УДК 519.21:519.61

П. С. Сеньо, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ІНТЕРВАЛІВ

У роботі запропоновано алгоритми розв'язування алгебраїчних та трасцендентних рівнянь і нерівностей, задач оптимізації, двосторонньої апроксимації функцій на заданому інтервалі нелінійними сплайнами. Доведена коректність цих застосувань та наведені результати обчислюваних експериментів.

Ключові слова: *інтервал, функціональний інтервал , лінійний функціональний інтервал, ширина інтервалу, квазілінійний простір, збіжність, порядок збіжності.*

Вступ. Питанням узагальнення поняття інтервальної математики присвячено багато робіт. Найбільш вдалим таким узагальненням є математика напрямлених інтервалів [4], запропонована С. М. Марковим. Однак вона застосовна лише до монотонних функцій.

У [2] введені нові об'єкти дослідження — функціональні інтервали, арифметичні, та теоретико-множинні операції над ними. Функціональні інтервали є узагальненням числових інтервалів та інтервальних розширень функцій [1, с. 31–33]. У [3] доведено, що множина лінійних функціональних інтервалів, визначених на одному й тому ж проміжку X аргументу, при означених у [2] арифметичних операціях, є квазілінійним простором.

Формулювання задачі та основні напрямки її розв'язання. Квазілінійний простір лінійних функціональних інтервалів є узагальненням квазілінійного простору інтервалів. Тому, цей вищий рівень абстракції та отримані в [2; 3] висновки дають можливість на основі математики функціональних інтервалів будувати і досліджувати ефективні методи розв'язування широкого кола задач.

В основу таких методів покладено те, що кожен функціональний інтервал $\{X, f_1(x), f_2(x)\}$ визначає двосторонню апроксимацію одночасно всіх функцій, для яких функції $f_1(x), f_2(x)$ є мінорантою та мажорантою, відповідно. Тому кожну задачу, яка потребує аналізу деякої функції (функцій), що міститься у цьому функціональному інтервалі, часто можна розв'язати або лише за допомогою аналізу таких простіших функцій $f_1(x), f_2(x)$, або так значно легше отримуємо розв'язок сформульованої задачі.

Розв'язування алгебраїчних та трансцендентних рівнянь і нерівностей. Нехай потрібно знайти в інтервалі $X \subseteq D$ всі дійсні корені рівняння

$$f(x)=0\,, \tag{1}$$

де $f: D\subseteq R\to G\subseteq R$. Функція $f(x)$ на цьому інтервалі може бути розривною, і/або недиференційованою. Побудуємо для неї на інтервалі X лінійний інтервальний обмежник $L(X)=\{X,\underline{l}(x),\overline{l}(x)\}$. Його обмежуючі функції $\underline{l}(x),\overline{l}(x)$ кусково-лінійні. Тому у кожному інтервалі $[x_1,x_2],[x_2,x_3],\cdots,[x_n,x_{n+1}]$, де

$$[x_1,x_2]\bigcup[x_2,x_3]\bigcup\cdots\bigcup[x_n,x_{n+1}]=[x_1,x_{n+1}]=X\,,$$

лінійний обмежник $L(X)$ є деяким елементарним лінійним обмежником $\{[x_i,x_{i+1}],\underline{k}_i\ x+\underline{m}_i,\overline{k}_i\ x+\overline{m}_i\}$, ($i=1,2,\cdots,n$), тобто

$$\begin{gathered}L(X)=\{[x_1,x_2],\underline{k}_1\ x+\underline{m}_1,\overline{k}_1\ x+\overline{m}_1\}\bigcup\\ \bigcup\{[x_2,x_3],\underline{k}_2\ x+\underline{m}_2,\overline{k}_2\ x+\overline{m}_2\}\bigcup\ldots\bigcup\{[x_n,x_{n+1}],\underline{k}_n\ x+\underline{m}_n,\overline{k}_n\ x+\overline{m}_n\}.\end{gathered} \tag{2}$$

Нехай $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ — множина точок x_i інтервалу X розбиття лінійного інтервального обмежника $L(X)$ функції $f(x)$ на елементарні лінійні інтервальні обмежники; $\{\overline{k}_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\underline{k}_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\overline{m}_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\underline{m}_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\overline{f}_i\}_{i=1}^{n+1}$, $\{\underline{f}_i\}_{i=1}^{n+1}$ — множини кутових коефіцієнтів $\overline{k}_i,\underline{k}_i$, зміщень $\overline{m}_i,\underline{m}_i$, значень $\overline{f}_i$, $\underline{f}_i$ верхніх та нижніх її лінійних елементарних обмежуючих функцій, відповідно, у точках x_i.

