ук.-техн. конф. з міжнародною участю, 18-21 травня 2010р., Харків. — Харків, 2010. — Ч. 2. — С. 211–213.
14. Литвин О. М. Оператори кусково-сталої сплайн-інтерлінації та 2 D-коефіцієнти Фур'є на класі Гьольдера / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях : труды науч.-техн. конф. с междунар. участием, Харьков, 24-27 апреля 2012 г. — Харків, 2012. — С. 262–265.
15. Lytvyn O. N. Methods in the Multivariate Digital Signal Processing with Using Spline-interlineation / O. N. Lytvyn, O. P. Nechuyviter // Proceeding of IASTED International Conferences on Automation, Control and Information Technology (ASIT 2010) (June 15–18 2010). — Novosibirsk, 2010. — P. 90–96.
16. Литвин О. М. Наближене обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Таврійський вісник інформатики та математики. — 2012. — № 1. — С. 66–72.

The paper is devoted to cubature formulas of the evaluating of two-dimensional integral from trigonometric function with using spline-interlineation on the class of differentiable functions in case when information about function is a set of lines.

Key words: *interlineation, cubature formula, two-dimensional integral from trigonometrical function, class of differentiable functions.*

Отримано: 29.03.2016

УДК 517.912

О. М. Омелян, канд. фіз.-мат. наук,
М. М. Сєрова, канд. фіз.-мат. наук

Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, м. Полтава

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ НЕЛОКАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

У роботі розв'язана задача застосування нелокальних перетворень еквівалентності для лінеаризації та знаходження нелокальних анзаців нелінійної системи рівнянь конвекції-дифузії.

Ключові слова: *система рівнянь конвекці-дифузії, лінеаризація, нелокальні перетворення еквівалентності, нелокальні анзаци, нелокальна редукція.*

Вступ. У роботах [11, 8] наведені нелокальні перетворення, які нелінійне рівняння дифузії $u_t = \partial(u^{-2}u_x)$ зводять до лінійного $z_t = z_{xx}$. У роботі [9] ці перетворення узагальнені і показано, що за допомогою даних перетворень нелінійне рівняння дифузії

$$u_t = \partial_x [f(u) u_x], \tag{1}$$

де $u = u(t, x)$, $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $f(u)$ — довільна гладка функція, зводиться до рівняння того ж класу.

У роботі [6] дані перетворення використані для побудови нелокальних анзаців, які редукують рівняння (1) до звичайних диференціальних рівнянь, лінеаризації рівняння (1), побудови нелокальних формул розмноження його розв'язків.

У роботах [3–4] поставлена та розв'язана задача узагальнення результатів робіт [8, 6] на випадок системи нелінійних рівнянь дифузії:

$$U_t = \partial_x [f(U) U_x], \tag{2}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $f(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(t, x)$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$ — довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1,2}$.

У роботах [12–13] нелокальні перетворення еквівалентності застосовані для розширення класів розв'язків нелінійних рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$u_t = \partial_x [f(u) u_x + g(u)], \tag{3}$$

де $g(u)$ — довільна гладка функція.

У роботі [5] досліджено максимальну алгебру інваріантності та знайдені деякі розв’язки системи рівнянь Ван-дер-Ваальса, яка належить до класу систем конвекції-дифузії.

У роботі поставимо задачу застосувати нелокальні перетворення еквівалентності методом, запропонованим у роботах [3–4, 6], для лінеаризації та знаходження нелокальних анзаців системи рівнянь конвекції-дифузії:

$$U_t = \partial_x [F(U) U_x + G(U)], \tag{4}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(t, x)$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$, $g^a = g^a(U)$ — довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1,2}$.

Нелокальні перетворення еквівалентності системи (4). Застосуємо до системи (4) нелокальну заміну вигляду

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v^a_x, \tag{5}$$

де $v^a = v^a(t, x)$ — нові невідомі функції змінних t, x. Підставивши (5) в (4) і проінтегрувавши одержану систему по змінній x, будемо мати:

$$V_t = F(V_x) V_{xx} + G(V_x), \tag{6}$$

де $V = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$, $G(V_x) = \begin{pmatrix} g^1(V_x) \\ g^2(V_x) \end{pmatrix}$.

