* Полтавський університет економіки і торгівлі, м. Полтава,
** Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка, м. Полтава

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕТЕРМІНОВАНИМИ І СТОХАСТИЧНИМИ ЗАДАЧАМИ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Проаналізовано постановки задач евклідової комбінаторної оптимізації, як в умовах визначеності, так і зі стохастичною невизначеністю. Побудовано моделі прикладних задач у вигляді задач евклідової комбінаторної оптимізації на розміщеннях: детермінованих задач з дробово-лінійною цільовою функцією як без додаткових (некомбінаторних) обмежень, так і з додатковими лінійними обмеженнями, а також стохастичних задач на розміщеннях.

Ключові слова: *комбінаторна оптимізація, стохастична оптимізація, моделювання.*

Вступ, постановка задачі. Моделювання цілого ряду важливих економічних, фізичних, соціальних та інших процесів може бути здійснене за допомогою апарату дискретної оптимізації (див., наприклад, [1–18]) і зокрема, евклідової комбінаторної оптимізації. Огляд багатьох математичних моделей прикладних задач евклідової комбінаторної оптимізації здійснено в монографії [5]: представлено задачі з різними типами цільових функцій та обмежень, задачі як з визначеними даними, так і з різними видами невизначеності.

Важливі класи задач евклідової комбінаторної оптимізації становлять задачі на розміщеннях та на перестановках. Останні можуть розглядатися як частинний випадок задач на розміщеннях, проте наявність специфічних властивостей зумовлює доцільність окремого вивчення такого класу задач.

Моделі практичних задач як задач на розміщеннях і перестановках було побудовано в [5; 6] та ін. Ряд досліджень присвячено моделюванню оптимізаційними задачами на полікомбінаторних множинах (див., наприклад, [7]), частинними випадками яких є множини розміщень і перестановок. Практичний інтерес також становлять задачі ігрового типу комбінаторних множинах [8; 9].

Невизначеність початкових даних, що має місце у багатьох практичних задачах, вимагає побудови відповідних моделей. Досить загальні постановки задач із різними видами невизначеності запропоновано в [10], задачі з інтервальною та нечіткою невизначеністю досліджувалися, зокрема, у [11, 12] та ін. Математичні моделі комбінаторних транспортних задач на перестановках зі стохастичними параметрами представлено [5, 13]. Низка робіт присвячена дослідженню математичних моделей задач упакування прямокутників, у тому числі з різними видами невизначеності [11–12, 14–15] та ін.

Незважаючи на значну кількістю публікацій, присвячених досліджуваній проблемі, актуальним залишається подальше дослідження можливості моделювання задачами евклідової комбінаторної оптимізації, зокрема, з урахуванням невизначеності вхідних даних.

Метою статті є побудова моделей деяких прикладних задач як задач евклідової комбінаторної оптимізації на розміщеннях та перестановках, у тому числі з імовірнісною невизначеністю.

Розглянемо необхідні поняття й означення евклідової комбінаторної оптимізації, спираючись переважно на [2]. Мультимножиною називають сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові. Будь-яку мультимножину $G=\left\{g_1,...,g_\eta\right\}$ можна задати її основою $S\left(G\right)$, тобто кортежем усіх її різних елементів, і кратністю — числом повторів кожного елемента основи. Евклідовою комбінаторною множиною називають множину, різними елементами якої є різні упорядковані k-вибірки з мультимножини вигляду $\left(g_{i_1},...,g_{i_k}\right)$, де $g_{i_j}\in G$, $i_j\neq i_t$ $\forall i_j,i_t\in J_\eta$, $\forall j,t\in J_k$ (тут і далі через J_n позначено множину n перших натуральних чисел). Множину всіх упорядкованих k-вибірок з мультимножини G називають загальною множиною розміщень $E_\eta^k(G)$; якщо $k=\eta$, то отримується загальна множина перестановок $E_k(G)$. Евклідові комбінаторні множини можуть бути занурені в евклідовий простір.

