

УДК 519.85

О. С. Пичугина, канд. физ.-мат. наук

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков

## ПОВЕРХНОСТНЫЕ И КОМБИНАТОРНЫЕ ОТСЕЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ЕВКЛИДОВОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В статье предложены две модификации метода комбинаторных отсечений (МКО) решения линейных задач на вершинно расположенных комбинаторных множествах, основанные на построении ужесточенных отсечений по отношению к МКО отсечений. Данные модификации — метод отсечений комбинаторного многогранника (МОКМ) и метод поверхностных отсечений (МПО) — основаны на решении вспомогательной задачи поиска ближайшей точки поверхности к точке в заданном направлении. При этом в МОКМ в качестве поверхности выступает граница комбинаторного многогранника, в МПО — описанная вокруг него гладкая выпуклая поверхность. Последнее позволяет строить отсечения, являющиеся ужесточением как для МКО, так и для МОКМ. Для применения МПО необходимо решить задачу поиска полиэдрально-поверхностного представления комбинаторного множества, в то время как МОКМ использует только аналитический вид многогранника.

**Ключевые слова:** *евклидово комбинаторное множество, условная линейная комбинаторная оптимизация, метод комбинаторных отсечений, поверхностные отсечения, полиэдральная и поверхностная релаксации, полиэдрально-сферическое представление.*

**Введение.** Методы отсечений в задачах дискретной оптимизации играют очень важную роль как один из способов получения точных решений. К тому же они применяются и в других комбинаторных методах, таких как метод ветвей и границ и пр. В приложении к линейным задачам данные методы основаны на свойствах допустимого дискретного множества и линейных функций на нем с целью построения как можно более жестких правильных отсечений. В данной работе изучается вопрос как исследование свойств нелинейных функций на дискретных множествах может помочь решению данной проблемы.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу оптимизации на евклидовом комбинаторном множестве (ЕКМ) [1]  $E$  :

$$f(x) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$x \in E \subset R^n : |E| < \infty, \quad (2)$$

$$h_i(x) = 0, \quad i \in J_{m'}^0, \quad (3)$$

$$h_{m'+i}(x) \leq 0, \quad i \in J_m^0, \quad (4)$$

где  $J_n = \{1, \dots, n\}$ ,  $J_n^0 = J_n \cup \emptyset$ .

В зависимости от числа  $m = m' + m''$  и вида функций

$$f(x), \{h_i(x)\}_{i \in J_m^0}, \quad (5)$$

задача (1)–(4) будет условной ( $m > 0$ ) или безусловной ( $m = 0$ ), линейной или нелинейной, выпуклой, квадратичной и т.п.

Дополнительно мы накладываем условие на вершинную расположенность комбинаторного множества  $E$ , что означает его совпадение с множеством вершин своей выпуклой оболочки [2]:

$$E = \text{vert } P. \quad (6)$$

$$P = \text{conv } E \text{ — комбинаторный многогранник.} \quad (7)$$

Обозначим через  $x^*$  — решение (1)–(4),(6).

Отметим, что (1)–(4), (6) охватывает достаточно широкий класс задач, поскольку к вершинно расположенным относятся такие множества как общее множество перестановок  $E_{nk}(G)$  ( $G = \{e_j^{n_j}\}_{j \in J_k}$ ,

$|G| = n$ ) [2], общее множество размещений  $E_{\eta 2}^n(G)$  [3] и общее множество сочетаний  $S_{\eta 2}^n(G)$  [3], индуцируемые двумя различными числами ( $G = \{e_1^{\eta_1}, e_2^{\eta_2}\}$ ,  $|G| = \eta$ ) и пр. В этот класс, в частности, входят все булевы задачи, известные множеством как теоретических, так и практических приложений [4, 5]. Более того, задача (1)–(4) на невершинно расположенных ( $E \neq \text{vert } P$ ) множествах сводится к одной или нескольким задачам вида (1)–(4), (6). Для этого перехода может потребоваться подъем в пространство большей размерности [6] или декомпозиция на вершинно расположенные подмножества [3]. Первый прием применим, например, для всех целочисленных задач, а также дискретных задач с допустимой областью вида:

$$E = \otimes_i E_i, \quad \text{где } \forall i E_i = \{e_{ij}\}_{j \in J_{\eta_i}} \quad [6]. \text{ Второй — для таких множеств как}$$

невершинно расположенные размещения и сочетания ( $E_{\eta k}^n(G)$ ,  $S_{\eta k}^n(G)$ ,  $\eta > n + 1$ ,  $k > 2$ ), их композиционные образы [7] и т.п.

**Замечание 1.** Будем полагать, что  $\dim P = n$ , иначе предварительно произведем проектирование в пространство меньшей размерности.

**Изложение основного материала.** Традиционные методы решения (1)–(4) включают методы ветвей и границ, релаксационные методы такие как методы отсечений, методы штрафных и барьерных функций и пр. [5, 6, 8–10]. Таким же образом можно решать и (1)–(4), (6). Однако учет условия (6) позволяет разработку методов, существенно использующих специфику множеств данного вида. Так метод комбинаторных отсечений (МКО) [12] решения линейных условных задач на вершинно расположенных множествах [2] обобщает идею целочисленных отсечений Гомори. Как известно [8], последние основаны на отсутствии целочисленных точек внутри ячеек целочисленной решетки. В МКО же используется отсутствие точек множеств вида (6) внутри многогранника (7) и его граней произвольной размерности [12].