Алгоритм 1. Нехай

$$\underline{f}_i=\underline{k}_i\ x_i+\underline{m}_i\,,\ \overline{f}_i=\overline{k}_i\ x_i+\overline{m}_i\,,\ (i=1,2,\cdots,n), \tag{3}$$

$$\underline{x}_i^*=-\underline{m}_i/\underline{k}_i\,, \tag{4}$$

$$\overline{x}_i^*=-\overline{m}_i/\overline{k}_i\,. \tag{5}$$

Тоді:

1) якщо $0<\underline{f}_i$ і $0<\underline{f}_{i+1}$, або $\overline{f}_i<0$ і $\overline{f}_{i+1}<0$, то на проміжку $[x_i,x_{i+1}]$ немає коренів рівняння (1);
2) якщо $\underline{f}_i\cdot\underline{f}_{i+1}<0$, і $\overline{f}_i\cdot\overline{f}_{i+1}<0$, то у проміжку $[x_i,x_{i+1}]$ лише на проміжку $[\min\{\underline{x}_i^*,\overline{x}_i^*\},\max\{\underline{x}_i^*,\overline{x}_i^*\}]$ є корені рівняння (1), де числа $\underline{x}_i^*$, $\overline{x}_i^*$ визначаємо за формулами (4), (5), відповідно;
3) якщо $0<\overline{f}_i$, $0<\overline{f}_{i+1}$, $0<\underline{f}_i$, $\underline{f}_{i+1}<0$, то у проміжку $[x_i,x_{i+1}]$ лише на проміжку $[x_i,\overline{x}_i^*]$ можуть бути корені рівняння (1), де число $\underline{x}_i^*$ визначаємо за формулою (4);

4) якщо $0 < \overline{f}_i$, $0 < \overline{f}_{i+1}$, $\underline{f}_i < 0$, $0 < \underline{f}_{i+1}$, то у проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ лише на проміжку $[x_i, \underline{x}_i^*]$ можуть бути корені рівняння (1), де число $\underline{x}_i^*$ визначаємо за формулою (4);
5) якщо $0 < \overline{f}_i$, $\overline{f}_{i+1} < 0$, $\underline{f}_i < 0$, $\underline{f}_{i+1} < 0$,, то у проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ лише на проміжку $[x_i, \overline{x}_i^*]$ можуть бути корені рівняння (1), де число $\underline{x}_i^*$ визначаємо за формулою (5);
6) якщо $\overline{f}_i < 0$, $0 < \overline{f}_{i+1}$, $\underline{f}_i < 0$, $\underline{f}_{i+1} < 0$, то у проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ лише на проміжку $[\overline{x}_i^*, x_{i+1}]$ можуть бути корені рівняння (1), де число $\overline{x}_i^*$ визначаємо за формулою (5);
7) якщо $\underline{f}_i < 0$, $\underline{f}_{i+1} \le 0$, $0 \le \overline{f}_i$, $0 < \overline{f}_{i+1}$, то на всьому проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ можуть бути корені рівняння (1);
8) якщо $\underline{f}_i \le 0$, $\underline{f}_{i+1} < 0$, $0 < \overline{f}_i$, $0 \le \overline{f}_{i+1}$, то на всьому проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ можуть бути корені рівняння (1);
9) якщо $\overline{f}_i \cdot \underline{f}_i < 0$ і $\underline{f}_{i+1} = \overline{f}_{i+1}$ =0, то на всьому проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ можуть бути корені рівняння (1), причому x_{i+1} — корінь цього рівняння;
10) якщо $\overline{f}_{i+1} \cdot \underline{f}_{i+1} < 0$ і $\underline{f}_i = \overline{f}_i$ =0, то на всьому проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ можуть бути корені рівняння (1), причому x_i — корінь цього рівняння;
11) якщо $0 < \overline{f}_i \cdot \underline{f}_i$ і $\underline{f}_{i+1} = \overline{f}_{i+1}$ =0, то на проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ лише число x_{i+1} є коренем рівняння (1);
12) якщо $0 < \overline{f}_{i+1} \cdot \underline{f}_{i+1}$ і $\underline{f}_i = \overline{f}_i$ =0, то на проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ лише число x_i є коренем рівняння (1);
13) якщо $\overline{f}_i = \overline{f}_{i+1} = \underline{f}_i = \underline{f}_{i+1} = 0$, то всі точки проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ є коренями рівняння (1).

