УДК 517.957

М. І. Сєров, д-р. фіз.-мат. наук, професор,
О. Г. Плюхін, канд. фіз.-мат. наук

Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, м. Полтава

УМОВНІ СИМЕТРІЇ І ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Знайдено Q-умовні симетрії (1+1)-вимірної системи рівнянь реакції-дифузії з певними обмеженнями на вигляд оператора. За допомогою отриманого оператора, знайдено відповідний анзац, який редукує систему рівнянь реакції-дифузії до системи ЗДР. Побудовано точний розв'язок системи рівнянь реакції-дифузії.

Ключові слова: *Q-умовні симетрії, системи рівнянь реакції-дифузії, точні розв'язки.*

Вступ. Розглянемо (1+1)-вимірну систему рівнянь реакції-дифузії

$$\begin{aligned} u^1_{xx} &= \lambda_1 u^1_t + f^1(u^1, u^2), \\ u^2_{xx} &= \lambda_2 u^2_t + f^2(u^1, u^2), \end{aligned} \tag{1}$$

де $u^1 = u^1(x), u^2 = u^2(x), x \in R^2, u^1, u^2 \in R$, нижні індекси t, x означають диференціювання за змінними t, x відповідно. Системи типу (1) описують багато різноманітних процесів в фізиці [3], біології [4, 7–9] і екології [10].

Всі можливі симетрії Лі системи (1) знайдено в роботах [5, 6]. Часткові результати, щодо пошуку Q-умовних симетрій системи (1) отримано в роботі [1]. Пошуку Q-умовних симетрій присвячена нещодавно опублікована робота [11].

Постановка задачі. Будемо шукати оператори Q-умовної симетрії [2] вигляду

$$Q = \partial_t + \xi(u^1, u^2)\partial_x + \eta^1(u^1, u^2)\partial_{u^1} + \eta^2(u^1, u^2)\partial_{u^2} \tag{2}$$

відносно яких інваріантна система рівнянь реакції-дифузії (1). В роботі [11] знайдено Q-умовні симетрії вигляду (2) з додатковою умовою $\eta^2_{u^1} = 0$ і наведено деякі приклади з $\eta^2_{u^1} \neq 0$. В цій роботі ми наведемо перелік Q-умовних симетрій (2) системи (1) з умовою

$$\eta^1_{u^2}\eta^2_{u^1} \neq 0, \tag{3}$$

$\eta^1_{u^2} \neq 0$, інакше, з точністю до перепозначень, ми отримаємо випадок $\eta^2_{u^1} = 0$. Також побудуємо точний розв'язок для системи рівнянь реакції-дифузії за допомогою одержаного оператора.

Основний результат.

Теорема. Система рівнянь реакції-дифузії (1) Q-умовно інваріантна відносно оператора (2) з умовою (3), коли вона та відповідний оператор набувають одного з наведених виглядів

$$\begin{gathered}
u_{xx}^1 = \lambda_1 u_t^1 + u^1(\varphi^1(\omega) - \lambda_1 n) - (u^1 + u^2)(\varphi^2(\omega) - \lambda_1),\\
u_{xx}^2 = \lambda_2 u_t^2 + u^2(\varphi^1(\omega) - \lambda_2 n) + (u^1 + u^2)(\varphi^2(\omega) - \lambda_2),\\
\omega = (u^1 + u^2)\, e^{\frac{-nu^2}{u^1+u^2}},\\
Q = \partial_t + ((n-1)u^1 - u^2)\partial_{u^1} + (u^1 + (n+1)u^2)\partial_{u^2}.
\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}
u_{xx}^1 = \lambda_1 u_t^1 + u^1(\varphi^1(\omega) - m\varphi^2(\omega) - \lambda_1(n-m)) + \alpha u^2(\varphi^2(\omega) - \lambda_1),\\
u_{xx}^2 = \lambda_2 u_t^2 + u^2(\varphi^1(\omega) + m\varphi^2(\omega) - \lambda_2(n+m)) + u^1(\varphi^2(\omega) - \lambda_2),\\
\omega = \frac{(u^1 + (m+\sqrt{D})u^2)^{n-\sqrt{D}}}{(u^1 + (m-\sqrt{D})u^2)^{n+\sqrt{D}}},\\
Q = \partial_t + ((n-m)u^1 + \alpha u^2)\partial_{u^1} + (u^1 + (n+m)u^2)\partial_{u^2}.
\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}
u_{xx}^1 = \lambda_1 u_t^1 + u^1(\varphi^1(\omega) - m\varphi^2(\omega) - \lambda_1(n-m)) + \alpha u^2(\varphi^2(\omega) - \lambda_1),\\
u_{xx}^2 = \lambda_2 u_t^2 + u^2(\varphi^1(\omega) + m\varphi^2(\omega) - \lambda_2(n+m)) + u^1(\varphi^2(\omega) - \lambda_2),\\
\omega = ((u^1)^2 + 2mu^1u^2 - \alpha(u^2)^2)\, e^{\frac{2n}{\sqrt{-D}}\arctan\left(\frac{u^1+mu^2}{\sqrt{-D}u^2}\right)},\\
Q = \partial_t + ((n-m)u^1 + \alpha u^2)\partial_{u^1} + (u^1 + (n+m)u^2)\partial_{u^2}.
\end{gathered} \tag{6}$$