Коротко опишем суть данного метода, после чего изложим пути его усовершенствования. Итак, предположим, что (1)–(4), (6) — условная линейная задача, т.е.  $m > 0$ , функции (5) — линейны:

$$f(x) = a_0'x; \quad h_i(x) = a_i'x + b_i', \quad i \in J_m. \quad (8)$$

Полагаем также, что система многогранника (7) известна:

$$P = \left\{ x \in R^n : Ax \leq b \right\}. \quad (9)$$

Обозначим через  $P'$  — допустимую область релаксационной задачи (1), (3), (4), (6). Тогда  $P'$  представляет собой многогранник, описываемый системой (3), (4), (8), (9).

**Замечание 2.** В дополнение к замечанию 1 будем полагать, что  $\dim P' = n$ , иначе предварительно производим проектирование в пространство размерности  $\dim P'$ . Теперь можно считать, что (3) выроджена и имеет место:

$$P' = \left\{ x \in R^n : Ax \leq b; \quad a_i'x + b_i' \leq 0, \quad i \in J_m \right\}. \quad (10)$$

Приведем схему МКО, после чего опишем предлагаемые нами модификации и каким образом они изменяют данную схему.

### Описание итерационного процесса МКО:

**Шаг 0.** Начальная итерация  $j = 0$ , область поиска —  $P^j = P'$ , число дополнительных ограничений  $m^j = m$ .

**Шаг 1 (Основной этап).** Решаем линейную полиэдральную релаксационную задачу (1):

$$x \in P^j \quad (11)$$

и обозначим ее решение —  $x^j$ .

Если  $x^j \in E$ , исходная задача решена ( $x^* = x^j$ ). В противном случае, из  $n' \geq n$  ребер многогранника  $P^j$ , образующих  $x^j$ , выбираем произвольные  $n$  и определяем координаты концов этих ребер в  $P'$ :

$$X^j = \left\{ x^{jl} \right\}_{l \in J_n} \in \text{vert } P' : x^j \leftrightarrow x^{jl}, l \in J_n. \quad (12)$$

Через точки (12) формуємо гіперплоскість

$$\Pi^j = \left\{ x : a_{m^j+1}^j x - b_{m^j+1}^j = 0 \right\} \quad (13)$$

і відповідне правильне відсічення для точки  $x^j$ :

$$a_{m^j+1}^j x - b_{m^j+1}^j \leq 0 : a_{m^j+1}^j x^j - b_{m^j+1}^j > 0, \quad (14)$$

збільшуючи, тим самим, систему (4) на одне обмеження. В результаті для множини (12) виконано:

$$X^j \subset \Pi_j. \quad (15)$$

**Шаг 2.** Переходим к следующей итерации:

$$P^{j+1} = \left\{ x \in P^j : a_{m^j+1}^j x - b_{m^j+1}^j \leq 0 \right\}, j = j+1, m^j = m^{j-1} + 1.$$

Повторяем шаги 1-2 до тех пор, пока не будет получена допустимая точка  $E$ :

$$x^j \in E,$$

которая и является искомым решением:  $x^* = x^j$ .

**Модификация 1: Метод отсечений комбинаторного многогранника (МОКМ).** Заметим, что МКО использует отсутствие точек внутри многогранника  $P'$  и его граней. Первая модификация, которую мы предлагаем, основана на отсутствии допустимых точек  $E$  внутри всего многогранного конуса с вершиной в  $x^j$  вплоть до пересечения его ребер с поверхностью  $P$ .

Прежде всего, сформулируем вспомогательную задачу и решим ее для множества бинарных векторов.

**Задача поиска ближайшей гиперграни многогранника к точке в заданном направлении.**

**Определение** [13]. Гипергрань  $\Pi$  многогранника  $P$ , ближайшая к точке  $y$  в направлении вектора  $\vec{c}$ , — это гипергрань, пересекающая луч  $[y, y + \vec{c})$  в точке  $z$ , так что расстояние от точки  $y$  до точки  $z$  минимально.

При этом точку  $z \in GP$  будем называть ближайшей точкой гиперграни  $\Pi$  к точке  $y$  в направлении вектора  $\vec{c}$ .

Поиск ближайшей гиперграни  $\Pi$  к заданной точке в заданном направлении и точки  $z$  пересечения луча  $[y, y + \vec{c})$  с  $\Pi$  (далее **Задача 1**) осуществляется для каждого типа ЕКМ по-разному. Так, на-

пример, для множества  $E_{nk}(G)$  в [13] предложена схема, основанная на ортогональном проектировании общего перестановочного множества в пространство меньшей размерности и вписанности этого множества, соответствующего многогранника и всех его граней в сферы различной размерности.

**Решение Задачи 1 на множестве бинарных векторов  $B_n'$ .** Так для множества  $\bar{E}_2^n(G)$  размещений с повторениями из двух элементов:

$$\bar{E}_2^n(G) = E_{2n,2}^n(G), G = \{e_1^n, e_2^n\}, e_1 < e_2, \quad (16)$$

такая задача может быть решена следующим образом.