Зауваження 1. Якщо в інтервалах $[x_i^*, x_{i+1}]$ і $[x_{i+1}, x_{i+1}^{**}]$ можуть бути корені рівняння (1), то в інтервалі $[x_i^*, x_{i+1}^{**}]$ обов'язково є хоча б один його корінь.

Після локалізації інтервалів, де є, або можуть бути корені рівняння (1), далі пошук коренів цього рівняння продовжуємо за описаним вище алгоритмом окремо в кожному з цих інтервалів.

Зауваження 2. Алгоритми розв'язування нерівностей багато в чому аналогічні алгоритмам розв'язування рівнянь, оскільки всі вони ґрунтуються на тому, що обмежуючі функції лінійного функціонального інтервалу функції лівої частини даного рівняння чи нерівності є кусково-лінійними функціями. Отже, розв'язування даної нерівності зводиться до послідовного розв'язування лінійних нерівностей того ж знаку, ліві частини яких є функції $\underline{f}_i = \underline{k}_i\, x_i + \underline{m}_i$, $\overline{f}_i = \overline{k}_i\, x_i + \overline{m}_i$, ($i = 1, 2, \cdots, n$).

Розв'язування задач оптимізації. Нехай потрібно знайти

$$x^* = \arg\max_{x\in X} f(x)\,, \tag{6}$$

де X будь-який заданий закритий інтервал. Розв'язок цієї задачі отримуємо в результаті реалізації наступного алгоритму.

Алгоритм 2.

1. На інтервалі X будуємо лінійний інтервальний обмежник $L(X) = \{X, \underline{l}(x), \overline{l}(x)\}$ функції $f(x)$.
2. У списку $\{\underline{f}_i\}_{i=1}^{n+1}$ знаходимо найбільше значення $\underline{f}^* = \max_{i\in 1,n+1} \underline{f}_i = \underline{f}_k$.
3. Покладемо $k = 1$, $\underline{x}_k^* = x_1$, $\overline{x}_k^* = x_{n+1}$.
4. Якщо $k = n+1$, то перейти на п. 5 цього алгоритму. В протилежному випадку послідовно при $i = k, k+1, \cdots, n+1$ аналізуємо $\overline{f}_i$.

4.1. Нехай при цьому всі $\overline{f}_i \ge \underline{f}^*$, де $i = k, k+1, \cdots, r$, а $\overline{f}_{r+1} < \underline{f}^*$.

Тоді в інтервалі $[\underline{x}_k^*, \overline{x}_r^*]$,

де

$$\overline{x}_r^* = (\underline{f}^* - \overline{m}_r) / \overline{k}_r\,, \tag{7}$$

може бути розв'язок задачі (6) і тому його включаємо у список інтервалів, які потрібно ще додатково аналізувати за цим же алгоритмом. Покладаємо $\underline{x}_k^* = \overline{x}_r^*$, $\overline{x}_k^* = x_{n+1}$, $k = r+1$ і переходимо на п. 4 цього алгоритму.

4.2. Якщо ж всі $\overline{f}_i < \underline{f}^*$, де $i = k, k+1, \cdots, r$, а $\overline{f}_{r+1} \ge \underline{f}^*$, то в інтервалі $(\underline{x}_k^*, \overline{x}_r^*)$, де $\overline{x}_r^*$ визначається за формулою (7), розв'язків задачі (6) немає. Покладаємо $\underline{x}_k^* = \overline{x}_r^*$, $\overline{x}_k^* = x_{n+1}$, $k = r+1$ і переходимо на п. 4 цього алгоритму.

5. Кінець алгоритму.

Зауваження 3. Якщо в задачі оптимізації (6) є ще і обмеження типу рівностей та нерівностей, то, реалізувавши черговий крок алгоритму 2, знаходимо інтервали, які можуть містити розв'язок поставленої задачі. Далі, звичним чином [1], у кожному так локалізованому інтервалі перевіряємо можливість наявності розв'язків цих рівностей та нерівностей. Якщо в якомусь локалізованому інтервалі розв'язків заданих рівностей та нерівностей немає, то цей інтервал відкидаємо і пошук розв'язку задачі продовжуємо в інтервалах. що залишилися.