Якщо до системи (6) застосувати перетворення годографа

$$t = x_0, \quad x = w^1, \quad v^1 = x_1, \quad v^2 = w^2, \tag{7}$$

де x_0, x_1 — нові незалежні змінні, $w^a = w^a(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні, то дана система зведеться до вигляду

$$\begin{cases} w_0^1 = \dfrac{1}{(w_1^1)^2}[(f^{11} + w_1^2 f^{12})w_{11}^1 - w_1^1 f^{12} w_{11}^2] - w_1^1 g^1, \\ w_0^2 = \dfrac{1}{(w_1^1)^3}[(f^{11} + w_1^2 f^{12})w_1^2 - (f^{21} + w_1^2 f^{22})]w_{11}^1 + \\ + \dfrac{1}{(w_1^1)^2}(f^{22} - w_1^2 f^{12})w_{11}^2 - w_1^1 g^2, \end{cases} \tag{8}$$

де $w_\mu^a = \dfrac{\partial w^a}{\partial x_\mu}$, $w_{11}^a = \dfrac{\partial^2 w^a}{\partial x_1^2}$, $\mu = 0,1$, причому

$$f^{ab} = f^{ab}\left(\frac{1}{w_1^1}, \frac{w_1^2}{w_1^1}\right), \quad g^a = g^a\left(\frac{1}{w_1^1}, \frac{w_1^2}{w_1^1}\right); \quad a, b = \overline{1,2}. \tag{9}$$

Продиференціювавши систему (8) за змінною x_1, та ввівши заміну

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w_1^1 = z^1, \quad w_1^2 = z^2, \tag{10}$$

де $z^a = z^a(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні, одержимо наступну систему

$$Z_0 = \partial_1[\Phi(Z)Z_1 + \Psi(Z)], \tag{11}$$

де $Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$, $Z_\mu = \dfrac{\partial Z}{\partial x_\mu}$, $\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$, $\Phi(Z) = \begin{pmatrix} \varphi^{11} & \varphi^{12} \\ \varphi^{21} & \varphi^{22} \end{pmatrix}$,

$$\Psi(Z) = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix}, \ \varphi^{ab} = \varphi^{ab}(Z), \ \psi^a = \psi^a(Z), \ \mu = 0,1,$$

причому функції $f^{ab}(Z)$ та $g^a(Z)$ пов'язані із функціями $\varphi^{ab}(Z)$ та $\psi^a(Z)$ наступними співвідношеннями

$$\begin{gathered} \varphi^{11} = (z^1)^{-2}[f^{11} + z^2 f^{12}], \\ \varphi^{12} = -(z^1)^{-1} f^{12}, \\ \varphi^{21} = (z^1)^{-3}[z^2(f^{11} + z^2 f^{12}) - (f^{21} + z^2 f^{22})], \\ \varphi^{22} = (z^1)^{-2}[f^{22} - z^2 f^{12}], \end{gathered} \tag{12}$$

$$\psi^1 = -z^1 g^1,$$
$$\psi^2 = g^2 - z^2 g^1, \quad (13)$$

де $f^{ab} = f^{ab}(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1})$, $\varphi^{ab} = \varphi^{ab}(Z)$, $g^a = g^a(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1})$, $\psi^a = \psi^a(Z)$.

Таким чином, ми встановили, що ланцюжок замін (5), (7), (10) зводить систему (4) до системи рівнянь того ж класу вигляду (11) і навпаки, — не важко переконатися, що система (11) за допомогою вказаних замін зводиться до системи (4).

Лінеаризація системи (4). Якщо припустити, що система (4), лінійна, тобто $F(U) = \Lambda$, $G(U) = \Gamma \cdot U$, де $\Lambda = (\lambda_{ab})$, $\Gamma = (\gamma_{ac})$ — сталі матриці, то, використавши формули (12), (13), одержимо систему:

$$z_0^1 = \partial_1[\frac{\lambda_{11} + \lambda_{12}z^2}{(z^1)^2} z_1^1 - \frac{\lambda_{12}}{z^1} z_1^2 - \gamma_{12} z^2],$$

$$z_0^2 = \partial_1[\frac{z^2(\lambda_{11} + \lambda_{12}z^2) - (\lambda_{21} + \lambda_{22}z^2)}{(z^1)^3} z_1^1 + \frac{\lambda_{22} - \lambda_{12}z^2}{(z^1)^2} z_1^2 + \quad (14)$$

$$+\frac{1}{z^1}(\gamma_{21} + (\gamma_{22} - \gamma_{11})z^2 - \gamma_{12}(z^2)^2)],$$

яка за допомогою перетворень (5), (7), (10) зводиться до лінійної системи вигляду

$$U_t = \Lambda U_{xx} + \Gamma U_x, \quad (15)$$

і навпаки.

Алгебра інваріантності системи (15).