**Замечание 3.** Не ограничивая общности, будем считать, что в (16)  $G = \{-1^n, 1^n\}$ , т.е. рассматривается бинарное множество [4]:

$$B_n' = \{-1, 1\}^n, \quad (17)$$

поскольку от произвольного  $\bar{E}_2^n(G)$  можно легко перейти к (17), введя замену переменных:

$$x_i \rightarrow -1 + 2 \frac{x_i - e_1}{e_2 - e_1}, i \in J_n. \quad (18)$$

Многогранник множества (17) представляет собой гиперкуб:

$$PB_n' = \text{conv } B_n' = [-1, 1]^n, \quad (19)$$

а его поверхность  $S = \Gamma PB_n'$  – кусочно-линейная и состоит из  $2n$  «кусточков», задаваемых уравнениями:

$$x_i = -1, x_i = 1, i \in J_n. \quad (20)$$

Пусть  $y$  — внутренняя точка (19):

$$y \in PB_n^0. \quad (21)$$

Найдем ближайшую гипергрань  $PB_n$  к точке  $y$  в направлении  $\bar{c} \neq 0$  и ближайшую точку  $z$  к точке  $y$  на этой гипергранев направлении  $\bar{c}$ . Точки  $y, z$  лежат на прямой, задаваемой уравнением:

$$x = y + t \cdot \bar{c}, \quad (22)$$

т.е. существует пороговое значение параметра  $t_i^*$ :

$$t_i^* > 0, \quad (23)$$

$$z = y + t_i^* \bar{c}. \quad (24)$$

Нетрудно определить, какого граничного значения достигает каждая координата при движении от точки  $y$  до  $z \in S$  в направлении век-

тора  $\vec{c}$ . В самом деле, исходя из (20), для  $z$  существует единичная координата среди  $z_i$ ,  $i \in I^+$  или координата  $-1$  среди  $z_i$ ,  $i \in I^-$ , где

$$I^+ = \{i \in J_n : c_i > 0\}, \quad I^- = \{i \in J_n : c_i < 0\}. \quad (25)$$

Определим набор потенциальных пороговых значений параметра  $t$ :

$$z_i = y_i + t_i c_i = 1, \quad i \in I^+; \quad z_i = y_i + t_i c_i = -1, \quad i \in I^-, \quad (26)$$

и сформируем из них мультимножество  $T = \{t_i\}_i$ :

$$t_i = \begin{cases} \frac{1 - y_i}{c_i}, & i \in I^+; \\ \frac{-1 - y_i}{c_i}, & i \in I^-; \quad t_i = \infty, \quad c_i = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Точке  $z$  будет отвечать минимальное по модулю значение  $t \in T$ , а поскольку по построению (см. (27))  $T > 0$ , итоговая формула для выбора  $i^z$  —

$$i^z : t_{i^z} = \min_{i \in T} t, \quad (28)$$

при котором (23) выполнено.

Соответственно, ближайшая гипергрань  $PB'_n$  к точке  $y$  в направлении  $\vec{c}$ :

$$\Pi : z_{i^z} = \begin{cases} 1, & \text{если } i_z \in I^+, \\ -1, & \text{если } i_z \in I^-. \end{cases} \quad (29)$$

Искомая же точка  $z$  определяется из (24), (28) и будет характеризоваться свойством:  $|z_i| = 1 \Leftrightarrow t_i = t_{i^z}$  ( $i \in J_n$ ).

**Решение Задачи 1 на множестве бинарных векторов  $B'_n(k_1, k_2)$ .** Результат предыдущего пункта легко обобщается на подмножество бинарных векторов  $B'_n(k_1, k_2) \subseteq B'_n$  с возможными ограничениями на кратности  $\pm 1$ :

$$B'_n(k_1, k_2) = E_{\eta 2}^n(G), \quad G = \{-1^{n-k_1}, 1^{k_2}\}, \quad (30)$$

$$\eta = n + k_2 - k_1 > n, \quad 0 \leq k_1 < k_2 \leq n$$

представляющее собой евклидово комбинаторное множество размещений из двух различных элементов  $\pm 1$ .

Многогранник  $PB'_n(k_1, k_2) = \text{conv}B'_n(k_1, k_2)$  множества (30) представляет собой гиперкуб (19), усеченный максимум с двух сторон:

$$PB'_n(k_1, k_2) = \left\{ x \in PB'_n : 2k_1 - n \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq 2k_2 - n \right\}. \quad (31)$$

Исходя из (31), предлагается следующая схема решения Задачи 1 поиска ближайшей гиперграни  $PB'_n(k_1, k_2)$  к точке  $y \in PB_n^0(k_1, k_2)$  в направлении  $\vec{c}$ . Обозначим ограничивающие сумму координат плоскости в (31) следующим образом:

$$H_1 = \left\{ x : \sum_{i=1}^n x_i = 2k_1 - n \right\}, \quad H_2 = \left\{ x : \sum_{i=1}^n x_i = 2k_2 - n \right\}, \quad (32)$$

ближайшие гипер граник  $y$  многогранников  $PB'_n, PB'_n(k_1, k_2)$  — через  $\Pi, \Pi'$ , а точки пересечения луча  $[y, y + \vec{c})$  с  $\Pi, \Pi'$  — через  $z, z'$ .