Евклідова задача комбінаторної оптимізації може бути записана як задача пошуку пари $\left\langle F\left(x^*\right), x^*\right\rangle$ такої, що

$$F\left(x^*\right) = \max_{x \in S} F\left(x\right);\ x^* = \arg\max_{x \in S} F\left(x\right), \tag{1}$$

$$(x_1, ..., x_k) \in E(G), \tag{2}$$

де $E(G)$ — евклідова комбінаторна множина, елементами якої є упорядковані k-вибірки з мультимножини G, $F(x)$ — функція $n \geq k$ змінних, визначена на множині $S \subset R^n$. Евклідові задачі комбінаторної оптимізації класифікують залежно від вигляду цільової функції та/або додаткових (некомбінаторних) обмежень, що визначають множину S (лінійні, дробово-лінійні, нелінійні тощо), залежно від типу комбінаторної множини (задачі на розміщеннях, перестановках тощо) та за іншими основами.

У випадку, коли має місце невизначеність вхідних даних, зокрема, стохастична, виникає питання про те, що вважати допустимим розв'язком і як саме визначати кращий розв'язок. Деякі підходи до формулювання стохастичних задач евклідової комбінаторної оптимізації розглянуто в [16, 17]. Згідно з цими підходами задача стохастичної оптимізації на евклідовій комбінаторній множині може бути записана у вигляді (1), (2), де S — деяка скінченна множина n-вимірних випадкових величин, елементи мультимножини G є елементами деякої множини Ω випадкових величин, причому:

1) Ω — скінченна множина дискретних випадкових величин, серед можливих значень кожної з яких є найменше; мінімум (максимум) визначається на основі лінійного упорядкування елементів множини Ω;

або

2) Ω — скінченна множина випадкових величин; мінімум (максимум) визначається на основі лінійного порядкування елементів фактор-множини $\Omega/\simeq$, де еквівалентність $\simeq$ визначається рівністю певних числових характеристик випадкових величин; для випадкової величини $F(x_1, ..., x_k)$ відомий закон розподілу або принаймні відповідні числові характеристики.

Розглянемо приклади побудови моделей прикладних задач як задач детермінованих та стохастичних задач вигляду (1), (2), де $E(G)$ є загальною множиною розміщень, зокрема, перестановок.

Задачі з дробово-лінійною функцією цілі без додаткових обмежень. Побудуємо спочатку математичну модель такої задачі максимізації рентабельності розподілу транспортних засобів між маршрутами. Нехай фірма з організації перевезень має парк з η транспортних засобів різної вантажопідйомності і $k \le \eta$ маршрутів перевезення. Для кожного маршруту відомі витрати d_j на перевезення одиниці товару і відповідний прибуток c_j; нехай також c_0 — прибуток, а d_0 — витрати, незалежні від розподілу транспортних засобів за маршрутами. Необхідно так розподілити транспортні засоби за маршрутами, щоб максимізувати рентабельність.

Для формалізації обмеження на наявні транспортні засоби позначимо G — мультимножину значень вантажопідйомності транспортних засобів, тоді кожному розподілу машин за маршрутами взаємно однозначно відповідає вектор, що є елементом загальної множини розміщень: $x = \left(x_1,...,x_k\right) \in E_\eta^k\left(G\right)$. Отже, задача полягає у максимізації на множині $E_\eta^k\left(G\right)$ функції $F\left(x\right) = \dfrac{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{k} d_j x_j + d_0}$, тобто у знаходженні пари $\left\langle F\left(x^*\right), x^*\right\rangle$, яка задовольняє (1), (2) де $S = R^k$, $E(G) = E_\eta^k(G)$ — загальна множина розміщень з елементів мультимножини G.

Розглянемо ще одну задачу, математична модель якої може бути побудована у вигляді задачі евклідової комбінаторної оптимізації з дробово-лінійною цільовою функцією — задачу максимізації рентабельності доставки товару. На складі фірми знаходяться партії однорідного товару обсягом $g_1,...,g_k$ одиниць. Фірма має k філій, які реалізують зазначений товар. Відомі очікуваний прибуток c_j від реалізації одиниці товару j-ою філією та витрати d_j на доставку одиниці товару до j-ої філії. Необхідно розподілити товар між філіями з метою максимізації рентабельності таким чином, щоб кожна філія одержала одну партію товару.