У формулах (4)–(6): $\alpha, m, n \in R; D = m^2 + \alpha$.

Доведення. Для доведення теореми потрібно побудувати загальний розв'язок системи визначальних рівнянь

$$\begin{aligned}
&1)\ \xi_{u^1u^1} = \xi_{u^2u^2} = \xi_{u^1u^2} = 0,\\
&2)\ \eta^1_{u^2u^2} = 0,\\
&3)\ \eta^2_{u^1u^1} = 0,\\
&4)\ 2\lambda_1\xi\xi_{u^1} + \eta^1_{u^1u^1} = 0,\\
&5)\ 2\lambda_2\xi\xi_{u^2} + \eta^2_{u^2u^2} = 0,\\
&6)\ (\lambda_1+\lambda_2)\xi\xi_{u^2} + 2\eta^1_{u^1u^2} = 0,\\
&7)\ (\lambda_1+\lambda_2)\xi\xi_{u^1} + 2\eta^2_{u^1u^2} = 0,\\
&8)\ (\lambda_1-\lambda_2)\xi\eta^1_{u^2} - 2\xi_{u^2}C^1 - 2\lambda_1\xi_{u^2}\eta^1 = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

9) $(\lambda_2-\lambda_1)\xi\eta^2_{u^1}-2\xi_{u^1}C^2-2\lambda_2\xi_{u^1}\eta^2=0,$

10) $\lambda_1(2\xi_{u^1}\eta^1-\xi_t-\xi_{u^2}\eta^2)+\lambda_2\xi_{u^2}\eta^2+3\xi_{u^1}C^1+\xi_{u^2}C^2=0,$

11) $\lambda_2(2\xi_{u^2}\eta^2-\xi_t-\xi_{u^1}\eta^1)+\lambda_1\xi_{u^1}\eta^1+3\xi_{u^2}C^2+\xi_{u^1}C^1=0,$

12) $\lambda_1\eta^2\eta^1_{u^2}-\lambda_2\eta^2\eta^1_{u^2}+\eta^1C^1_{u^1}+\eta^2C^1_{u^2}-\eta^1_{u^1}C^1-\eta^1_{u^2}C^2=0,$

13) $\lambda_2\eta^1\eta^2_{u^1}-\lambda_1\eta^1\eta^2_{u^1}+\eta^1C^2_{u^1}+\eta^2C^2_{u^2}-\eta^2_{u^1}C^1-\eta^2_{u^2}C^2=0,$

при умові (3). В роботі [11] проведено аналіз системи (7) і показано, що система (1) Q-умовно інваріантна відносно оператора (2) тоді і тільки тоді, коли розв’язком рівнянь 1)–11) будуть функції

$$\xi=0,\eta^1=\alpha_{11}u^1+\alpha_{12}u^2+\beta_1,\ \eta^2=\alpha_{21}u^1+\alpha_{22}u^2+\beta_2. \tag{8}$$

При умові (8) рівняння 12)–13) системи (7) наберуть вигляду

$$\begin{aligned}\eta^1f^1_{u^1}+\eta^2f^1_{u^2}&=\alpha_{11}f^1+\alpha_{12}f^2+\alpha_{12}(\lambda_2-\lambda_1)\eta^2,\\ \eta^1f^2_{u^1}+\eta^2f^2_{u^2}&=\alpha_{21}f^1+\alpha_{22}f^2-\alpha_{21}(\lambda_2-\lambda_1)\eta^1,\end{aligned} \tag{9}$$

тут і нижче, якщо спеціально не вказано, функції η^1,η^2 визначаються формулами (8).