Лема. Перетворення вигляду

$$U = AW + B, \quad (16)$$

де $W = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$ — нові невідомі функції, $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, — довільні сталі матриці, матриця A невироджена , $\alpha_{ab}, \beta_a \in R$, є перетвореннями локальної еквівалентності системи (4).

Зауваження 1. Наступні твердження про симетрійні властивості систем рівнянь конвекції-дифузії (14), (15) формулюватимемо з точністю до перетворень еквівалентності (16).

Теорема 1. В залежності від вигляду матриць Λ, Γ максимальна алгебра інваріантності системи (15) з точністю до перетворень (16) задається наступними операторами:

1) $A_0 = \langle \partial_t, \partial_x, Q = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}, X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2} \rangle,$

при довільних матрицях Λ, Γ;

2) $A_1 = \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + (x+\gamma_1 t)Q_1 + (x+\gamma_2 t)Q_2,$

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1},\ Q_2 = -\frac{1}{2\lambda_2}u^2\partial_{u^2},$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + (\lambda_1 + \gamma_1(x+\gamma_1 t))Q_1 + (\lambda_2 + \gamma_2(x+\gamma_2 t))Q_2,$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + [\lambda_1 t + \frac{1}{2}(x+\gamma_1 t)^2]Q_1 + [\lambda_2 t + \frac{1}{2}(x+\gamma_2 t)^2]Q_2,$$

$$X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2} \rangle,$$

при

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},\quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix},\ \text{де}\ \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \gamma_1 \neq \gamma_2; \tag{17}$$

3) $A_2 = \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + (x+\gamma_1 t)Q_1 + (x+\gamma_2 t)Q_2,$

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda}u^1\partial_{u^1}, Q_2 = -\frac{1}{2\lambda}u^2\partial_{u^2},$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + (\lambda + \gamma_1(x+\gamma_1 t))Q_1 + (\lambda + \gamma_2(x+\gamma_2 t))Q_2,$$

$$Q_3 = e^{\frac{\gamma_2^2-\gamma_1^2}{4\lambda}t + \frac{\gamma_2-\gamma_1}{2\lambda}x}u^2\partial_{u^1}, Q_4 = e^{\frac{\gamma_1^2-\gamma_2^2}{4\lambda}t + \frac{\gamma_1-\gamma_2}{2\lambda}x}u^1\partial_{u^2},$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + [\lambda t + \frac{1}{2}(x+\gamma_1 t)^2]Q_1 + [\lambda t + \frac{1}{2}(x+\gamma_2 t)^2]Q_2,$$

$$X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2} \rangle,$$

при $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \gamma_1 \neq \gamma_2$;

4) $A_3 = \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + (x+\gamma_1 t)Q_1 + m\gamma_1 t Q_2,$

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda}(u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}),\ Q_2 = -\frac{1}{2\lambda}u^1\partial_{u^2},$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + (\lambda + \gamma_1(x+\gamma_1 t))Q_1 + m\gamma_1 x Q_2,$$

$$Q_3 = u^1\partial_{u^1} + m\gamma_1(x+\gamma_1 t)Q_2,$$

$$Q_4 = m\gamma_1(x+\gamma_1 t)[Q_3 - u^2\partial_{u^2}] + u^2\partial_{u^1},$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + [\lambda t + \frac{1}{2}(x+\gamma_1 t)^2]Q_1 + m\gamma_1 tx Q_2,$$

$$X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2} \rangle,$$

при $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ m\gamma_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$;

5) $A_4 = \langle \partial_t,\ \partial_x,\ G = t\partial_x + (x+\alpha t)Q_1 + \beta t Q_2,$

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda}(u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}), Q_2 = \frac{1}{2\lambda}(u^2\partial_{u^1} - u^1\partial_{u^2}),$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + (\lambda + \alpha x + (\alpha^2 - \beta^2)t)Q_1 + \beta(x + 2\alpha t)Q_2,$$

$$Q_3 = \cos\frac{\beta}{\lambda}(x+\alpha t)(u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}) - \sin\frac{\beta}{\lambda}(x+\alpha t)(u^2\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}),$$

$$Q_4 = \sin\frac{\beta}{\lambda}(x+\alpha t)(u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}) + \cos\frac{\beta}{\lambda}(x+\alpha t)(u^2\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}),$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + [\frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)t^2 + \alpha tx + \frac{1}{2}x^2 + \lambda t]Q_1 + \beta t(x+\alpha t)Q_2,$$

$$X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2}\rangle,$$

при $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$;