Нехай $G = \{g_1,...,g_k\}$ — мультимножина обсягів партій товарів. Оскільки кожна філія повинна одержати одну партію товару, то довільний допустимий розв'язок задачі є перестановкою елементів мультимножини G. Нехай x_j — обсяг партії товару, що доставляється j-ій філії. Тоді математична модель набуває вигляду: знайти за умови (2) пару (1), де $F(x) = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k} c_j x_j}{\sum\limits_{j=1}^{k} d_j x_j}$, $S = R^k$, $E(G) = E_k(G)$ — загальна множина перестановок з елементів мультимножини G.

Для розв’язування сформульованих задач можуть використовуватися аналітичний метод, обґрунтований в [18], або поліноміальний метод, в основі якого лежить зведення розв’язування задачі з дробово-лінійною функцією до розв’язування послідовності лінійних комбінаторних задач на розміщеннях чи перестановках відповідно.

Задачі з дробово-лінійною функцією цілі та додатковими лінійними обмеженнями. Як приклад моделі розглянемо комбінаторну задачу максимізації рентабельності перевезень у такій постановці. Фірма закуповує товар на l підприємствах і доставляє його в m магазинів для продажу. Для кожного підприємства відомий обсяг V_i' ($i \in J_l$) продукції, що виробляється, та вартість a_i одиниці продукції. Також відомі величини V_j'' мінімального обсягу закупівлі та b_j прибутку від продажу одиниці продукції для j-го магазину ($j \in J_m$). Вартість перевезення одиниці товару з i-го підприємства до j-го магазину складає c_{ij} грошових одиниць. Для перевезення товару фірма має η транспортних засобів, з них η_i транспортних засобів мають вантажопідйомність e_i ($i \in J_{\nu-1}$). Необхідно максимізувати рентабельність фірми, розподіливши на кожний маршрут між підприємством-виробником та магазином не більше одного транспортного засобу, причому забороняється недовантаженість транспортних засобів.

Для побудови математичної моделі позначимо $k = lm$ — загальна кількість маршрутів, x_{ij} — обсяг товару, що перевозиться з i-го підприємства до j-го магазину. Для формалізації обмеження на наявні транспортні засоби розглянемо мультимножину G з основою $S(G) = (0, e_1, e_2, ..., e_n)$ та первинною специфікацією (кортежем кратностей елементів основи в G) $[G] = (k, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_{\nu-1})$. Тоді допустимий розв’язок є елементом загальної множини розміщень $E_\eta^k(G)$.

Отже, математична модель задачі набуває вигляду: знайти за комбінаторної умови $(x_{11}, ..., x_{1m}, ..., x_{lm}) \in E_\eta^k(G)$ пару (1), де

$P(x)=\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{m}\left(b_j\sum\limits_{i=1}^{l}x_{ij}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{l}\left(a_i\sum\limits_{j=1}^{m}x_{ij}\right)+\sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}}$, множина S визначається додатковими лінійними обмеженнями:

- на обсяги виробництва підприємств

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le V_i', \ i \in J_l, \qquad (3)$$

- на мінімальні закупівельні партії магазинів

$$\sum_{i=1}^{l} x_{ij} \ge V_j'', \ j \in J_m. \qquad (4)$$

Сформульована задача є дробово-лінійною задачею комбінаторної оптимізації на розміщеннях. Для її розв'язування може використовуватися метод побудови лексикографічної еквівалентності, представлений у [3].

Задачі стохастичної комбінаторної оптимізації. У приймальній директора знаходиться k відвідувачів. Очікуваний час прийому i-го відвідувача дорівнює g_i. Необхідно встановити порядок приймання відвідувачів, щоб сумарний час очікування прийому був мінімальним. Формулювання такої задачі (задачі директора) для випадку, коли відсутня невизначеність вхідних даних, запропоновано в [19].

Якщо у визначенні часу прийому відвідувача має місце імовірнісна невизначеність, то виникає питання про формування критерію оптимальності. Пропонуємо при побудові математичної моделі стохастичної задачі директора використовувати один із розглянутих вище підходів до постановок оптимізаційних задач зі стохастичними параметрами.