Будемо шукати частиний розв’язок системи (9) у вигляді

$$f^a_{part}=\gamma_{a1}u^1+\gamma_{a2}u^2+\delta_a,\ a=1,2. \tag{10}$$

Підставивши вирази (10) у систему (9), одержимо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{gathered}\alpha_{21}\gamma_{12}-\alpha_{12}\gamma_{21}+\alpha_{12}\alpha_{21}\left(\lambda_1-\lambda_2\right)=0,\\ \alpha_{12}\gamma_{11}+\left(\alpha_{22}-\alpha_{11}\right)\gamma_{12}-\alpha_{12}\gamma_{22}+\alpha_{12}\alpha_{22}\left(\lambda_1-\lambda_2\right)=0,\\ \beta_1\gamma_{11}+\beta_2\gamma_{12}-\alpha_{11}\delta_1-\alpha_{12}\delta_2+\alpha_{12}\beta_2\left(\lambda_1-\lambda_2\right)=0,\\ \alpha_{21}\gamma_{11}+\left(\alpha_{22}-\alpha_{11}\right)\gamma_{21}-\alpha_{21}\gamma_{22}+\alpha_{11}\alpha_{21}\left(\lambda_1-\lambda_2\right)=0,\\ \beta_1\gamma_{21}+\beta_2\gamma_{22}-\alpha_{21}\delta_1-\alpha_{22}\delta_2+\alpha_{21}\beta_1\left(\lambda_2-\lambda_1\right)=0.\end{gathered}$$

В залежності від значень параметрів α з індексами, одержимо 5 різних розв’язків цієї системи. Чотири з низ проаналізовані в роботі [11], тут ми зупинимося на розгляді п’ятого випадку, який є найскладнішим. Цей випадок визначається умовою

$$\Delta=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}\neq 0.$$

Вибравши зручним чином параметри γ з індексами, одержимо частиний розв’язок (10) у вигляді

$$f^1_{part}=-\lambda_1\eta^1,\ f^2_{part}=-\lambda_2\eta^2. \tag{11}$$

Далі ми маємо розв’язувати однорідну систему

$$\begin{aligned} \eta^1 f^1_{u^1} + \eta^2 f^1_{u^2} &= \alpha_{11} f^1 + \alpha_{12} f^2, \\ \eta^1 f^2_{u^1} + \eta^2 f^2_{u^2} &= \alpha_{21} f^1 + \alpha_{22} f^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Виконавши наступні перепозначення в системі (12):

$$u^1 \to u^1 - \frac{\alpha_{22}\beta_1 - \alpha_{12}\beta_2}{\Delta}, u^2 \to \alpha_{21}u^2 - \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\Delta}, f^2 \to \alpha_{21} f^2,$$

$$\alpha_{12}\alpha_{21} \to \alpha_{12}, \alpha_{ii} \to 2\alpha_{ii},$$

одержимо систему вигляду

$$\begin{aligned} (2\alpha_{11}u^1 + \alpha_{12}u^2) f^1_{u^1} + (u^1 + 2\alpha_{22}u^2) f^1_{u^2} &= 2\alpha_{11} f^1 + \alpha_{12} f^2, \\ (2\alpha_{11}u^1 + \alpha_{12}u^2) f^2_{u^1} + (u^1 + 2\alpha_{22}u^2) f^2_{u^2} &= f^1 + 2\alpha_{22} f^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Помноживши перше рівняння (13) на A_1, а друге на A_2 і додавши, одержимо

$$(2\alpha_{11}u^1 + \alpha_{12}u^2)(A_1 f^1 + A_2 f^2)_{u^1} + (u^1 + 2\alpha_{22}u^2)(A_1 f^1 + A_2 f^2)_{u^2} =$$
$$= (2\alpha_{11}A_1 + A_2) f^1 + (\alpha_{12}A_1 + 2\alpha_{22}A_2) f^2.$$

