УДК 519.872

І. О. Дьогтєва, асистент

Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

СИСТЕМА МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ДВОМА ОБСЛУГОВУЮЧИМИ ПРИЛАДАМИ

Стаття присвячена побудові математичної моделі, що описує функціонування системи масового обслуговування з двома обслуговуючими приладами. В роботі показано встановлення зв'язку між ймовірностями того, що марковський процес, який описує функціонування відповідної системи, в деякий момент часу перебуватиме в певному стані та ймовірністю подій, які можуть відбутись протягом деякого часу.

Ключові слова: *система масового обслуговування, ланцюг Маркова, перехідні ймовірності, показниковий розподіл.*

Вступ. Будь-яка система масового обслуговування, як правило, включає такі основні складові: вхідний потік вимог, засоби обслуговування, бункер (чергу) для вимог, що надійшли, коли система зайнята, і вихідний потік. Досить часто апріорна інформація відносно моментів надходження вимог і тривалості їх обслуговування відсутня. А тому, щоб провести аналіз поведінки системи масового обслуговування, приймається, що як час надходження вимоги так і час обслуговування є випадкові величини, закони розподілу яких визначаються за статистичними даними, накопиченими при аналізі подібних ситуацій. Зрозуміло, що в теоретичних дослідженнях основні закони розподілу вважаються заданими.

Такого типу задачі можуть бути розв'язані методами теорії ймовірностей, а точніше через випадкові процеси, які описують функціонування системи масового обслуговування, тому теорію систем масового обслуговування природно розглядати як розділ теорії випадкових процесів, пристосованих до розв'язування задач певного типу.

У 70–90 роки минулого століття моделі систем масового обслуговування стали розглядатись в рамках теорії випадкових процесів [3–4], зокрема всі моделі, у яких основними були показникові розподіли, стало можливим розглядати як марковські процеси.

Наступним етапом була відмова від експоненціального закону часу перебування у певних станах, що дало можливість побудувати не тільки теорію, яка як частинний випадок включає в себе теорію марковських ланцюгів, але й значно розширює класи прикладних задач [1; 2; 6–8].

Метою статті є побудова та опис функціонування системи масового обслуговування з двома обслуговуючими приладами та встановлення зв'язку між ймовірностями того, що марковський процес, який описує функціонування відповідної системи, в деякий момент часу перебуватиме в певному стані та ймовірністю подій, які можуть відбутись протягом деякого часу.

Постановка задачі. Математичну модель, що описує функціонування системи масового обслуговування з двома обслуговуючими приладами, будемо будувати за умови: вхідний потік — пуассонівський з параметром λ; час між послідовними надходженнями вимог є випадкова величина ξ, яка має показниковий розподіл з параметром λ; час обслуговування кожним приладом є випадкова величина η, яка має показниковий розподіл з параметром μ. Час надходження вимоги та час обслуговування є незалежні випадкові величини.

Будемо вважати, що система може перебувати в трьох станах $\{e_0, e_1, e_2\}$: e_0 — система вільна, час перебування у цьому стані ξ; e_1 — зайнято один обслуговуючий прилад, час перебування у цьому стані $\min(\xi, \zeta)$; e_2 — зайнято два обслуговуючих прилади, час перебування у цьому стані $\min(\xi, \zeta_1, \zeta_2)$, де ζ_1, ζ_2 — незалежні показникові розподілені випадкові величини з параметром μ.

У стані e_0 (система вільна) система перебуває час ξ, поки не надійде вимога, із ймовірністю 1 переходить у стан e_1. В стані e_1 (обслуговується одна вимога) система перебуває час $\min(\xi, \zeta)$ із законом розподілу

$$P\left(\min(\xi, \zeta) < t\right) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}$$

і з ймовірністю

$$P(\xi > \zeta) = \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu t} e^{-\lambda t} dt = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

повертається у стан e_0, а з ймовірністю

$$P(\xi < \zeta) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \lambda e^{-\mu t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

переходить у стан e_2. У стані e_2 (обслуговується дві вимоги) система перебуває час $\min(\xi, \zeta_1, \zeta_2)$ із законом розподілу

$$P\left(\min(\xi, \zeta_1, \zeta_2) < t\right) = 1 - e^{-(\lambda+2\mu)t}$$

і з ймовірністю

$$P\left(\xi > \min\left(\zeta_1, \zeta_2\right)\right) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} 2\mu e^{-2\mu t} dt = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}$$

повертається у стан e_1, а з ймовірністю

$$P\left(\xi < \min\left(\zeta_1, \zeta_2\right)\right) = \int_0^{+\infty} e^{-2\mu t} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$$

залишається у стані e_2.