6) $A_5 = \langle A_0,\ Q_2 = e^{\frac{\gamma_{11}-\gamma_{22}}{4\lambda}(2x + (\gamma_{11}+\gamma_{22})t)} u^1\partial_{u^2}\rangle$;

при $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ k\lambda & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$,

7) $A_6 = \langle A_5,\ D = 2t\partial_t - \frac{1}{2\lambda}(x+\gamma_1 t)Q + \frac{2k\lambda}{\gamma_2 - \gamma_1}u^1\partial_{u^2}\rangle,$

при $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ k\lambda & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$;

8) $A_7 = \langle A_0,\ G = t\partial_x - \frac{1}{2\lambda}(x+\gamma_1 t)Q + \frac{1}{2\lambda}(k(x+\gamma_1 t) - \gamma_2 t)u^1\partial_{u^2},$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x - [\frac{\gamma_1}{2\lambda}(x+\gamma_1 t) + \frac{1}{2}]Q + (\frac{k\gamma_1}{2\lambda}(x+\gamma_1 t) - \frac{\gamma_2}{2\lambda}(x + 2\gamma_1 t))u^1\partial_{u^2},$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - \frac{1}{4\lambda}[(x+\gamma_1 t)^2 + 2\lambda t]Q + \frac{1}{4\lambda}[k(x+\gamma_1 t)^2 - 2\gamma_2 t(x+\gamma_1 t)]u^1\partial_{u^2}\rangle,$$

при $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ k\lambda & \lambda \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix}$;

9) $A_8 = \langle A_0,\ G = t\partial_x - \frac{1}{2(\alpha^2 + \beta^2)}(\alpha(x+\gamma_1 t) - \beta\gamma_2 t)Q -$

$$-\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}(\beta(x+\gamma_1 t)+\alpha\gamma_2 t)Q_2,\;\; Q_2=u^2\partial_{u^1}-u^1\partial_{u^2},$$

$$D=2t\partial_t+x\partial_x+\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}((\beta\gamma_2-\alpha\gamma_1)x+(\alpha(\gamma_2^2-\gamma_1^2)+2\beta\gamma_1\gamma_2)t-$$

$$-(\alpha^2+\beta^2))Q-\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}((\alpha\gamma_2+\beta\gamma_1)x-(\beta(\gamma_2^2-\gamma_1^2)-2\alpha\gamma_1\gamma_2)t)Q_2,$$

$$\Pi=t^2\partial_t+tx\partial_x+$$

$$+\frac{(2(\beta\gamma_2-\alpha\gamma_1)tx+(\alpha(\gamma_2^2-\gamma_1^2)+2\beta\gamma_1\gamma_2)t^2-\alpha x^2-2(\alpha^2+\beta^2)t)}{4(\alpha^2+\beta^2)}Q-$$

$$-\frac{(2(\alpha\gamma_2+\beta\gamma_1)tx-(\beta(\gamma_2^2-\gamma_1^2)-2\alpha\gamma_1\gamma_2)t^2+\beta x^2)}{4(\alpha^2+\beta^2)}Q_2\rangle,$$

при $\Lambda=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$, $\Gamma=\begin{pmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ -\gamma_2 & \gamma_1\end{pmatrix}$, причому функції β^a є довільними розв'язками системи (15).

Симетрійні властивості образу системи (15), (17). Образом системи

$$U_t=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}U_{xx}+\begin{pmatrix}\gamma_1 & 0\\ 0 & \gamma_2\end{pmatrix}U_x, \tag{18}$$

внаслідок перетворень (5), (7), (10), є система нелінійних рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$\begin{aligned} z_0^1&=\partial_1[\frac{\lambda_1}{(z^1)^2}z_1^1],\\ z_0^2&=\partial_1[\frac{(\lambda_1-\lambda_2)z^2}{(z^1)^3}z_1^1+\frac{\lambda_2}{(z^1)^2}z_1^2+(\gamma_2-\gamma_1)\frac{z^2}{z^1}]. \end{aligned} \tag{19}$$

Для того щоб порівняти ліївські симетрії системи (18), (19), дослідимо максимальну алгебру інваріантності системи (19). Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. Максимальною алгеброю інваріантності системи (19) є алгебра Лі з базисними генераторами

$$\left\langle \partial_0,\,\partial_1,\,D=x_1\partial_1-z^1\partial_{z^1},\,z^1\partial_{z^2},\,z^2\partial_{z^2}\right\rangle \tag{20}$$

Дана теорема доводиться стандартним методом Лі (див., наприклад, [1], [7], [10]).