Найдем  $z$  согласно (24), (28) и  $\Pi$  согласно (29). Если  $z \in PB'_n(k_1, k_2)$ , задача решена ( $z' = z, \Pi' = \Pi$ ). Иначе,

- если

$$\sum_{i=1}^n z_i < 2k_1 - n, \text{ то } z' = [y, z) \cap H_1, \quad \Pi' = H_1; \quad (33)$$

- если

$$\sum_{i=1}^n z_i > 2k_2 - n, \text{ то } z' = [y, z) \cap H_2, \quad \Pi' = H_2. \quad (34)$$

В последнем случае, чтобы найти точку  $z'$ , зафиксируем  $j = 1$  при выполнении (33) или  $j = 2$  при выполнении (34) и, по аналогии с (24), определим пороговый параметр  $t_{z'} : 0 < t_{z'} < t_{z'}$ ,

$$z' = y + t_{z'} \cdot \vec{c}. \quad (35)$$

Подставляя (35) в (32), имеем:

$$2k_j - n = z' \cdot e = (y + t_{z'} \cdot \vec{c}) \cdot e = y \cdot e + t_{z'} \cdot \vec{c} \cdot e.$$

Откуда

$$t_{z'} = \frac{2k_j - n - y \cdot e}{\vec{c} \cdot e}, \quad (36)$$

и искомая точка  $z'$  определяется из (35), (36), а  $\Pi'$  — из (33) или (34).

**Решение Задачи 1 на множестве  $B'_n(k)$ .** Рассмотрим еще одно бинарное множество —

$$B'_n(k) = E_{n2}(G), \quad G = \{-1^{n-k}, 1^k\}, \quad (37)$$

представляющее собой ЕКМ общих перестановок [2] из  $\pm 1$ .

Как известно, размерность перестановочного многогранника  $n-1$  [2, 3], соответственно,  $\dim PB'_n(k) = n-1$ , где  $PB'_n(k) = \text{conv}B'_n(k)$ . В соответствии с замечанием 1, проведем проектирование в пространство размерности  $n-1$ . Это может быть сделано исключением из рассмотрения последней координаты, в результате чего в проекции на  $x_n = 0$  образуется множество вида (30):

$$E' = E_{n2}^{n-1}(G), \quad G = \{-1^{n-k}, 1^k\}, \quad (38)$$

для которого применимы рассуждения предыдущего пункта, с учетом, что  $k_1 = k-1$ ,  $k_2 = k$ ,  $n = n-1$ . А именно:

- (32) преобразуется в:

$$H_1 = \left\{ x' \in R^{n-1} : \sum_{i=1}^{n-1} x_i = 2(k-1) - n = 2k - n - 2 = k - x_n \right\}, \quad (39)$$

$$H_2 = \left\{ x' \in R^{n-1} : \sum_{i=1}^{n-1} x_i = 2k - n = k - x_n \right\},$$

где  $x' = (x_i)_{i \in J_{n-1}}$  — проекция вектора  $x$ .

(39) также переписывается в виде:

$$H_1 = \{x \in R^n : x_n = n - k + 2\}, \quad H_2 = \{x \in R^n : x_n = n - k\},$$

откуда видно, что  $H_1, H_2$  представляет собой ограничивающие плоскости для  $n$ -ой координаты;

- (25) превращается в

$$I^+ = \{i \in J_{n-1} : c_i > 0\}, \quad I^- = \{i \in J_{n-1} : c_i < 0\};$$

- а (33), (34) принимает вид следующих условий:

- если  $\sum_{i=1}^{n-1} z_i < 2k - n - 2$  (или  $z_n > n - k + 2$ ), то  $z' = [y, z] \cap H_1$ ,

$$\Pi' = H_1;$$

- если  $\sum_{i=1}^{n-1} z_i > 2k - n$  (или  $z_n < n - k$ ), то  $z' = [y, z] \cap H_2$ ,

$$\Pi' = H_2;$$

- (36) превращается в

$$t_{z'} = \frac{2k_j - n - \sum_{i=1}^{n-1} y_i}{\sum_{i=1}^{n-1} c_i}.$$



**Описание итерационного процесса МОКМ.** Предположим,  $E$  — множество вида (6), для которого Задача 1 решена.

Для таких множеств предлагается следующая модификация МКО, которую мы назвали методом отсечений комбинаторного многогранника (МОКМ).

1. На  $j$ -ой итерации основного этапа (см. Шаг 1 МКО) ребра многогранника  $P^j$ :

$$[x^j, x^{jl}], l \in J_n, \quad (40)$$

определяемые из (12), продляются до пересечения с поверхностью многогранника  $P$  и формируется множество концов соответствующих продолжений ребер:

$$Y^j = \{y^{jl}\}_{l \in J_n} \in GP. \quad (41)$$

Для определения точек (41) решаются  $n$  подзадач поиска ближайших гиперграней  $P$  к  $x^j$  в направлении

$$\bar{c}^{jl} = x^{jl} - x^j, l \in J_n, \quad (42)$$

а также точек их пересечения с прямыми  $x = x^j + t \cdot x^{jl}, l \in J_n$ .

2. Отсекающая гиперплоскость (13) и правильное отсечение (14) строятся через точки (41), т.о. условие (15) в МКО-отсечении (13)–(15) преобразуется в:

$$Y^j \subset \Pi_j. \quad (43)$$

**Замечание 4.** В случае, если  $X^j \not\subset GP$ , такое отсечение будет ужесточением по сравнению с МКО-отсечением, в противном случае — просто МКО отсечением.