Таким чином, функціонування системи описує марковский процес $\xi(t)$ із скінченною множиною станів $\{e_0, e_1, e_2\}$, у кожному з яких він перебуває час ξ, $\min(\xi, \zeta)$, $\min(\xi, \zeta_1, \zeta_2)$ відповідно, а переходи здійснюються згідно з такою стохастою матрицею

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\mu}{\lambda + \mu} & 0 & \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu} \\ 0 & \dfrac{2\mu}{\lambda + 2\mu} & \dfrac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$P_k(t) = P\left(\xi(t) = e_k \middle| \xi(0) = e_0\right),$$

де $k = 0,1,2,$ ймовірність того, що процес $\xi(t)$ в момент часу t перебуває у стані e_k за умови, що на початку він перебував у стані e_0 (на початку функціонування система була вільна). Встановимо зв'язок між ймовірностями $P_k(t + \Delta t)$ і ймовірностями подій, які можуть відбутися протягом часу Δt.

Процес $\xi(t)$ в момент часу $t + \Delta t$ перебуває у стані e_0, коли в момент часу t він перебував у стані e_0 і за час Δt не надійшла жодна вимога $(\xi > \Delta t)$, або коли в момент часу t він перебував у стані e_1 і за час Δt закінчилося обслуговування $(\zeta < \Delta t)$ і не надійшла жодна вимога $(\xi > \Delta t)$. Всі інші варіанти мають ймовірність порядку $o(\Delta t)$.

Процес $\xi(t)$ в момент часу $t + \Delta t$ перебуває у стані e_1, коли в момент часу t він перебуває у стані e_0 і за час Δt надійде вимога $(\xi < \Delta t)$, або коли в момент часу t він перебуває в стані e_1 і за час Δt

не надійде жодна вимога $\left(\xi > \Delta t\right)$ і не закінчилося обслуговування $\left(\zeta > \Delta t\right)$, або коли в момент часу t він перебуває в стані e_2 і за час Δt закінчилось обслуговування $\left(\min\left(\zeta_1, \zeta_2\right) < \Delta t\right)$ і за час Δt не надійшла жодна вимога. Всі інші варіанти мають ймовірності порядку $o\left(\Delta t\right)$.

Процес $\xi\left(t\right)$ в момент часу $t + \Delta t$ перебуває у стані перебуває у стані e_2, коли в момент часу t він перебуває в стані e_1 і за час Δt надійшла вимога $\left(\xi < \Delta t\right)$ і обслуговування не завершилось $\left(\zeta > \Delta t\right)$, або коли в момент часу t він перебуває в стані e_2 і за час Δt обслуговування жодним приладом не завершилось $\left(\min\left(\zeta_1, \zeta_2\right) > \Delta t\right)$ і за час Δt не надійшла жодна вимога $\left(\xi > \Delta t\right)$, або коли в момент часу t він перебуває в стані e_2 за час Δt обслуговування не завершилось $\left(\min\left(\zeta_1, \zeta_2\right) > \Delta t\right)$ і за час Δt надійшла одна вимога $\left(\xi < \Delta t\right)$. Всі інші варіанти мають ймовірність порядку $o\left(\Delta t\right)$.

Тоді за формулою повної ймовірності маємо:

$$P_0\left(t + \Delta t\right) = P_0\left(t\right)P\left(\xi > \Delta t\right) + P_1\left(t\right)P\left(\xi > \Delta t\right)P\left(\zeta < \Delta t\right) + o\left(\Delta t\right),$$

$$P_1\left(t + \Delta t\right) = P_0\left(t\right)P\left(\xi < \Delta t\right) + P_1\left(t\right)P\left(\xi > \Delta t\right)P\left(\zeta > \Delta t\right) +$$

$$+P_2\left(t\right)P\left(\min\left(\zeta_1, \zeta_2\right) < \Delta t\right) + o\left(\Delta t\right),$$

$$P_2\left(t + \Delta t\right) = P_1\left(t\right)P\left(\xi < \Delta t\right)P\left(\zeta > \Delta t\right) +$$

$$+P_2\left(t\right)P\left(\xi > \Delta t\right)P\left(\min\left(\zeta_1, \zeta_2\right) > \Delta t\right) + P_2\left(t\right)P\left(\min\left(\zeta_1, \zeta_2\right) > \Delta t\right) + o\left(\Delta t\right).$$