Нехай G_i є незалежними випадковими величинами (випадкові величини далі позначатимемо великими літерами). Дві випадкові величини A, B називатимемо упорядкованими у неспадному порядку $\preceq$ (і позначати цей факт $A \preceq B$) тоді і лише тоді, коли $H(A) \le_l H(B)$. Тут $H(A)=(h_1(A),...,h_s(A))$ — характеристичний вектор випадкової величини A, де $h_i(A)$, $i \in J_s$; $<l$ позначає лексикографічне упорядкування в s-вимірному евклідовому просторі.

Нехай X_j — час прийому відвідувача, який буде прийнятий j-м у черзі. Тоді вектор $X=(X_1,...,X_n)$ є елементом множини перестановок з мультимножини $\Gamma=\left\{G_1,...,G_k\right\}$: $X\in E_k\left(\Gamma\right)$. Оскільки сумарний час очікування дорівнює $L\left(X\right)=\sum_{j=1}^{k}\left(k-j\right)X_j$, то задача полягає у мінімізації функції $L\left(X\right)$ на множині $E_k\left(\Gamma\right)$.

У такому випадку математична модель задачі директора, у якій час прийому відвідувача є незалежними випадковими величинами, може бути записана так: знайти пару $\left\langle L\left(X^*\right),X^*\right\rangle$ таку, що

$$L\left(X^*\right)=\min_{X\in E_k\left(\Gamma\right)}\sum_{j=1}^{k}\left(k-j\right)X_j\ ,\ X^*=\operatorname*{argmin}_{X\in E_k\left(\Gamma\right)}\sum_{j=1}^{k}\left(k-j\right)X_j\ , \qquad (7)$$

де $X=\left(X_1,...,X_k\right)$, $E_k\left(\Gamma\right)$ — загальна множина перестановок з мультимножини $\Gamma=\left\{G_1,...G_k\right\}$.

Розглянемо ще одну задачу комбінаторної стохастичної оптимізації — стохастичну задачу вибору портфеля інвестиційних проектів з метою максимізації прибутку. Протягом інвестиційного періоду передбачається надходження пакетів вільного капіталу визначених вартостей (не обов'язково різних). Кожний пакет вільного капіталу може бути або повністю витрачений на придбання акцій одного з k підприємств, або направлений на задоволення інших потреб інвестора. Згідно з політикою інвестора, якщо акції деякого підприємства купуються протягом періоду, то на їх придбання витрачається тільки один пакет вільного капіталу. У [6] побудовано моделі сформульованої задачі для випадку, коли очікуваний прибуток на одну грошову одиницю вкладень в акції певного підприємства визначається як середній прибуток на одиницю вкладень протягом кількох останніх інвестиційних періодів. У той же час розглянуті моделі не враховують можливу невизначеність вхідних даних. Розглянемо детальніше побудову моделі задачі максимізації прибутку у випадку, коли обсяг пакетів вільного капіталу, що надходять, є випадковими величинами.

Нехай протягом інвестиційного періоду передбачається надходження пакетів вільного капіталу вартостями $R_1,R_2,...,R_\nu$ грошових одиниць, де R_j $\forall j\in J_\nu$ — незалежні випадкові величини. Нехай надходить η_j пакетів вартістю e_j грошових одиниць ($\eta_1+\eta_2+...+\eta_n=\eta$). Тоді акції кожного з k підприємств можуть купуватися пакетами заздалегідь визначених вартостей, причому купується не більше η_j пакетів вартістю R_j.

Нехай також інвестиційною політикою накладаються обмеження на мінімальні υ_i ($i \in J_l$) та максимальні υ'_i ($i \in J_l$) обсяги вкладень певного характеру (наприклад, кошти, що направляються на інвестування або повинні триматися у високоліквідній формі тощо). Якщо мінімальні (максимальні) обсяги за i-м параметром не встановлюються, то покладаємо $\upsilon_i = 0$ (υ'_i рівним достатньо великому числу). Необхідно максимізувати очікуваний прибуток, якщо середній прибуток c_j за останні τ інвестиційних періодів на одну грошову одиницю вкладень від акцій j-го виду складає

$$c_j = \frac{1}{\tau}\sum_{t=1}^{\tau} P\left(j,t\right),\ \forall j \in J_k, \tag{8}$$

де $P\left(j,t\right)$ — загальний прибуток у періоді t на одну грошову одиницю вкладень у j-й вид акцій.