Зауваження 4. Алгоритми розв'язування задач мінімізації, знаходження локальних екстремумів у заданому інтервалі аналогічні алгоритму 2.

Двостороння апроксимація функцій на заданому інтервалі нелінійними сплайнами. Нехай на проміжку $X=[a,b]$ невідома функція $f(x)$ один раз неперевнодиференційовна та відомий функціональний обмежник $\{X, f_1(x), f_2(x)\}$ першої похідної $f'(x)$ цієї функції. Потрібно побудувати двосторонню апроксимацію шуканої функції, графік якої проходить через множину заданих точок $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$, де $x_i \in X$, $y_i = f(x_i)$, $i=\overline{1,n}$.

Методи двосторонніх апроксимацій функцій на заданому інтервалі нелінійними сплайнами засновані на висновках наступних двох теорем.

Теорема 1. Нехай функція $y(x)$ один раз неперевно диференційовна у кожній точці x інтервалу $[a,b]$ і функції $\underline{g}(x)$, $\overline{g}(x)$ такі, що на цьому інтервалі виконується подвійна нерівність

$$\underline{g}(x) \le y'(x) \le \overline{g}(x) . \tag{8}$$

Тоді виконуються наступні нерівності:

$$y_a + \int_a^x \underline{g}(t)dt \le y(x) \le y_a + \int_a^x \overline{g}(t)dt , \tag{9}$$

$$y_b - \int_x^b \underline{g}(t)dt \le y(x) \le y_b - \int_x^b \overline{g}(t)dt , \tag{10}$$

де

$$y_a = y(a) ,\ y_b = y(b) . \tag{11}$$

Доведення. З властивостей означеного інтеграла випливає, що нерівність можна інтегрувати. Отже, для будь-яких $c \ge a$ та $d \le b$, з (8) отримуємо

$$\int_a^c \underline{g}(t)\, dt \le \int_a^c y'(t)\, dt \le \int_a^c \overline{g}(t)\, dt , \tag{12}$$

$$\int_d^b \underline{g}(t)\,dt \le \int_d^b y'(t)\,dt \le \int_d^b \overline{g}(t)\,dt\,, \tag{13}$$

відповідно. Тому, розглядаючи означений інтеграл як функцію верхньої (нижньої) межі, з (12), (13) при $c = x$, $d = x$, врахувавши (11), отримуємо (9), (10), відповідно.

Нехай визначені функції

$$\underline{g}(x) = \underline{k}\,x + \underline{m}\,, \tag{14}$$

$$\overline{g}(x) = \overline{k}\,x + \overline{m}\,, \tag{15}$$

$$\underline{p}_a(x) = 0.5\,\underline{k}\,x^2 + \underline{m}\,x - 0.5\,\underline{k}\,a^2 - \underline{m}\,a + y_a\,, \tag{16}$$

$$\overline{p}_a(x) = 0.5\,\overline{k}\,x^2 + \overline{m}\,x - 0.5\,\overline{k}\,a^2 - \overline{m}\,a + y_a\,, \tag{17}$$

$$\underline{p}_b(x) = 0.5\,\overline{k}\,x^2 + \overline{m}\,x - 0.5\,\overline{k}\,b^2 - \overline{m}\,b + y_b\,, \tag{18}$$

$$\overline{p}_b(x) = 0.5\,\underline{k}\,x^2 + \underline{m}\,x - 0.5\,\underline{k}\,b^2 - \underline{m}\,b + y_b\,, \tag{19}$$

$$\omega_a(x) = \overline{p}_a(x) - \underline{p}_a(x)\,, \tag{20}$$

$$\omega_b(x) = \overline{p}_b(x) - \underline{p}_b(x)\,, \tag{21}$$

де

$$y_a = y(a)\,,\ y_b = y(b)\,, \tag{22}$$

$\underline{k}$, $\underline{m}$, $\overline{k}$, $\overline{m}$ — деякі константи. Тоді виконується наступна теорема.