3. Далее процесс продолжается аналогично МКО с корректировкой на данную схему построения отсечения.

**Замечание 5.** Основным преимуществом МОКМ по сравнению с МКО является использование отсутствия точек  $E$  внутри граней  $P$ , а не  $P'$ , что и позволяет строить ужесточенные отсечения. Использование МОКМ-отсечений (13), (14), (43) в надмножестве  $P'$ , которым является  $P$ , позволяет ожидать более быстрого получения решения  $x^*$ .

Помимо этого, следует отметить, что точки (12) без труда извлекаются только из симплекс-таблицы, содержащей все ограничения (9) и (3), (4). Однако оперирование с такой системой для комбинаторных многогранников, как правило, проблематично в силу неполиномиального числа ограничений в их системах [2, 3]. Так, например, система ограничений перестановочного многогранника  $P_{\eta k}(G) = conv E_{\eta k}(G)$  может содержать до  $2^n$  ограничений, многогранника общих размещений — до  $2^{n+1}$ . Поэтому для решения (1), (3), (4), (8), (9), как правило, применяет-

ся метод последовательного подсоединения ограничений [3], где на начальной стадии выбирается небольшая подсистема (9), задающая ограниченную область, а также дополнительные ограничения (3), (4). Исходная задача решается в этой области и в случае, если ее решение — недопустимая точка  $P$ , все или часть нарушающихся в ней ограничений (9) добавляются в систему и процесс итерационно повторяется. В результате такого приема формируется точка  $x^0 \in P'$ , а необходимое число образующих ее ребер ( $n$ ) для построения отсечения определяется из сформированной частичной симплекс-таблицы. Заметим, однако, что для определения смежных вершин (12) могут потребоваться ресурсы, значительно большие, чем для формирования (41).

**Модификация 2: Метод поверхностных отсечений (МПО).** Используем тот факт, что точки произвольного вершинно расположенного множества  $E$  могут быть представлены пересечением многогранника и описанной вокруг  $E$  гладкой выпуклой поверхности, поэтому отсечения могут производиться непосредственно на данной поверхности, при этом одновременно будет отсечена и большая недопустимая область комбинаторного многогранника в сравнении с МКО и МОКМ.

**Определение [14]. Полиэдрально-поверхностным** называется представление евклидова комбинаторного множества как пересечения соответствующего многогранника и описанной вокруг этого многогранника выпуклой поверхности:

$$E = P \cap S, \quad (44)$$

где

$$S = \{x \in R^n : h_0(x) = 0\}, \quad h_0(x) \text{ — выпукла}. \quad (45)$$

**Замечание 5.** Для множеств типа (6) такие представления существуют, поскольку  $P$  представляет собой выпуклое тело и всегда существует гладкая выпуклая поверхность  $S : P \subset C$ ,

$$C = \text{conv}S, \quad (46)$$

ограничивающая выпуклое тело  $C$  минимального объема. Очевидно,  $E$  будет вписано в нее, т.е.  $E \subset S$ , иначе получаем противоречие тому, что  $C$  имеет минимальный объем.

Добавим к (45) для определенности условие гладкости  $h_0(x)$ , тогда для выполнения (44) достаточно, чтобы выполнялось:

$$S = \{x \in R^n : h_0(x) = 0\}, \quad h_0(x) \text{ — гладкая и выпуклая}, \quad (47)$$

$$E \subset S. \quad (48)$$

Теперь для решения задачи поиска полиэдрально-поверхностного представления множества  $E$  достаточно найти аналитический вид системы (9) и уравнение поверхности (47). Такое представление  $E$  интересно тем, что позволяет использовать два типа непрерывных релаксаций (1), (2):

$$\text{Релаксация 1-} f(x) \rightarrow \min_{x \in P}, \text{Релаксация 2-} f(x) \rightarrow \min_{x \in S}, \quad (49)$$

первая из которых представляет собой традиционную полиэдральную релаксацию [4–6, 10–11, 14], вторая — поверхностную [14].

В приложении к задаче (1)–(4), (6), (8), которая может быть переформулирована следующим образом:

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in E'}, \quad (50)$$

где

$$E' = E \cap P' \quad (51)$$

допустимая область (1)–(4), (8), это означает возможность рассмотрения еще двух релаксаций (50), полученных из (49) добавлением дополнительных ограничений (3), (4), (8):

$$\text{Релаксация 1.1-} f(x) \rightarrow \min_{x \in P'}, \text{Релаксация 2.1-} f(x) \rightarrow \min_{x \in S'}, \quad (52)$$

где  $S' = \{x \in S: x \text{ удовлетворяет (3), (4), (8)}\}$ .

Более того, введя обозначение  $P'' = \text{conv } E'$ , можно рассмотреть ужесточение Релаксации 1.1 вида:

$$\text{Релаксация 1.2-} f(x) \rightarrow \min_{x \in P''}.$$

На начальной итерации МКО, МОКМ решается релаксационная задача типа 1.1, на оставшихся итерациях происходит постепенное формирование Релаксации 1.2.