Урахувавши, що

$$P\left(\xi < \Delta t\right) = \lambda \Delta t + o\left(\Delta t\right),$$

$$P\left(\xi > \Delta t\right) = 1 - \lambda \Delta t + o\left(\Delta t\right),$$

$$P\left(\zeta < \Delta t\right) = \mu \Delta t + o\left(\Delta t\right),$$

$$P\left(\zeta > \Delta t\right) = 1 - \mu \Delta t + o\left(\Delta t\right),$$

$$P\left(\min\left(\zeta_1, \zeta_2\right) < \Delta t\right) = 2\mu \Delta t + o\left(\Delta t\right),$$

$$P\left(\min\left(\zeta_1, \zeta_2\right) > \Delta t\right) = 1 - 2\mu \Delta t + o\left(\Delta t\right),$$

попередні рівності наберуть вигляду

$$P_0\left(t + \Delta t\right) = P_0\left(t\right)\left(1 - \lambda \Delta t\right) + P_1\left(t\right)\left(1 - \lambda \Delta t\right)\mu \Delta t + o\left(\Delta t\right),$$

$$P_1\left(t + \Delta t\right) = P_0\left(t\right)\lambda \Delta t + P_1\left(t\right)\left(1 - \lambda \Delta t\right)\left(1 - \mu \Delta t\right) + P_2\left(t\right)2\mu \Delta t\left(1 - \lambda \Delta t\right) + o\left(\Delta t\right),$$

$$P_2(t+\Delta t)=P_1(t)\lambda\Delta t(1-\mu\Delta t)+P_2(t)(1-\lambda\Delta t)(1-2\mu\Delta t)+$$
$$+P_2(t)(1-2\mu\Delta t)\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

або

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$
$$\frac{P_1(t+\Delta t)-P_1(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0(t)-(\lambda+\mu)P_1(t)+2\mu P_2(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$
$$\frac{P_2(t+\Delta t)-P_2(t)}{\Delta t}=-\lambda P_1(t)-(\lambda+2\mu)P_2(t)+\lambda P_2(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Перейшовши до границі при $\Delta t\to 0$, дістанемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} P_0'(t)=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t), \\ P_1'(t)=\lambda P_0(t)-(\lambda+\mu)P_1(t)+2\mu P_2(t), \\ P_2'(t)=\lambda P_1(t)-2\mu P_2(t). \end{cases} \tag{1}$$

Нас цікавить розв'язок цієї системи, який задовольняє початкову умову

$$P_0(t)=1,\ P_1(t)=P_2(t)=0.$$

Якщо до системи (1) застосувати перетворення Лапласа і врахувати, що $P_0(t)\mapsto P_0(s)$, $P_1(t)\mapsto P_1(s)$, $P_2(t)\mapsto P_2(s)$, $P_0'(t)\mapsto sP_0(s)-1$, $P_1'(t)\mapsto sP_1(s)$, $P_2'(t)\mapsto sP_2(s)$, то від цієї системи переходимо до системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} sP_0(s)-1=-\lambda P_0(s)+\mu P_1(s), \\ sP_1(s)=\lambda P_0(s)-(\lambda+\mu)P_1(s)+2\mu P_2(s), \\ sP_2(s)=\lambda P_1(s)-2\mu P_2(s). \end{cases} \tag{2}$$

Розв'язок цієї системи подається у вигляді

$$\begin{cases} P_0(s)=\dfrac{s^2+(\lambda+3\mu)s+2\mu^2}{s^3+(2\lambda+3\mu)s^2+\left(\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2\right)s}, \\ P_1(s)=\dfrac{\lambda(s+2\mu)}{s^3+(2\lambda+3\mu)s^2+\left(\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2\right)s}, \\ P_2(s)=\dfrac{\lambda^2}{s^3+(2\lambda+3\mu)s^2+\left(\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2\right)s}. \end{cases} \tag{3}$$

Для контролю

$$P_0(s)+P_1(s)+P_2(s)=\frac{1}{s}.$$

Якщо $f(t)\mapsto F(s)$, то

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s).$$

Тоді в кожному випадку можна вже знайти стаціонарний розподіл, тобто долю часу, яку процес проводить у кожному стані на нескінченно великому проміжку часу.

$$\pi_0 := \lim_{t\to+\infty} P_0(t)=\lim_{s\to 0} sP_0(s)=\frac{2\mu^2}{\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2},$$

$$\pi_1 := \lim_{t\to+\infty} P_1(t)=\lim_{s\to 0} sP_1(s)=\frac{2\lambda\mu}{\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2},$$

$$\pi_2 := \lim_{t\to+\infty} P_2(t)=\lim_{s\to 0} sP_2(s)=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2}.$$