Теорема 2. Нехай в інтервалі $X = [a, b]$ функція $y(x)$ неперервно диференційовна і її похідна $y'(x)$ задовольняє подвійну нерівність

$$\underline{g}(x) \le y'(x) \le \overline{g}(x)\,. \tag{23}$$

Тоді:

$$\underline{p}_a(x) \le y(x) \le \overline{p}_a(x)\,, \tag{24}$$

$$\underline{p}_b(x) \le y(x) \le \overline{p}_b(x)\,; \tag{25}$$

функція $\omega_a(x)$ монотонно зростаюча, а функція $\omega_b(x)$ монотонно спадна, і їх прирости співпадають з точністю до знака;
для будь-якого $x \in X = [a, b]$

$$\omega_a(x) + \omega_b(x) = C > 0\,, \tag{26}$$

де константа

$$C = 0.5\,(\overline{k} - \underline{k})\,(b^2 - a^2) + (\overline{m} - \underline{m})\,(b - a)\,; \tag{27}$$

якщо $\underline{k} \ne \overline{k}$, то в інтервалі $[a, b]$ рівнянь

$$\overline{p}_a(x) = \overline{p}_b(x)\,, \tag{28}$$

$$\underline{p}_a(x) = \underline{p}_b(x) \tag{29}$$

мають розв'язки $\overline{x}^*$, $\underline{x}^*$, відповідно, і вони єдині; максимальна віддаль $diam_y$ в інтервалі $[a, b]$ вздовж осі OY між точками множини точок, обмежених параболами $\overline{p}_a(x), \overline{p}_b(x)$, $\underline{p}_a(x), \underline{p}_b(x)$ («параболічного паралелограма»), задовольняє співвідношення

$$diam\ _y = \min(Y1, Y2) \le 0.5\, C\ , \tag{30}$$

де константи

$$Y_2 = 0.5\, \overline{k}\ (b^2 - a^2) + \overline{m}\ (b - a) + y_a - y_b\,, \tag{31}$$

$$Y_1 = y_b - y_a - 0.5\, \underline{k}\ (b^2 - a^2) - \underline{m}\ (b - a)\,. \tag{32}$$

Доведення. Оскільки виконуються умови теореми 1, то з (9), врахувавши (14)–(17), (22), (23), отримуємо нерівність (24); а з (10), врахувавши (14)–(15), (18), (19), (22)), (23) — нерівність (25).

Нехай точки x_1, x_2 такі, що $a \le x\ _1 < x_2 \le b$. Тоді, враховуючи (16)–(21), отримуємо:

$$\omega_a(x_1) = 0.5\, (\overline{k} - \underline{k})\, (x_1^2 - a^2) + (\overline{m} - \underline{m})\, (x_1 - a)\,,$$

$$\omega_a(x_2) = 0.5\, (\overline{k} - \underline{k})\, (x_2^2 - a^2) + (\overline{m} - \underline{m})\, (x_2 - a)\,,$$

$$\omega_b(x_1) = 0.5\, (\underline{k} - \overline{k})\, (x_1^2 - b^2) + (\underline{m} - \overline{m})\, (x_1 - b)\,,$$

$$\omega_b(x_2) = 0.5\, (\underline{k} - \overline{k})\, (x_2^2 - b^2) + (\underline{m} - \overline{m})\, (x_2 - b)\,.$$

Отже,

$$\omega_a(x_2) - \omega_a(x_1) = 0.5\, (\overline{k} - \underline{k})\, (x_2^2 - x_1^2) + (\overline{m} - \underline{m})\, (x_2 - x_1) =$$

$$= 0.5\, (x\ _2 - x_1)\, (((\overline{k} - \underline{k})\, x_2 + (\overline{m} - \underline{m})) + ((\overline{k} - \underline{k})\, x_1 + (\overline{m} - \underline{m}))\,;$$

$$\omega_b(x_2) - \omega_b(x_1)\ =\ 0.5\, (\underline{k} - \overline{k})\, (x_2^2 - x_1^2) +\ (\underline{m} - \overline{m})\, (x_2 - x_1) =$$

$$0.5\, (x\ _2 - x_1)\, (((\underline{k} - \overline{k})\, x_2 + (\underline{m} - \overline{m})) +\ ((\underline{k} - \overline{k})\, x_1 + (\underline{m} - \overline{m}))\,.$$

Звідси, враховуючи (23) і те, що $\underline{g}(x), \overline{g}(x)$ — прямі лінії, випливають нерівності $\omega_a(x_2) - \omega_a(x_1) > 0$ та $\omega_b(x_2) - \omega_b(x_1) < 0$.

Отже, функція $\omega_a(x)$ монотонно зростаюча, а функція $\omega_b(x)$ монотонно спадна і їх прирости співпадають з точністю до знака, тобто $\omega_a(x_2) - \omega_a(x_1)\ =\ -\,(\omega_b(x_2) - \omega_b(x_1))$.