В отличие от упомянутых полиэдральных релаксаций, МПО основан на поверхностной Релаксации 2.1. Ее применение представляется перспективным, поскольку позволяет использовать отсутствие точек  $E$  на абсолютной части поверхности  $S$ , а также внутри ограниченного ею выпуклого тела (46) и, как следствие, внутри комбинаторного многогранника.

Заметим, что сформулированная в задаче поиска ближайшей гиперплоскости многогранника к заданной точке и в заданном направлении — это, в частности, задача поиска ближайшей к  $y$  точки  $z$  поверхности  $S = GP$ . Сформулируем обобщение к Задаче 1, где в качестве  $S$  выступает произвольная выпуклая поверхность в  $R^n$  (см. (45)).

**Определение.** Точка  $z$ , где  $S$  — поверхность, называется ближайшей точкой поверхности  $S$  к точке  $y$  в направлении вектора  $\vec{c}$ , если расстояние от точки  $y$  до точки  $z$  минимально среди точек пересечения  $S$  с лучом  $[y, y + \vec{c})$ .

Решим задачу поиска ближайшей точки  $z$  поверхности (45) к точке  $y$  в заданном направлении (далее **Задача 2**), обобщив резуль-

таты с кусочно-линейной поверхности  $S = \Gamma P$  на произвольную выпуклую поверхность (45):

Для определения  $z$  в данном случае достаточно решить систему (24),

$$h_0(y + t\vec{c}) = 0, \quad (53)$$

которая, в силу выпуклости  $S$ , имеет не более двух решений. Более того, если  $z$  — внутренняя точка выпуклого тела (46) ( $z \in C^0$ ), решений

$$h_0(z) = 0 \quad (54)$$

будет в точности два:

$$z^j = y + t^j \vec{c}, j \in \{1, 2\}, t^1 < 0 < t^2. \quad (55)$$

При этом, согласно (23), точка  $z$  будет соответствовать положительному параметру:  $z = z^2$ , т.е.

$$z = y + t^z \vec{c}, \text{ где } t^z = t^2. \quad (56)$$

**Решение Задачи 2 для полиэдрально-сферических множеств.** Произвольное конечное ЕКМ называется полиэдрально-сферическим множеством [14], если оно вписано в сферу:  $E \subset S_r(a)$ , где  $S_r(a) = \{x : (x - a)^2 = r^2\}$  — гиперсфера радиуса  $r$  с центром  $a$ . Для таких множеств существует полиэдрально-поверхностное представление вида (44), (47) с  $S = S_r(a)$ , называемое полиэдрально-сферическим [14], а функция  $h_0(x)$  в (47) имеет вид:  $h_0(x) = (x - a)^2 - r^2 = 0$ . Учитывая (54), для искомой точки  $z$  получаем:  $h_0(z) = (z - a)^2 - r^2 = 0$ , а учитывая (53), имеем:

$$\begin{aligned} (z - a)^2 &= (y + t\vec{c} - a)^2 = (t\vec{c} + (y - a))^2 = r^2, \\ \vec{c}^2 t^2 + 2\vec{c} \cdot (y - a)t + ((y - a)^2 - r^2) &= 0, \\ \Delta = \frac{D}{4} &= ((y - a)^2 - r^2) - \vec{c}^2 ((y - a)^2 - r^2), \\ t^{1,2} &= \frac{\vec{c} \cdot (a - y) \pm \sqrt{\Delta}}{\vec{c}^2}. \end{aligned} \quad (57)$$

Откуда, согласно (55), (56),

$$t^z = \frac{\vec{c} \cdot (a - y) + \sqrt{\Delta}}{\vec{c}^2}, \quad (58)$$

где  $\Delta$  определяется из (57).

Учитывая (57), из (58) окончательно имеем:

$$t^z = \frac{\bar{c} \cdot (a - y) + \sqrt{(\bar{c} \cdot (y - a))^2 - \bar{c}^2 \left( (y - a)^2 - r^2 \right)}}{\bar{c}^{-2}}, \quad (59)$$

Упростим (57), введя в рассмотрение угол  $\alpha = \widehat{\bar{c}, a - y}$ :

$$\begin{aligned} \Delta &= \|\bar{c}\|^2 r^2 - \left( \|\bar{c}\|^2 \|y - a\|^2 - (\bar{c} \cdot (y - a))^2 \right) = \|\bar{c}\|^2 r^2 - \\ &- \left( \|\bar{c}\|^2 \|y - a\|^2 - \|\bar{c}\|^2 \|y - a\|^2 \cos^2 \alpha \right) = \|\bar{c}\|^2 r^2 - \|\bar{c}\|^2 \|y - a\|^2 \sin^2 \alpha = \\ &= \|\bar{c}\|^2 r^2 - \|\bar{c} \times (y - a)\|^2. \end{aligned}$$

Теперь (59) переписывается в виде:

$$t^z = \frac{\bar{c} \cdot (a - y) + \sqrt{\|\bar{c}\|^2 r^2 - \|\bar{c}\|^2 \|y - a\|^2 \sin^2 \alpha}}{\bar{c}^{-2}}$$

или

$$t^z = \frac{\bar{c} \cdot (a - y) + \sqrt{\|\bar{c}\|^2 r^2 - \|\bar{c} \times (y - a)\|^2}}{\bar{c}^{-2}}, \quad (60)$$

а искомая точка  $z$  определяется из (56), (60).