З теореми 2 випливає, що максимальна алгебра інваріантності системи (19) містить меншу кількість Ліївських операторів ніж максимальна алгебра інваріантності системи (18). Використаємо цей факт для знаходження додаткових (неліїівських) анзаців системи (19).

5. Ліївські анзаци системи (18). Використаємо Ліївську симетрію системи (18) для побудови її інваріантних анзаців.

Розв'язок системи (18) будемо шукати у вигляді

$$U = A(t,x)\varphi(\omega),$$

де $A(t,x) = (\alpha^{ab})$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix}$, $\alpha^{ab} = \alpha^{ab}(t,x)$, $\omega = \omega(t,x)$ — деякі гладкі функції, $\varphi^a(\omega)$ — нові невідомі функції, які знаходяться після розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dt}{\xi^0} = \frac{dx}{\xi^1} = \frac{du^1}{\eta^1} = \frac{du^2}{\eta^2} = d\tau. \qquad (21)$$

Максимальною алгеброю інваріантності системи (18) є алгебра A_1. Координати інфінітезимального оператора скінченно-вимірного ядра цієї алгебри задаються формулами:

$$\xi^0 = c_1 t^2 + 2c_2 t + c_4; \quad \xi^1 = c_1 tx + c_3 t + c_2 x + c_5;$$

$$\eta^1 = -\frac{1}{2\lambda_1}[\frac{c_1}{2}((x+\gamma_1 t)^2 + 2\lambda_1 t) + c_2(\gamma_1(x+\gamma_1 t) + \lambda_1) + c_3(x+\gamma_1 t) + c_6]u^1;$$

$$\eta^2 = -\frac{1}{2\lambda_2}[\frac{c_1}{2}((x+\gamma_2 t)^2 + 2\lambda_2 t) + c_2(\gamma_2(x+\gamma_2 t) + \lambda_2) + c_3(x+\gamma_2 t) + c_7]u^2,$$

де $c_1,\ldots,c_7$ — групові параметри. Система (21) має вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= c_1 t^2 + 2c_2 t + c_4, \\ \dot{x} &= c_1 tx + c_3 t + c_2 x + c_5, \\ \dot{u}^1 &= -\frac{1}{2\lambda_1}[\frac{c_1}{2}((x+\gamma_1 t)^2 + 2\lambda_1 t) + c_2(\gamma_1(x+\gamma_1 t) + \lambda_1) + c_3(x+\gamma_1 t) + c_6]u^1, \\ \dot{u}^2 &= -\frac{1}{2\lambda_2}[\frac{c_1}{2}((x+\gamma_2 t)^2 + 2\lambda_2 t) + c_2(\gamma_2(x+\gamma_2 t) + \lambda_2) + c_3(x+\gamma_2 t) + c_7]u^2, \end{aligned} \qquad (22)$$

де $c_1,\ldots,c_7$ — довільні числові параметри $\varphi^a(\omega)$ — нові невідомі функції. Проінтегрувавши систему (22) методом, розглянутим наприклад, у роботах [2–3], наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, які одержуються в результаті

$$u^1 = e^{k_1 t}\varphi^1(\omega), \quad u^2 = e^{k_2 t}\varphi^2(\omega), \quad \omega = k_3 t + x, \qquad (23)$$

$$u^1 = e^{\frac{k}{2\lambda_1}t(x+\frac{1}{3}kt^2+\frac{\gamma_1}{2}t+k_1)}\varphi^1(\omega), \quad \omega = \frac{1}{2}kt^2 + x,$$

$$u^2 = e^{\frac{k}{2\lambda_2}t(x+\frac{1}{3}kt^2+\frac{\gamma_2}{2}t+k_2)}\varphi^2(\omega), \qquad (24)$$

$$u^1 = t^{k_1} e^{-\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}(x+\frac{\gamma_1}{2}t)} \varphi^1(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}} x,$$
$$u^2 = t^{k_2} e^{-\frac{\gamma_2}{2\lambda_2}(x+\frac{\gamma_2}{2}t)} \varphi^2(\omega), \tag{25}$$

$$u^1 = e^{-\frac{1}{4\lambda_1}[\gamma_1(2x+\gamma_1 t)+tx^2(t^2+1)^{-1}]-k_1 arctgt} (t^2+1)^{-\frac{1}{4}} \varphi^1(\omega),$$
$$u^2 = e^{-\frac{1}{4\lambda_2}[\gamma_2(2x+\gamma_2 t)+tx^2(t^2+1)^{-1}]-k_2 arctgt} (t^2+1)^{-\frac{1}{4}} \varphi^2(\omega), \tag{26}$$
$$\omega = x(t^2+1)^{-\frac{1}{2}},$$

де $k, k_1, \ldots, k_4$ — сталі, які певним чином виражаються через сталі $c_1, \ldots, c_7$.