Для знаходження розв'язку одержаного рівняння, потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} (2\alpha_{11} - k)A_1 + A_2 = 0, \\ \alpha_{12}A_1 + (2\alpha_{22} - k)A_2 = 0. \end{cases}$$

Введемо заміни $m = \alpha_{22} - \alpha_{11}, n = \alpha_{22} + \alpha_{11}$. Для одержання ненульових A_1 і A_2 необхідно, щоб

$$\begin{vmatrix} 2\alpha_{11} - k & 1 \\ \alpha_{12} & 2\alpha_{22} - k \end{vmatrix} = k^2 - 2nk + 4\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12} = 0. \tag{14}$$

Розв'язуючи (14) ми одержуємо три підвипадки в залежності від $D = m^2 + \alpha_{12}$:

1) $D = 0$; 2) $D > 0$; 3) $D < 0$.

Розглянемо детально підвипадок 1). Система (13) набуде вигляду

$$\begin{aligned} ((n-1)u^1 - u^2) f^1_{u^1} + (u^1 + (n+1)u^2) f^1_{u^2} &= (n-1) f^1 - f^2, \\ ((n-1)u^1 - u^2) f^2_{u^1} + (u^1 + (n+1)u^2) f^2_{u^2} &= f^1 + (n+1) f^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Для одержання системи (15) ми поділили перше рівняння на m^2, а друге на m і виконали наступні перепозначення $n \to nm$, $f^1 \to mf^1, u^2 \to \frac{1}{m}u^2$.

Додавши рівняння системи (15), одержимо рівняння

$$\left((n-1)u^1 - u^2\right)(f^1 + f^2)_{u^1} + (u^1 + (n+1)u^2)(f^1 + f^2)_{u^2} = n(f^1 + f^2),$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$f^1 + f^2 = (u^1 + u^2)\,\varphi(\omega),\ \omega = (u^1 + u^2)\,e^{\frac{-nu^2}{u^1+u^2}}. \qquad (16)$$

Підставивши f^1 з (16) в друге рівняння системи (15), одержимо рівняння

$$((n-1)u^1 - u^2) f^2_{u^1} + (u^1 + (n+1)u^2) f^2_{u^2} = nf^2 + (u^1 + u^2)\,\varphi^1(\omega),$$

Розв'язавши його, одержимо розв'язок

$$f^2 = u^2\varphi^1(\omega) + (u^1 + u^2)\,\varphi^2(\omega). \qquad (17)$$

Підставивши (17) у (16), отримаємо

$$f^1 = u^1\varphi^1(\omega) - (u^1 + u^2)\,\varphi^2(\omega). \qquad (18)$$

Використавши формули (11), (17), (18) і перепозначивши $t \to \dfrac{1}{m}t,\ \lambda_i \to \dfrac{\lambda_i}{m}$, одержимо систему рівнянь реакції-дифузії і відповідний оператор (4) з теореми. У підвипадках 2), 3) одержимо системи і відповідні оператори (5), (6).

Точні розв'язки системи рівняннь реакції-дифузії. Розглянемо систему рівнянь і оператор (6). Анзац побудований за допомогою відповідного оператора, має вигляд

$$u^1 = \left((\sqrt{-D}\psi^2 - m\psi^1)\cos\sqrt{-D}t - (\sqrt{-D}\psi^1 + m\psi^2)\sin\sqrt{-D}t \right) e^{nt},$$

$$u^2 = \left(\psi^1 \cos\sqrt{-D}t + \psi^2 \sin\sqrt{-D}t \right) e^{nt}, \psi^i = \psi^i(x).$$