Оскільки

$$\omega_a(x) = 0.5\, (\overline{k} - \underline{k})\, (x^2 - a^2)\ +\ (\overline{m} - \underline{m})\, (x - a)\,,$$

$$\omega_b(x) = 0.5\, (\underline{k} - \overline{k})\, (x^2 - b^2) + (\underline{m} - \overline{m})\, (x - b)\,,$$

то, врахувавши попередній висновок і вибравши константу C у вигляді (27), отримуємо (26).

Квадратна парабола опукла функція. Тому з співвідношень (16)–(19), (26) випливає, що параболи $\overline{p}_a(x), \overline{p}_b(x)$ та $\underline{p}_a(x), \underline{p}_b(x)$ перетинаються, відповідно, кожне рівняння (28), (29) має корінь в інтервалі $[a, b]$ і він єдиний (див рис. 1).

Звідси випливає співвідношення (30), де константи Y_1, Y_2 вибираються у вигляді (31), (32), відповідно.

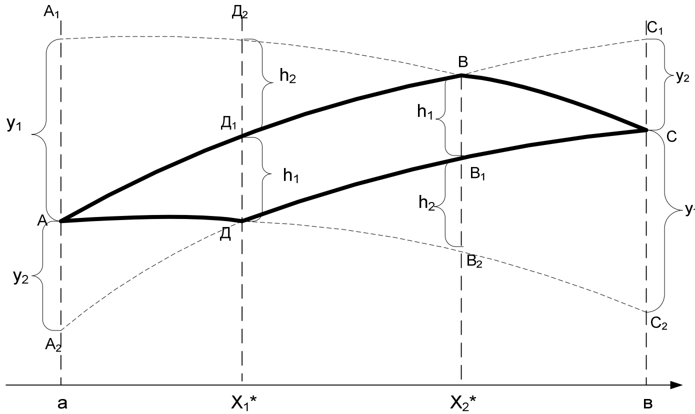

Рис. 1. *Геометрична інтерпретація «параболічного паралелограма» та співвідношень (28)–(32)*

На рис. 1:крива, що проходить через точки A, D_1, B, C_1 — графік параболи $\overline{p}_a(x)$; крива, що проходить через точки A, D, B_2, C_2 — графік параболи $\underline{p}_a(x)$; крива, що проходить через точки A_1, D_2, B, C — графік параболи $\overline{p}_b(x)$; крива, що проходить через точки A_2, D, B_1, C — графік параболи $\underline{p}_b(x)$; точки: $A\,(a, y_a)$, $C\,(b, y_b)$; x_1^*, x_2^* — корені рівнянь (28), (29), відповідно; A, D, B, C — «параболічний паралелограм»; $h_1 = diam_{\,y}$.

З отриманих вище співвідношень та суті величин Y_1, Y_2 випливає співвідношення (30).

Зауваження 5. З суті «параболічного паралелограма» $A\,B\,C\,D$ випливає, що в ньому містяться графіки всіх функції, які проходять через точки A, C і для яких виконується умова (23).

Зауваження 6. Якщо в (14), (15) замість функцій $\underline{g}(x)$, $\overline{g}(x)$ вибрати нижні та верхні обмежуючі функції $\underline{l}(x), \overline{l}\,(x)$ лінійного функціонального інтервалу $L(X)=\{X,\underline{l}(x),\overline{l}(x)\}$ похідної $y'(x)$ функції $y(x)$, відповідно, то додавши в (16)–(19) зміщення, які виникають при переходах від x_i до x_{i+1} ($i=\overline{1,n+1}$), отримаємо двосторонню апроксимацію функції $y(x)$.

Застосування нелінійної двосторонньої апроксимації функції для побудови методів розв'язування нелінійних рівнянь. Для знаходження розв'язку рівняння (1) часто використовують інтервальний метод Ньютона у формі Мура [1]:

$$\begin{cases} N^{(k)} = \overline{x}^{(k)} - \left(F'(X^{(k)})\right)^{-1} \cdot f(\overline{x}^{(k)}), \\ X^{(k+1)} = N^{(k)} \bigcap X^{(k)}, (k=0,1,\cdots...), \end{cases} \tag{33}$$

де $\overline{x}^{(k)}$ — середини інтервалів X_k. Однак, використавши двосторонню апроксимацію функції $f(x)$ нелінійними сплайнами, запропоновану вище; ідею побудови методу (33) та модифікувавши відповідним чином алгоритм 1, отримуємо значно ефективніші методи розв'язування рівняння (1). Побудова та реалізація таких методів здійснюється за наступним алгоритмом.