Для побудови математичної моделі позначимо X_j — вартість придбаних акцій j-го підприємства ($j \in J_k$). Тоді загальний очікуваний прибуток становить $L(X) = \sum_{j=1}^{k} c_j X_j$ грошових одиниць, де величини c_j визначаються згідно з (8). Позначимо також $a_{ij} = 1$, якщо акції j-го підприємства відповідають i-й характеристиці, і $a_{ij} = 0$ в іншому разі. Для моделювання обмеження на мінімальні та максимальні обсяги вкладень певного характеру введемо порядок $\preceq$ одним з описаних вище способів. Тоді для всіх допустимих розподілів інвестицій повинна виконуватися умова

$$\upsilon_i \preceq \sum_{j=1}^{k} a_{ij} X_j \preceq \upsilon'_i \quad \forall i \in J_l. \tag{9}$$

Надходження вільного капіталу протягом інвестиційного періоду адекватно описується за допомогою мультимножини Γ з основою $S\left(\Gamma\right) = \left(R_1, R_2, ..., R_n\right)$ та первинною специфікацією $\left[\Gamma\right] = \left(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n\right)$. Кожному розподілу пакетів вільного капіталу між акціями підприємств взаємно однозначно відповідає вектор $X = (X_1, ..., X_k) \in E_\eta^k(\Gamma)$, де $E_\eta^k(\Gamma)$ — загальна множина розміщень з елементів мультимножини Γ. Отже, математична модель задачі набуває вигляду: знайти за умови (9) пару $\left\langle L\left(X^*\right), X^*\right\rangle$ таку, що

$$L\left(X^*\right) = \max_{X \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^{k} c_j X_j, \quad X^* = \arg\max_{X \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^{k} c_j X_j ,$$

де величини c_j визначаються згідно з (8).

Практично значимою також є задача, у якій обсяги вільного капіталу є детермінованими величинами, тоді як очікуваний прибуток від акцій певного підприємства характеризується не середнім значенням за кілька останніх інвестиційних періодів, а є випадковою величиною. У цьому випадку приходимо до моделі: знайти за умови

$$\upsilon_i \le \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le \upsilon_i' \quad \forall i \in J_l$$

пару $\left\langle L\left(x^*\right), x^* \right\rangle$ таку, що

$$L\left(x^*\right) = \max_{x \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^{k} C_j x_j, \quad x^* = \arg\max_{x \in E_\eta^k(\Gamma)} \sum_{j=1}^{k} C_j x_j$$

(тут вектор x і мультимножина Γ мають той самий сенс, що і вище, але компоненти вектора й елементи мультимножини є не випадковими, а детермінованими величинами, а C_j — випадковими величинами).

Висновки. У статті побудовано ряд математичних моделей прикладних задач як оптимізаційних задач на комбінаторних множинах розміщень та перестановок. Розглядають задачі з різними цільовими функціями (лінійними та дробово-лінійними), задачі без додаткових (некомбінаторних) обмежень та з лінійними обмеженнями, як детерміновані, так і стохастичні. Урахування комбінаторного характеру обмежень та імовірнісної невизначеності вхідних даних дозволяє будувати більш точні моделі. Як напрямок подальших досліджень можна відзначити дослідження побудованих моделей та розробку алгоритмів розв'язування сформульованих задач.

Список використаних джерел:

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. — К. : Наук. думка, 1981. —288 с.
2. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації [Електронний ресурс] / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. — К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. — 188 с. — Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/-handle/123456789/487.
3. Емец О. А. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными ограничениями / О. А. Емец, Т. Н. Барболина, О. А. Черненко // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 5. — С. 79–85.