Підставивши, одержаний анзац, в систему рівнянь (6), отримаємо редуковану систему і відповідний інваріант

$$(\psi^1)'' - \varphi^1(\omega)\psi^1 - \sqrt{-D}\varphi^2(\omega)\psi^2 = 0,$$

$$(\psi^2)'' - \varphi^1(\omega)\psi^2 + \sqrt{-D}\varphi^2(\omega)\psi^1 = 0,$$

$$\omega = -D((\psi^1)^2 + (\psi^2)^2)\ \exp\left(\frac{2n}{\sqrt{-D}} \arctan\left[\frac{\psi^2}{\psi^1} \right] \right).$$

Знайти загальний розв'язок редукованої системи не вдається, але при спеціальному виборі функцій $\varphi^1 = 0, \varphi^2 = 2a\omega$ вдається знайти частинний розв'язок редукованої системи, а, отже і системи рівнянь реакції-дифузії (6). Таким чином, маємо розв'язок

$$u = -\frac{m\cos\left(\sqrt{-D}t\right) + \sqrt{-D}\sin\left(\sqrt{-D}t\right)}{\sqrt{-Da}\,x + C_1},$$

$$v = \frac{\cos\left(\sqrt{-D}t\right)}{\sqrt{-Da}\,x + C_1},\ a > 0,\ \alpha < 0,$$

нелінійної системи рівнянь реакції-дифузії

$$u_{xx} = \lambda_1 u_t - \alpha v\left(2auv + \lambda_1\right) + u\left(2au(u + 2mv) + m\lambda_1\right),$$

$$v_{xx} = \lambda_2 v_t + 2auv(u + 2mv) - 2a\alpha v^3 - \lambda_2 (u + mv),$$

яка може претендувати на опис реальних процесів.

Висновки. У роботі знайдено оператори Q-умовної симетрії вигляду (2) з обмеженнями (3) відносно яких інваріантна система рівнянь (1). В якості прикладу представлено анзац і відповідну редуковану систему для одного з випадків. Наведено точний розв'язок системи рівнянь реакції-дифузії, який при певних значеннях параметрів може претендувати на опис реальних фізичних чи біологічних процесів.

Автори вдячні проф. Р.М. Чернізі за постановку задачі і плідні дискусії.

Список використаних джерел:

1. Баранник Т. А. Умовна симетрія і точні розв'язки багатовимірного рівняння реакції-дифузії / Т. А. Баранник // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 10. — С. 1416–1420.
2. Фущич В. И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики / В. И. Фущич, В. М. Штелень, Н. И. Серов. — К. : Наук. думка, 1989. — 336 с.
3. Ames W. F. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering / W. F. Ames. — New York : Academic Press, 1972. — 495 p.
4. Britton N. F. Essential Mathematical Biology / N. F. Britton. — Berlin : Springer, 2003. — 335 p.
5. Cherniha R. Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction-Diffusion Systems: I / R. Cherniha, J. R. King // J. Phys. A: Math. Gen. — 2000. — Vol. 33. — P. 267–282.
6. Cherniha R. Lie Symmetries of Nonlinear Multidimensional Reaction-Diffusion Systems: II / R. Cherniha, J. R. King // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — Vol. 36. — P. 405-425.
7. Murray J. D. Mathematical Biology / J. D. Murray. — Berlin : Springer, 1989. — 767 p.
8. Murray J. D. Mathematical Biology, II / J. D. Murray. — Berlin : Springer, 2003. — 801 p.
9. Murray J. D. Nonlinear Differential Equation Models in Biology / J. D. Murray. — Oxford : Clarendon Press, 1977. — 370 p.
10. Okubo A. Diffusion and Ecological Problems. Modern Perspectives. / A. Okubo, S. A. Levin. — Berlin : Springer, 2001. — 444 p.
11. Pliukhin O. *Q*-Conditional Symmetries and Exact Solutions of Nonlinear Reaction–Diffusion Systems / O. Pliukhin // Symmetry. — 2015. — Vol. 7. — P. 1841–1855.

We have found Q-conditional symmetries of the (1+1)-dimensional reaction-diffusion system with some restrictions on the form of the operator. Using the obtained operator, we have found corresponding ansatze, which reduces reaction-diffusion system to the system of ODEs. We have constructed exact solution of nonlinear reaction-diffusion system.

Key words: *Q-conditional symmetry, reaction-diffusion systems, exact solutions.*

Отримано: 30.03.2016