Алгоритм 3.

1. Будуємо в інтервалі X лінійний інтервальний обмежник $L(X)=\{X,\underline{l}(x),\overline{l}(x)\}$ похідної $f'(x)$ функції $f(x)$.
2. Визначаємо характерні точки [2] елементарних функцій, з яких компонується похідна $f'(x)$ та формуємо розбиття $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ інтервала X.
3. На основі обмежника $L(X)$ будуємо в інтервалі X двосторонню апроксимацію функції $f(x)$ вибраними нелінійними сплайнами.
4. Розв'язуємо рівняння (1) за допомогою алгоритму 1, знаходячи точки $\underline{x}^*$, $\overline{x}^*$ з рівнянь $\underline{p}(x)=0$, $\overline{p}(x)=0$, відповідно.

Результати обчислювальних експериментів. Оскільки для оцінки швидкості збіжності числової послідовності $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ у випадку $\|x_n - x*\| \ge 1$, де $x* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, не використовується поняття порядку збіжності, то в протилежному випадку скрізь далі використано поняття коефіцієнта K стиску ширини інтервалу, де $K=\omega(X_n)/\omega(X_{n+1})$, $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ — послідовність інтервіалів. При побудові потрібних функціональних інтервалів широко використовувалися методи та відповідні результати з [2].

Експеримент 1. За допомогою алгоритму 1 в інтервалі $X=[-2;5]$ здійснювався пошук з точністю 10^{-6} одночасно всіх дійсних коренів рівняння

$$(x^2-8x+7)\sin(2x-1)+\cos(5x+1)\,2^{2x-3}=0\,. \qquad (34)$$

Таблиця 1

Результати першого кроку алгоритму 1 знаходження коренів рівняння (34)

Початковий інтервал [-2; 5]			
Номер інтервалу	**Інтервал**	**Ширина інтервалу**	**Коефіцієнт стиску**
1	[-1.07119, -1.07096]	0.00023586	29678.6
2	[0.521458, 0.56304]	0.0415815	168.344
3	[1.06837, 1.14649]	0.0781129	89.6139
4	[2.02955, 2.04163]	0.0120744	579.741
5	[2.91036, 3.01583]	0.105472	66.3685
6	[3.85183, 3.85777]	0.00593867	1178.72
7	[4.53618, 4.54038]	0.00419872	1667.18

Далі пошук коренів рівняння (34) продовжуємо за алгоритмом 1 окремо в кожному з цих інтервалів. Зокрема

Таблиця 2

Результат знаходження коренів рівняння (34) в інтервалі [1.06837, 1.14649], за алгоритмом 1

Номер ітерації	Інтервал	Ширина інтервалу	Коефіцієнт стиску	Порядок збіжності
0	[1.06837, 1.146]	0.0781129	-	-
1	[1.1018, 1.10203]	0.000227954	342.701	3.28929
2	[1.101932420586795, 1.1019324227153457]	2.12855·10-9	108055.	2.38099

Корені рівняння (34) містяться в інтервалах [-1.07109, -1.07109], [0.537691, 0.537691], [1.10193, 1.10193], [2.03466, 2.03466], [3.85552, 3.85552], [4.53766, 4.53766].

Експеримент 2. За допомогою алгоритму 2 в інтервалі $X=[-2;5]$ реалізовано пошук максимального значення функції

$$y(x)=(x^2-8x+7)\sin(2x-1)-\cos(5x+1)\,2^{2x-3} \qquad (35)$$

Таблиця 3

Результати першого кроку алгоритму 2 знаходження максимального значення функції (35)

Номер ітерації	Інтервал	Ширина інтервалу	Коефіцієнт стиску
0	[-2; 5]	7	–
1	[4.14918, 4.32723]	0.178055	39.3136

Експеримент 3. За допомогою алгоритму 3 в інтервалі $X=[-2;\,5]$ здійснювався пошук з точністю 10^{-6} одночасно всіх дійсних коренів рівняння (34). У алгоритмі використані всі характерні точки елементарних функцій, з яких компонується похідна $f'(x)$ лівої частини рівняння (1).