Ліївські анзаци системи (19). Використаємо Ліївську симетрію системи (19) для побудови інваріантних анзаців цієї системи.

Максимальною алгеброю інваріантності системи (19) є алгебра (20). Координати інфінітезимального оператора цієї алгебри задаються формулами:

$$\xi^0 = c_1;\ \xi^1 = c_3 x_1 + c_2;\ \eta^1 = -c_3 z^1;\ \eta^2 = c_4 z^1 + c_5 z^2,$$

де $c_1, \ldots, c_5$ — групові параметри. Система (21) має вигляд:

$$\dot{x}_0 = c_1,\ \dot{x}_1 = c_3 x_1 + c_2,\ \dot{z}^1 = -c_3 z^1,\ \dot{z}^2 = c_4 z^1 + c_5 z^2. \tag{27}$$

Не вдаючись у деталі інтегрування системи (27), наведемо вигляд нееквівалентних анзаців, які одержуються в результаті

$$z^1 = e^{k_1 x_0} \varphi^1(\omega),\ z^2 = k_2 e^{k_1 x_0} \varphi^1(\omega) + \varphi^2(\omega),\ \omega = x_1 e^{k_1 x_0}; \tag{28}$$

$$z^1 = e^{k_1 x_0} \varphi^1(\omega),\ z^2 = \frac{k_1}{k_1 - m} e^{k_1 x_0} \varphi^1(\omega) + e^{m x_0} \varphi^2(\omega),$$
$$\omega = x_1 e^{k_1 x_0}; \tag{29}$$

$$z^1 = \varphi^1(\omega),\ z^2 = k_2 x_0 \varphi^1(\omega) + \varphi^2(\omega),\ \omega = x_1 + k_1 x_0; \tag{30}$$

$$z^1 = \varphi^1(\omega),\ z^2 = e^{k_2 x_0} \varphi^2(\omega),\ \omega = x_1 + k_1 x_0, \tag{31}$$

де k_1, k_2, m — сталі, які деяким чином виражаються через сталі $c_1, \ldots, c_5$.

Нелокальні анзаци системи (19). У пункті 4 було показано, що лінійна система (18), інваріантна відносно алгебри $AG_2(1;1)$, під дією композиції нелокальних перетворень (5), (7), (10) переходить в систему (19), яка неінваріантна відносно операторів G, Π. Неінваріантність системи (19) відносно алгебри $AG_2(1;1)$ звужує множину інваріантних анзаців цієї системи порівняно із системою (18), за допомогою яких можна було б звести (19) до системи звичайних диференціальних рівнянь і в подальшому побудувати точні розв'язки цієї системи.

Для відшукання неліївських анзаців системи (19) подіємо перетвореннями (5), (7), (10) на уже знайдені анзаци системи (18). Проілюструємо процес одержання неліївських анзаців на прикладі перетворення анзацу (26), одержаного з умови інваріантності цієї системи відносно оператора $X = \Pi + \partial_t + k_1 Q_1 + k_2 Q_2$.

Подіявши спочатку на (26) перетворенням (5), одержуємо:

$$v_x^1 = e^{-\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}(2x+\gamma_1 t)-\frac{tx^2}{4\lambda_1(t^2+1)}-k_1 arctgt}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\varphi^1(\omega),$$

$$v_x^2 = e^{-\frac{\gamma_2}{2\lambda_2}(2x+\gamma_2 t)-\frac{tx^2}{4\lambda_2(t^2+1)}-k_2 arctgt}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\varphi^2(\omega),$$

$$\omega = x(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Під дією перетворень годографа (7), анзац набуває вигляду:

$$w_1^1 = e^{\frac{\gamma_1}{\lambda_1}(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+\frac{\gamma_1^2}{2\lambda_1}x_0+\frac{1}{4\lambda_1}x_0\omega^2+k_1 arctgx_0}(x_0^2+1)^{\frac{1}{4}}(\varphi^1(\omega))^{-1},$$

$$w_1^2 = e^{(\frac{\gamma_1}{\lambda_1}-\frac{\gamma_2}{\lambda_2})(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+(\frac{\gamma_1^2}{2\lambda_1}-\frac{\gamma_2^2}{2\lambda_2})x_0+(\frac{1}{4\lambda_1}-\frac{1}{4\lambda_2})x_0\omega^2+(k_1-k_2)arctgx_0}\frac{\varphi^2(\omega)}{\varphi^1(\omega)},$$