4. Емец О. А. Отсечения в линейных частично комбинаторных задачах оптимизации на перестановках / О. А. Емец, Е. М. Емец // Экономика и матем. методы. — 2001. — Т. 37, № 1. — С. 118–121.
5. Ємець О. О. Моделі евклідової комбінаторної оптимізації [Електронний ресурс] / О. О. Ємець, О. О. Черненко. — Полтава : ПУЕТ, 2011. — 204 с. — Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/354.
6. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях [Електронний ресурс] / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. — К. : Наукова думка, 2008. — 159 с. — Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/473.
7. Емец О. А. Оптимизация на полиперестановках [Электронный ресурс] / О. А. Емец, Н. Г. Романова. — К. : Наук. думка, 2010. — 105 с. — Режим доступа: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/468.
8. Емец О. А. Исследование математических моделей и методов решения задач на переставновках игрового типа / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 6. — С. 103–114.
9. Ємець О. О. Розв'язування ігрових задач на перестановках / О. О. Ємець, Н. Ю. Устьян // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2007. — № 3. — С. 47–52.
10. Емец О. А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности / О. А. Емец, А. А. Роскладка // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 5. — С. 35–44.
11. Сергиенко И. В. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ / И. В. Сергиенко, О. А. Емец, А. О. Емец // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 5. — С. 38–50.
12. Ємець О. О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. — Полтава : ПУЕТ, 2011. — 239 с.
13. Ємець О. О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв'язування, узагальнення / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. — Полтава : ПУЕТ, 2011. —174 с.
14. Стоян Ю. Г. Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных / Ю. Г. Стоян, Т. Е. Романова, Л. Г. Евсеева // Доповіді НАН України. — 1997. — № 7. — С. 56–60.
15. Емец О. А. О задачах оптимизации взаимного расположения прямоугольников в условиях стохастической, интервальной или нечеткой неопределенности / О. А. Емец, Т. Н. Барболина // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. — 2015. — Вип. 12. — С. 83–100.
16. Емец О. А. Об оптимизационных задачах с вероятностной неопределенностью / О. А. Емец, Т. Н. Барболина // Доповіді Національної академії наук України. — 2014. — № 11. — С. 40–45.
17. Емец О. А. О свойствах линейной безусловной задачи комбинаторной оптимизации на размещениях с вероятностной неопределенностью / О. А. Емец, Т. Н. Барболина // Кибернетика и системный анализ. — 2016. — № 2. — С. 127–139.
18. Емец О. А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях [Электронный ресурс] / О. А. Емец, О. А. Черненко. — К. : Наукова думка, 2011. — 154 с. — Режим доступа: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/467.

19. Шкурба В. В. Задача трех станков / В. В. Шкурба. — М. : Наука, 1976. — 96 с.

Authors have analysed statements of problems of Eucledian combinatorial optimization both under certainty, and under stochastic uncertainty. Models of applied tasks as problems of Eucledian combinatorial optimization on arrangements are constructed. They use deterministic problems with linear fractional objective function both unconditional, and under linear constraints. Also stochastic problems on arrangements are constructed.

Key words: *combinatorial optimization, stochastic optimization modeling.*

Отримано: 22.09.2016

УДК [519.245+519.214]:519.237.8

М. А. Іванчук*, асистент,
А. М. Калинюк,** канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Малик*,** канд. фіз.-мат. наук

*Буковинський державний медичний університет, м. Чернівці,
**Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам’янець-Подільський,
***Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, м. Чернівці

ВЛАСТИВОСТІ ОБЛАСТІ ПОДІЛУ ДЛЯ ВІДОКРЕМЛЮВАНИХ ε-СІТОК ДВОХ МНОЖИН

У статті досліджується питання роздільності множин в евклідовому просторі. В роботі введено поняття ε-роздільності, множини поділу. Доведено основні властивості для множин поділу, в тому числі, зіркова опуклість. Розглянуто основні властивості межі множини поділу, наведено асимптотичні властивості точки границі.

Ключові слова: *ε-сітки, задача класифікації, область поділу.*

Вступ. Нехай з генеральних сукупностей, що генеруються незалежними випадковими величинами ξ та η, отримані вибірки A та B об’ємами n_A, n_B. Задача полягає в знаходженні відокремлюючої гіперплощини L, для якої справедливе співвідношення

$$P\left\{\xi \in L^{+}, \eta \in L^{-}\right\} = \sup_{l \in H^{d}} P\left\{\xi \in l^{+}, \eta \in l^{-}\right\},$$

де L_n — гіперплощина, що ділить множини $\xi_n = A, \eta_n = B$. Використаємо теорію ε-сіток для розв’язання даної задачі класифікації [1].