Основний результат. Врахувавши, що коли $F(s)$ є образом функції $f(s)$, а $F(s)$ є правильний раціональний дріб $\frac{P(s)}{Q(s)}$, знаменник якого $Q(s)$ має прості корені $s_1, s_2, ..., s_n$, то

$$f(t)=\sum_{s_k}\frac{P(s_k)}{Q'(s_k)}e^{s_k t}. \tag{4}$$

Застосуємо формулу (4) до (3). Многочлен

$$Q(s)=s^3+(2\lambda+3\mu)s^2+\left(\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2\right)s \tag{5}$$

має прості корені

$$s_0=0,\ s_1=\frac{1}{2}\left(-2\lambda-3\mu+\sqrt{4\lambda\mu+\mu^2}\right),\ s_2=\frac{1}{2}\left(-2\lambda-3\mu-\sqrt{4\lambda\mu+\mu^2}\right).$$

Його похідна

$$Q'(s)=3s^2+2(2\lambda+3\mu)s+\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2=$$

$$=2\left(s^2+(2\lambda+3\mu)s\right)+\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2+s^2-\lambda^2-2\lambda\mu-2\mu^2,$$

у точці $s_0=0$ $Q'(s_0)=\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2$,

у точці $s_1=\frac{1}{2}\left(-2\lambda-3\mu+\sqrt{4\lambda\mu+\mu^2}\right)$ $Q'(s_1)=s_1^2-\lambda^2-2\lambda\mu-2\mu^2$,

у точці $s_2=\frac{1}{2}\left(-2\lambda-3\mu-\sqrt{4\lambda\mu+\mu^2}\right)$ $Q'(s_2)=s_2^2-\lambda^2-2\lambda\mu-2\mu^2$.

Таким чином, маємо

$$P_0(t)=\frac{2\mu^2}{\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2}+\frac{s_1^2+(\lambda+3\mu)s_1+2\mu^2}{s_1^2-\lambda^2-2\lambda\mu-2\mu^2}e^{s_1t}+$$
$$+\frac{s_2+(\lambda+3\mu)s_2+2\mu^2}{s_2^2-\lambda^2-2\lambda\mu-2\mu^2}e^{s_2t}, \tag{6}$$

$$P_1(t)=\frac{2\lambda\mu}{\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2}+\frac{\lambda s_1+2\lambda\mu}{s_1^2-\lambda^2-2\lambda\mu-2\mu^2}e^{s_1t}+$$
$$+\frac{\lambda s_2+2\lambda\mu}{s_2^2-\lambda^2-2\lambda\mu-2\mu^2}e^{s_2t}, \tag{7}$$

$$P_2(t)=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2}+\frac{\lambda^2}{s_1^2-\lambda^2-2\lambda\mu-2\mu^2}e^{s_1t}+$$
$$+\frac{\lambda^2}{s_2^2-\lambda^2-2\lambda\mu-2\mu^2}e^{s_2t}. \tag{8}$$

Очевидно, що $P_0(t)+P_1(t)+P_2(t)=0$,

$$\lim_{t\to\infty}P_0(t)=\pi_0,\ \lim_{t\to\infty}P_1(t)=\pi_1,\ \lim_{t\to\infty}P_2(t)=\pi_2.$$

Многочлен (5) є характеристичним многочленом системи диференціальних рівнянь (1).

Справді

$$\begin{vmatrix} s+\lambda & -\mu & 0 \\ -\lambda & s+\lambda+\mu & -2\mu \\ 0 & -\lambda & s+2\mu \end{vmatrix}=s^3+3\mu s^2+2\lambda s^2+2\mu^2 s+2\lambda\mu s+\lambda^2 s.$$

Якщо взяти за корінь цього многочлена $\alpha_1=\lambda$, то з рівняння

$$\begin{vmatrix} 0 & -\mu & 0 \\ -\lambda & \mu & -2\mu \\ 0 & -\lambda & -\lambda+2\mu \end{vmatrix}=0$$

дістаємо, що $\mu=\dfrac{\lambda}{2}$. І тоді коренем многочлена (5) є $s_0=0$, $s_1=-\lambda$, $s_2=-\dfrac{5}{2}\lambda$, а формули (6), (7), (8) наберуть вигляду

$$P_0(t)=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}e^{-\lambda t}+\frac{1}{15}e^{-\frac{5}{2}\lambda t},$$

$$P_1(t)=\frac{2}{5}-\frac{3}{15}e^{-\frac{5}{2}\lambda t},$$

$$P_2(t)=\frac{2}{5}-\frac{2}{3}e^{-\lambda t}+\frac{2}{15}e^{-\frac{5}{2}\lambda t}.$$

Таким чином, якщо обрати $\mu=\frac{\lambda}{2}$, то для великих проміжків часу відношення часу простою до часу роботи 1 до 4.