$$\omega = (x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}w^1.$$

Після дії перетворення (10) на даний анзац, остаточно одержуємо:

$$z^1 = e^{\frac{\gamma_1}{\lambda_1}(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+\frac{\gamma_1^2}{2\lambda_1}x_0+\frac{1}{4\lambda_1}x_0\omega^2+k_1 arctgx_0}(x_0^2+1)^{\frac{1}{4}}(\varphi^1(\omega))^{-1},$$

$$z^2 = e^{(\frac{\gamma_1}{\lambda_1}-\frac{\gamma_2}{\lambda_2})(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+(\frac{\gamma_1^2}{2\lambda_1}-\frac{\gamma_2^2}{2\lambda_2})x_0+(\frac{1}{4\lambda_1}-\frac{1}{4\lambda_2})x_0\omega^2+(k_1-k_2)arctgx_0}\frac{\varphi^2(\omega)}{\varphi^1(\omega)},$$

$$\omega = (x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}\tau,$$

де $\tau = \int z^1 dx_1$.

Аналогічно одержуються образи ліївських анзаців (23–25) системи (18). Не вдаючись у деталі їх знаходження, наведемо остаточні результати.

Нелокальні анзаци для системи (19):

$$z^1 = e^{-\frac{k}{2\lambda_1}x_0(\tau+\frac{1}{3}kx_0^2+\frac{\gamma_1}{2}x_0+k_1)}(\varphi^1(\omega))^{-1},$$

$$z^2 = e^{(\frac{1}{2\lambda_2}-\frac{1}{2\lambda_1})kx_0(\tau+\frac{1}{3}kx_0^2)+\frac{k}{2}x_0[(\frac{\gamma_2}{2\lambda_2}-\frac{\gamma_1}{2\lambda_1})x_0+\frac{k_2}{\lambda_2}-\frac{k_1}{\lambda_1}]}\frac{\varphi^2(\omega)}{\varphi^1(\omega)}, \qquad (32)$$

$$\omega = (\frac{1}{2}kx_0^2+\tau);$$

$$z^1 = x_0^{-k_1}e^{\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}(\tau+\frac{\gamma_1}{2}x_0)}(\varphi^1(\omega))^{-1},$$

$$z^2 = x_0^{k_2-k_1}e^{(\frac{\gamma_1}{2\lambda_1}-\frac{\gamma_2}{2\lambda_2})\tau+(\frac{\gamma_1^2}{4\lambda_1}-\frac{\gamma_2^2}{4\lambda_2})x_0)}\frac{\varphi^2(\omega)}{\varphi^1(\omega)}, \qquad (33)$$

$$\omega = x_0^{-\frac{1}{2}}\tau;$$

$$z^1 = e^{\frac{\gamma_1}{\lambda_1}(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+\frac{\gamma_1^2}{2\lambda_1}x_0+\frac{1}{4\lambda_1}x_0\omega^2+k_1 arctgx_0}(x_0^2+1)^{\frac{1}{4}}(\varphi^1(\omega))^{-1},$$

$$z^2 = e^{(\frac{\gamma_1}{\lambda_1}-\frac{\gamma_2}{\lambda_2})(x_0^2+1)^{\frac{1}{2}}\omega+(\frac{\gamma_1^2}{2\lambda_1}-\frac{\gamma_2^2}{2\lambda_2})x_0+(\frac{1}{4\lambda_1}-\frac{1}{4\lambda_2})x_0\omega^2+(k_1-k_2)arctgx_0}\frac{\varphi^2(\omega)}{\varphi^1(\omega)}, \qquad (34)$$

$$\omega = (x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}\tau,$$

де $\tau = \int z^1 dx_1$. Нелокальні анзаци (32–34) для системи (19) неможливо одержати в рамках теорії С. Лі.