**Описание итерационного процесса МПО.** Рассмотрим  $E$  — множество типа (6), построим его гладкое полиэдрально-поверхностное представление (9), (44), (47) и решим для него Задачу 2 (см. пример решения в предыдущем пункте).

Итак, в случае МПО, на  $j$ -ой итерации основного этапа:

- 1) ребра (40) продляются до пересечения с поверхностью  $S$  и формируется множество:

$$Z^j = \{z^{jl}\}_{l \in J_n} \subset S. \quad (61)$$

С этой целью  $\forall l \in J_n$  при помощи (54), (56) определяются ближайшие точки  $S$  к  $x^j$  в направлении (42):

$$z^{jl} = x^j + t^{z^{jl}} \bar{c}^{jl}, \text{ где } t^{z^{jl}} > 0, h_0(z^{jl}) = 0;$$

- 2) далее формируются гиперплоскость (13) и правильное отсечение (14) по точкам (61), модифицируя, тем самым, условие (15) в МКО-отсечении в:

$$Z^j \subset \Pi_j. \quad (62)$$

Нетрудно видеть, что если  $X^j \not\subset S_r(a)$  ( $Y^j \not\subset S_r(a)$ ), такое МПО отсечение будет ужесточением по сравнению с соответствующим

МОКМ-отсечением (см. (13), (14), (43)), следовательно, согласно замечанию 4, — ужесточением и по сравнению с МКО-отсечением.

В остальном процесс получения решения  $x^*$  идентичен МКО.

**Графическая иллюстрация МКО, МОКМ, МПО.** Продемонстрируем все три схемы решения (1)–(4) и получения  $x^0$  на примере, показанном на рисунках 1–4. На рис. 1 изображено множество  $E$ , совпадающее с множеством вершин правильного 10-тиугольника ( $|E| = 10$ ). Серым показан многогранник дополнительных ограничений (3), (8), содержащий  $m = m'' = 8$  ограничений. Также показаны вектор целевой функции  $a_0'$ , начальное решение  $x^0$  полиэдральной релаксационной задачи (52) и искомое решение  $x^*$ . Как видно, между  $x^0$  и  $x^*$  большой разрыв, который можно преодолеть за несколько итераций при любой схеме отсечений из вышеприведенных. Также на рис. 1 показаны начальные ( $j = 0$ ) отсечения по всем трем схемам. Сравним все три схемы: отсекающие гиперплоскости (13) соответствуют отрезкам  $[x^{01}, x^{02}]$  для МКО (см. (15)),  $[y^{01}, y^{02}]$  — для МОКМ (см. (43)),  $[z^{01}, z^{02}]$  — для МПО (см. (62)). Как и ожидалось, МПО-отсечение — лучшее. Процесс получения точки  $x^*$  показан для МКО на рис. 2, для МОКМ — на рис. 3, для МПО — на рис. 4. Как видно, в каждом случае для получения решения потребовалось пять итераций, несмотря на то, что на каждой итерации сохранялась обозначенная тенденция, что МОКМ-отсечения — жестче аналогичных для МКО-отсечений, а МПО-отсечения — жестче соответствующих для МОКМ.