Таблиця 4

Результати першого кроку алгоритму 3 знаходження коренів рівняння (34)

Номер інтервалу	Інтервал	Ширина інтервалу	Коефіцієнт стиску
1	[-1.10536, -1.06351]	0.041852	167.256
2	[0.439269, 0.61347]	0.174201	40.1834
3	[1.08113, 1.13225]	0.0511241	136.922
4	[2.0024, 2.07009]	0.0676874	103.417
5	[2.95978, 3.05188]	0.0920969	76.0069
6	[3.8491, 3.86451]	0.0154095	454.266
7	[4.53172, 4.54348]	0.0117587	595.304

Таблиця 5

Результат знаходження коренів рівняння (34) в інтервалі [-1.10536, -1.06351] за алгоритмом 3

Номер ітерації	Інтервал	Ширина інтервалу	Коефіцієнт стиску	Порядок збіжності
0	[-1.10536, -1.06351]	0.041852	–	–
1	[-1.0710922712230317, -1.0710922579613023]	$1.32617\cdot10^{-8}$	$3.1557\cdot10^{6}$	5.71537

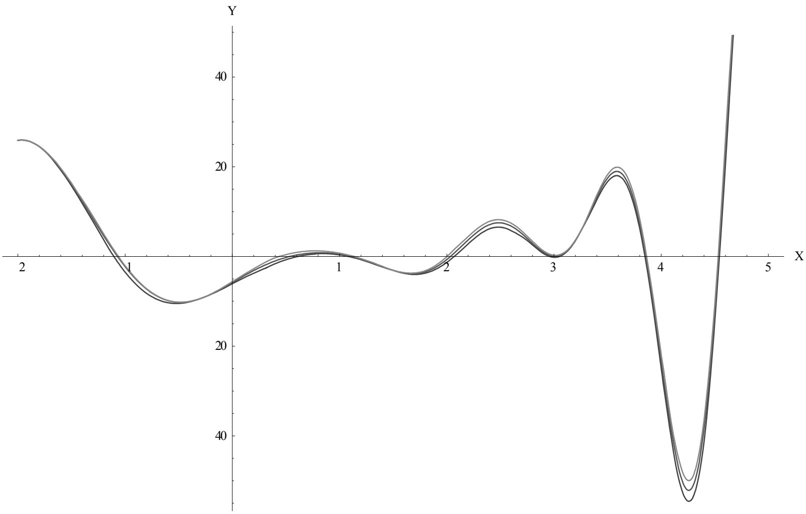

Рис. 2. *Двостороння апроксимація функції лівої частини рівняння (34)*

Висновки. Математика функціональних інтервалів дає можливість будувати і досліджувати ефективні методи розв'язування широкого кола задач та модифікації вже відомих методів.

В цій роботі запропоновані алгоритми розв'язування алгебраїчних та трасцендентних рівнянь і нерівностей, двосторонньої апроксимації функцій на заданому інтервалі нелінійними сплайнами, задач оптимізації тощо.

Характерно, що кожен запропонований алгоритм здійснює пошук у вказаному інтервалі з заданою точністю одночасно всіх розв'язків поставленої задачі. Ці алгоритми не мають проблеми початкового наближення. Їх можна застосовувати і для локалізації розв'язків поставленої задачі та вибору «хорошого» початкового наближення відповідних точкових ітераційних методів.

Результати проведених числових експериментів підтверджують високу ефективність запропонованих алгоритмів.

Список використаних джерел:

1. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. — М. : Мир, 1987. — 356 с.
2. Сеньо П. С. Арифметика лінійних функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. — 2014. — Вип. 21. — С. 38–57.
3. Сеньо П. С. Топологія простору лінійних функціональних інтервалів / П. С. Сеньо // Матем. та комп. моделювання. Серія: фізико-матем. науки. — 2014. — Вип. 11. — С. 209–223.
4. Markov S. M. On the presentation of ranges of monotone functions using interval arithmetic / S. M. Markov // Interval Computations. — 1992. — № 4 (6). — P. 19–31.

In the article there are suggested algorithms of solving algebraic and transcendental equations and inequalities. optimization problems. two-stage approximation of functions on the preset interval by nonlinear splines. It is proved the correctness of these applications as well as there are given the results of computing experiments.

Key words: *interval, functional interval, linear functional interval, interval width, quasilinear space, convergence, order of convergence.*

Отримано: 29.03.2016