Нелокальна редукція системи (19). Для знаходження невідомих функцій φ^1, φ^2 необхідно одержані вище нелокальні анзаци підставити у систему (19). Анзаци (32–34) редукують систему (19) до систем звичайних диференціальних рівнянь відповідно

$$\begin{aligned} &\lambda_1\ddot{\varphi}^1+\gamma_1\dot{\varphi}^1+\frac{k}{2\lambda_1}(\omega+k_1)\varphi^1=0,\\ &\lambda_2\ddot{\varphi}^2+\gamma_2\dot{\varphi}^2+\frac{k}{2\lambda_2}(\omega+k_2)\varphi^2=0; \end{aligned} \qquad (35)$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1\ddot{\varphi}^1+\frac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^1-k_1\varphi^1=0,\\ &\lambda_2\ddot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^2-k_2\varphi^2=0; \end{aligned} \qquad (36)$$

$$\lambda_1\ddot{\varphi}^1 + (\frac{\omega^2}{4\lambda_1^2} + \frac{k_1}{\lambda_1})\varphi^1 = 0,$$
$$\lambda_2\ddot{\varphi}^2 + (\frac{\omega^2}{4\lambda_2^2} + \frac{k_2}{\lambda_2})\varphi^2 = 0. \tag{37}$$

Висновки. В даній роботі для системи нелінійних рівнянь конвекції-дифузії (19), яка лінеаризується дією перетворень (5), (7), (10), за їх допомогою одержані неліївські анзаци та знайдено відповідні редуковані системи (35–37), розв'язавши які, можна одержати точні розв'язки системи (19).

Зокрема, один з розв'язків системи (36) при $k_a = 0$ має вигляд

$$\varphi^a = c_1^a \int e^{-\frac{\omega^2}{4\lambda_a}} d\omega + c_2^a, \tag{38}$$

де c_1^a, c_2^a — сталі інтегрування.

Один з розв'язків системи (37) при $\lambda_a = -m_a^2,\ k_a = -\frac{m_a}{2}$ має вигляд

$$\varphi^a = e^{\frac{\omega^2}{4m_a^3}} (c_1^a \int e^{-\frac{\omega^2}{2m_a^3}} d\omega + c_2^a), \tag{39}$$

де c_1^a, c_2^a — сталі інтегрування.

Підставивши знайдені функції φ^a, задані формулами (38), (39) у формули (33), (34) відповідно, і одержимо розв'язки системи (19).

Список використаних джерел:

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.
2. Омелян О. М. Редукція та розв'язки систем нелінійних рівнянь дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея / О. М. Омелян // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер.: «Математика. Механіка». — 2004. — № 11–12. — С. 95–100.
3. Сєров М. І. Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень / М. І. Сєров, О. М. Омелян, Р. М. Черніга // Доп. НАН України. — 2004.— № 10.— С. 39–45.
4. Сєров М. І. Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису / М. І. Сєров, О. М. Омелян. — Полтава : ПолтНТУ, 2012. — 238 с.
5. Сєрова М. М. Симетрійні властивості та точні розв'язки системи рівнянь рідини Ван-дер Ваальса / М. М. Сєрова, О. М. Омелян // Праці Інституту математики НАН України. Сер. Математика та її застосування. — 2000. — Т. 36. — С. 254–261.
6. Фущич В. И. О нелокальных анзацах одного нелинейного одномерного уравненя теплопроводности / В. И. Фущич, Н. И. Серов, Т. К. Амеров // Доклады Академии наук Украины. — 1992. — Т. 1. — С. 26–30.

7. Фущич В. И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики / В. И. Фущич, В. М. Штелень, Н. И. Серов. — К. : Наук. думка, 1989. — 335 с.
8. Bluman G. W. New classes of symmetries for partial differential Equations / G. W. Bluman, G. J. Reid, S. Kumei // J. Math. Phys. — 1988. —Vol. 29 — P. 806–811.
9. King J. R. Some non-local transformations between nonlinear diffusion equation / J. R. King // Journal of Mathematical Physics. — 1990. — Vol. 23. — P. 5441–5464.
10. Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations / P. Olver. — New York : Springer, 1986. — 497 p.
11. Rosen G. Nolinear heat conduction in solid / G. Rosen // Phys. Rev. B. — 1979. — Vol. 19. — P. 2398–2399.
12. Tychynin V. A. Symmetries and Generation of Solutions for Partial Differential Equations / V. A. Tychynin, O. V. Petrova, O. M. Tertyshnyk // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA) — 2007. — Vol. 3. —14 p. — http://arxiv.org/abs/math-ph/0702033
13. Tychynin V. A. Nonlocal symmetries and formulae for generation of solutions for a class of diffusion-convection equations / V. A. Tychynin, O. V. Petrova // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — № 382. — P. 20–33.

Annotation: In this work with nonlocal transformations of equivalence the task of the linearization of nonlinear system of convection-diffusion equations and task of constructing of nonlocal ansatze of nonlinear system of convection-diffusion equations were solved.

Key words: *nonlocal trasformations of equivalence, linearization, nonlocal ansatze, nonlinear system of convection-diffusion equations.*

Отримано: 21.04.2016