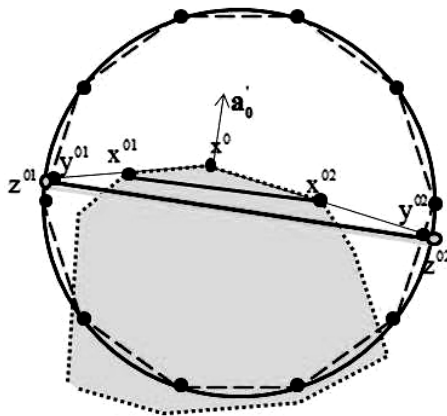


Рис. 1. Сравнение отсечений МКО, МОКМ, МПО для  $x^0$

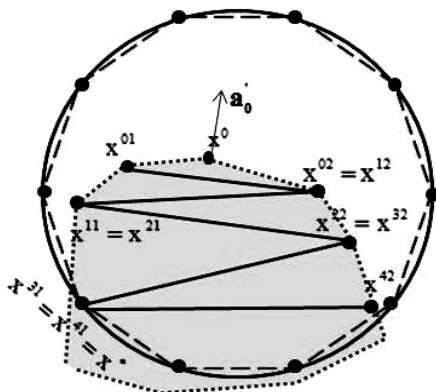


Рис. 2. МКО последовательность

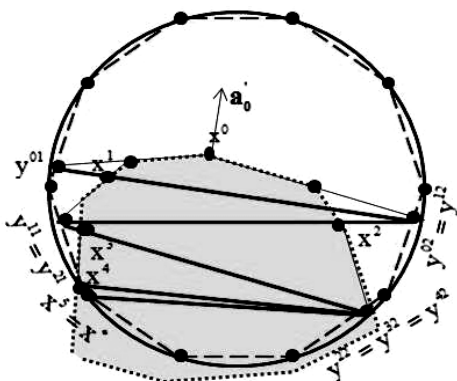


Рис. 3. ПОКМ последовательность

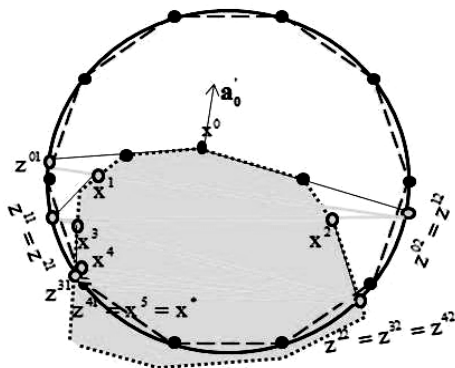


Рис. 4. МПО последовательность

**Выводы.** В данной статье исследуются методы построения отсечений в задачах условной дискретной оптимизации, основанные на исследовании свойств допустимых комбинаторных множеств, а также линейных и нелинейных функций на них. Так для класса вершинно расположенных множеств, системы многогранников которых известны, предлагается метод отсечений комбинаторного многогранника (МОКМ). Если к тому же для рассматриваемого множества получена гладкая выпуклая описанная поверхность, предлагается использовать метод поверхностных отсечений (МПО), который особенно эффективен для полиэдрально-сферических множеств, поскольку вспомогательные задачи для них решаются явно.

### Список использованных источников:

1. Стоян Ю. Г. Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств / Ю. Г. Стоян. — Харьков, 1980. — 22 с. — (Препринт АН УССР / Институт проблем машиностр.; 85)
2. Стоян Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. — К. : Наук. думка, 1986. — 268 с.
3. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. — К. : Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993. — 188 с.
4. Kochenberger G. The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey / G. Kochenberger, J.-K. Hao, F. Glover and other // Journal of Combinatorial Optimization. — 2014. — № 1. — P. 58–81.
5. Hillier F. S. Continuous Approaches for Solving Discrete Optimization Problems / F. S. Hillier, G. Appa, L. Pitsoulis and other // Handbook on Modelling for Discrete Optimization. — 2006. — P. 1–39.
6. Писарук Н. Н. Модели и методы смешанно-целочисленного программирования / Н. Н. Писарук. — Минск : Изд-во БГУ, 2008. — 250 с.
7. Гребенник И. В. Генерация комбинаторных множеств с заданными свойствами / И. В. Гребенник, А. С. Литвиненко // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 6. — С. 96–105.
8. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. — М. : Мир, 1984. — 512 с.
9. Bertsekas D. P. Nonlinear Programming / D. P. Bertsekas. — Belmont : Athena Scientific, 1995. — 378 p.
10. Sherali H. D. A reformulation-linearization technique for solving discrete and continuous nonconvex problems / H. D. Sherali, W. P. Adams ; edited by P. M. Pardalos. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. — 120 p.
11. Approximation and Complexity in Numerical Optimization: Continuous and Discrete Problems / edited by P. M. Pardalos. — Boston : Kluwer Academic Publishers, 2000. — 581 p.
12. Ємець О. О. Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації / О. О. Ємець, Є. М. Ємець // Доп. НАН України. — 2000. — № 9. — С. 105–109.
13. Стоян Ю. Г. Квадратичная оптимизация на комбинаторных множествах в  $R^n$  / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, О. В. Паршин // Кибернетика и системный анализ. — 1991. — № 4. — С. 97–104.



14. Пичугина О.С. Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества / О. С. Пичугина, С. В. Яковлев // Eastern-European Journal of Enterprise Technologie. — 2016. — № 1. — С. 27–38.

The article presents two improvements of the method of combinatorial cuttings (MCC) for linear problems over vertex located combinatorial sets based on the construction of tightening cuttings to MCC ones. These modifications are a method of combinatorial polyhedron cuttings (MCPC) and the method of surface cuttings (MSC). They are based on solving an auxiliary problem of finding the nearest point on a surface to a point in a given direction. In the MCPC the surface is a boundary of the corresponding combinatorial polytope; in the MSC — it is a smooth convex surface circumscribed around the combinatorial set. The last one allows construction cuttings that are tighter than MSC-ones as for the MCC, as for the MCPC. To apply the MSC, a problem of constructing a polyhedron-surface representation of the combinatorial set needs to be solved, whilst the MOKM utilises only the analytical description of the poly tope.

**Key words:** *the Euclidean combinatorial set, constrained linear combinatorial optimization, the method of combinatorial cuttings, surface cuttings, polyhedral and surface relaxations, a polyhedral-spherical representation.*

Отримано: 11.03.2016

УДК 517.927

**В. Б. Поселюжна**, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль

## **ДО ПИТАННЯ УМОВИ ЗАСТОСУВАННЯ МОДИФІКОВАНОГО КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ**

У статті досліджується умови застосування модифікованого колокаційно-ітеративного методу розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь. Запропоновано алгоритм методу, встановлено умови збіжності

**Ключові слова:** *інтегральне рівняння, колокаційно-ітеративний метод, збіжність методу.*

**Вступ.** При математичному описанні різних явищ природи часто приходять до математичних моделей, що описуються диференціальними, інтегральними, інтегрально-функціональними та функціонально-диференціальними рівняннями, які дають змогу проникнути в мікросвіт детермінованих явищ і процесів, описати механізм їх розвитку і тим самим передбачити їх майбутнє.

В наш час існують різні методи дослідження та побудови розв'язків цих рівнянь. Разом з тим, точний розв'язок таких рівнянь аналі-