Висновок. Розроблена теорія марковських процесів виявилась зручним інструментом для описання функціонування систем масового обслуговування. Перевага в порівнянні з немарковськими моделями у тому, що в багатьох випадках вдається знайти не тільки стаціонарні, але й перехідні характеристики, які дають кількісну оцінку надійності, а при наявності вартості обслуговування і рентабельність такого типу систем.

Використання тільки показникового розподілу дещо звужує можливості відповідного інструментарію, але можливість будувати з показникових розподілів розподіли, у яких інтенсивність відмов не є сталою, значно підвищує результативність таких моделей.

У статті побудована математична модель функціонування одноканальної системи масового обслуговування за умови, що вхідний потік є традиційний пуассонівський потік, а обслуговування здійснюється послідовно двома приладами. Використаний для побудови прийом дає можливість розв’язати ряд задач, наприклад теорії масового обслуговування, у яких інтенсивність надходження вимог або інтенсивність обслуговування змінюється.

Список використаних джерел:

1. Baccelly F. Elements of Queuing Theory / F. Baccelly, P. Bremaund. — Berlin : Springer-Verlad, 1994. — 245 p.
2. Боровков А. А. Асимптотические процессы в теории массового обслуживания / А. А. Боровков. — М. : Наука, 1980. — 381 с.
3. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания / А. А. Боровков. — М. : Наука, 1972. — 367 с.
4. Карлин С. Основы теории случайных процессов / С. Карлин ; [пер. с англ.]. — М. : Мир, 1971. — 536 с.
5. Конет І. М. Теорія ймовірностей та математична статистика в прикладах і задачах / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка, 2001. — 217 с.
6. Корлат А. Н. Полумарковские модели востанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А. Н. Корлат, В. Н. Кузнецов, М. М. Новиков, А. Р. Турбин. — Кишинёв : Штиинуа, 1991. — 276 с.
7. Королюк В. С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В. С. Королюк, А. Ф. Турбин. — К. : Наукова думка, 1982. — 235 с.
8. Королюк В. С. Фазовое укрупнение сложных систем / В. С. Королюк, А. Ф. Турбин. — К. : Вища школа, 1987. — 109 с.
9. Працьовитий М. В. Побудова абсолютно неперервних функцій розподілу шляхом змішування і стохастичного склеювання / М. В. Працьовитий,

А. А. Томусяк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. — № 6. — С. 145–167.
10. Томусяк А. А. Об одном методе построения функций распределения с ограничениями на интенсивность отказов / А. А. Томусяк // Прикладные задачи теории вероятностей. — К. : ИМАН УССР, 1982. — С. 102–106.

The article is devoted to building a mathematical model that describes the operation queuing system with two serving devices. The paper shows the communication between the probability that Markov process that describes the work of the relevant system will be in some time in a particular state and the probability of events that may take place for some time.

Key words: *queuing system, Markov chain, transition probabilities, exponent distribution.*

Отримано: 10.08.2016

УДК 519.85

О. О. Ємець*, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Т. М. Барболіна,** канд. фіз.-мат. наук

* Полтавський університет економіки і торгівлі, м. Полтава,
** Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка, м. Полтава

МОДЕЛЮВАННЯ ДЕТЕРМІНОВАНИМИ І СТОХАСТИЧНИМИ ЗАДАЧАМИ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Проаналізовано постановки задач евклідової комбінаторної оптимізації, як в умовах визначеності, так і зі стохастичною невизначеністю. Побудовано моделі прикладних задач у вигляді задач евклідової комбінаторної оптимізації на розміщеннях: детермінованих задач з дробово-лінійною цільовою функцією як без додаткових (некомбінаторних) обмежень, так і з додатковими лінійними обмеженнями, а також стохастичних задач на розміщеннях.

Ключові слова: *комбінаторна оптимізація, стохастична оптимізація, моделювання.*

Вступ, постановка задачі. Моделювання цілого ряду важливих економічних, фізичних, соціальних та інших процесів може бути здійснене за допомогою апарату дискретної оптимізації (див., наприклад, [1–18]) і зокрема, евклідової комбінаторної оптимізації. Огляд багатьох математичних моделей прикладних задач евклідової комбінаторної оптимізації здійснено в монографії [5]: представлено задачі з різними типами цільових функцій та обмежень, задачі як з визначеними даними, так і з різними видами невизначеності.

